Matematika A1 2. Vizsga (2014.01.08.)

A dolgozat írása során semmilyen segédeszköz nem használható! Rendelkezésre álló idő: 90 perc. Jó munkát!

1. (10 pont) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

függvényen és ábrázolja a függvényt!

2. Adja meg a következő integrálok értékét!

   (a) (5 pont)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x}} =$$

   (b) (5 pont)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5e^x+4}\,\mathrm{d}\,x =$$

   (Útmutatás: használjon $t = e^x$ helyettesítést!)

3. (a) (5 pont)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) =$$

   (b) (5 pont) Oldja meg a komplex számok körében a $|z| - z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ egyenletet!

4. (a) (5 pont) Mondja ki a Rolle-tételt!

   (b) (5 pont) Hány valós gyöke van a $p(x) = x^7 + 14x - 3$ polinomnak?

5. (10 pont) Határozzuk meg azt a területet, amelyet az y tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint ezen görbe $x = 4$ pontjához tartozó érintője határol!

Matematika A1 2. Vizsga megoldásai

1. (10 pont) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

függvényen és ábrázolja a függvényt!

- Értelmezési tartomány : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\boxed{\text{1 pont}}$

- tengelymetszetek: $f(x) > 0$, $f(0) = e$

$\boxed{\text{1 pont}}$

- Értelmezési tartomány szélei

$\boxed{\text{3 pont}}$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{1-x} = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{1-x}} = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$$

- monotonitás

$\boxed{\text{2 pont}}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(x) \nearrow}$$

- konvexitás

$\boxed{\text{2 pont}}$

$$f''(X) = e^{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^4} + e^{\frac{1}{1-x}}\frac{2}{(1-x)^3} = e^{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^4}(3-2x),$$

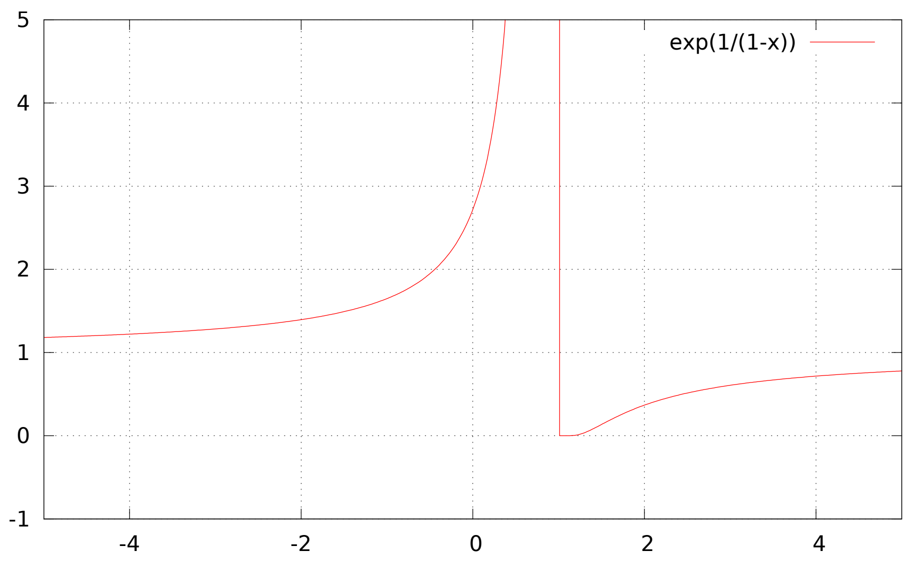
így

	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$\cup$	infl. pont	$\cap$

Az inflexiós pont $f(3/2) = e^{-2}$-nél van.

- Ábra

$\boxed{\text{1 pont}}$



2. Adja meg a következő integrálok értékét!

   (a) (5 pont)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x}} =$$

   (b) (5 pont)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5e^x + 4}\,\mathrm{d}\,x =$$

   (Útmutatás: használjon $t = e^x$ helyettesítést!)

