

Valószínűesszámitás
1. rész
Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András
2019. szeptember 18.

Tartalomjegyzék

1. Esemény, valószínűség	3
2. Diszkrét eloszlás	8
3. Folytonos egyenletes eloszlás	10
4. További műveletek és szabályok	14
5. Feltételes valószínűség és eloszlás	15
6. Függetlenség	18
7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt	19
8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban	23
9. Vegyes feladatok eseményekre, valószínűségekre	24

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékát emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSc hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhettek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztus 29.

Vetier András

1. Esemény, valószínűség

I. téma: Lehetséges kimenetek

Az alábbi véletlen jelenségek megnevezett megfigyelésével kapcsolatban adjuk meg az eseményteret, azaz soroljuk fel a lehetséges kimeneteket (más néven: elemi eseményeket). Minden esetben állapítsuk meg, hogy hány elemű az eseménytér?

1. (a) Két szabályos érmével dobunk,
(b) Három szabályos érmével dobunk,
(c) Négy szabályos érmével dobunk,
(d) Öt szabályos érmével dobunk,
(e) Tíz szabályos érmével dobunk,
és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül.
2. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,
és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
3. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
(b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
(c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,
és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk írást.
4. (a) Két szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
(b) Három szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
(c) Négy szabályos dobókockával dobunk,
(d) Öt szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
és megfigyeljük mindegyik kockán, hogy melyik szám van felül.
5. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

II. téma: Kombinatorika gyakorlása

6. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
7. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
8. Egy versenyen 5 -en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlük a helyezést is.)
9. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?
10. Van 6 lányismerősem, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

11. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
12. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

III. téma: Klasszikus képlet alkalmazása

13. Feldobunk egy érmét

- kétszer
- háromszor
- n -szer

egymásután.

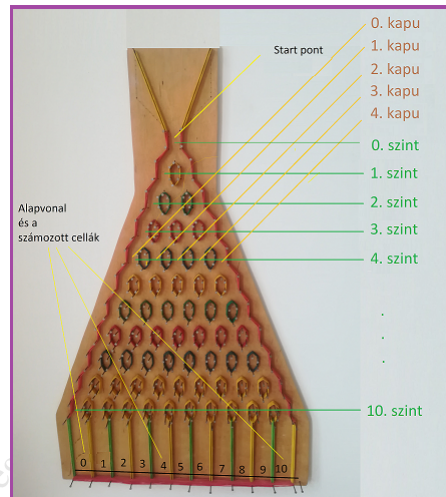
- (a) Mi a valószínűsége, hogy dobunk (legalább egy) fejet?
- (b) És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?
14. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?
15. Mi a valószínűsége annak, hogy két szabályos kockával dobva legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?
16. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?
17. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?
18. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?
19. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?
20. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találmra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?
21. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?
22. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?

A híres Galton deszka.