(a) Impromprius integrál:

$\boxed{\boxed{\text{2+3 pont}}}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{A\to 1-} \int_1^A (1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{A\to 1-} \left[-\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2}\right]_0^A = \boxed{2}$$

(b)

$$t = e^x \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\,t = e^x\,\mathrm{d}\,x,$$

$\boxed{\boxed{\text{1 pont}}}$

$$I = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5e^x+4}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{t}{t^2+5t+4}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{t}{(t+4)(t+1)}\,\mathrm{d}\,t.$$

Parciális törtekre bontás:

$\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$

$$\frac{t}{(t+4)(t+1)} = \frac{A}{t+4} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t+4)}{(t+4)(t+1)}$$

A számlálók összehasonlításával:

$$\boxed{A = \frac{4}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}}$$

Igy az integrál

$\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{1}{t+4}\,\mathrm{d}\,t - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{4}{3}\ln|t+4| - \frac{1}{3}\ln|t+1| + C$$

Visszahelyettesítés után:

$$\boxed{I = \frac{4}{3}\ln(e^x+4) - \frac{1}{3}\ln(e^x+1) + C}$$

3. (a) (5 pont)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=$$

(b) (5 pont) Oldja meg a komplex számok körében a $|z|-z=1+2\,\mathrm{i}$ egyenletet!

(a) Közös nevezőre hozva:

$\boxed{\text{1 pont}}$

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

0/0-típúsú, így a l'Hospital szabály kétszeres alkalmazásával:

$\boxed{\text{2+2 pont}}$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b) Legyen $z=x+\mathrm{i}\,y$ alakú, ekkor a kérdéses egyenlet:

$$\sqrt{x^2+y^2}-x-\mathrm{i}\,y=1+2\,\mathrm{i}\,.$$

A képzetes részek összehasonlításával: $\boxed{y=-2}$, ahonnan a valós részre:

$\boxed{\text{2 pont}}$

$$\sqrt{x^2+4}-x=1\quad\Longrightarrow\quad x^2+4=x^2+2x+1\quad\Longrightarrow\quad\boxed{x=3/2}$$

$\boxed{\text{2 pont}}$

Vagyis

$$\boxed{z=\frac{3}{2}-2\,\mathrm{i}}.$$

$\boxed{\text{1 pont}}$

4. (a) (5 pont) Mondja ki a Rolle-tételt!
   (b) (5 pont) Hány valós gyöke van a $p(x) = x^7 + 14x - 3$ polinomnak?

(a) Ha $f \in C[a, b]$ differenciálható (a, b)-ben és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, melyre $f'(c) = 0$.

$\boxed{\boxed{\text{5 pont}}}$

(b) Mivel p polinom páratlan fokszámú, így biztosan létezik valós gyöke (előadáson bizonyítottuk).

$\boxed{\boxed{\text{1 pont}}}$

Tegyük fel, hogy több gyöke van, legyen például x_1 és x_2 is gyök, azaz $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Mivel egy polinom mindenütt folytonos és mindenütt differenciálható, így alkalmazható a Rolle-tétel az $[x_1, x_2]$ intervallumra, vagyis léteznie kell egy $c \in (x_1, x_2)$ számnak, ahol $p'(c) = 0$. De

$$p'(x) = 7x^6 + 14 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

így ellentmondásra jutunk, vagyis

$$\boxed{p(x)\text{-nek pontosan egy valós gyöke van.}}$$

$\boxed{\boxed{\text{4 pont}}}$

5. (10 pont) Határozzuk meg azt a területet, amelyet az y tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint ezen görbe $x = 4$ pontjához tartozó érintője határol!

Ha $y = \sqrt{x}$, akkor $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Mivel $y(4) = 2$ és $y'(4) = \frac{1}{4}$, így az $x = 4$-hez tartozó érintőegyenes egyenlete

$$\boxed{y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1.}$$

$\boxed{\boxed{\text{3 pont}}}$

Miután az érintőegyenes az $y = \sqrt{x}$ függvényt felülről érinti ($\sqrt{x}$ konkáv), így a kérdéses terület:

$$T = \int_0^4 \left(\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}\, x = \left[\frac{x^2}{8} + x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \boxed{6 - 16/3 = \frac{2}{3}}.$$

$\boxed{\boxed{\text{7 pont}}}$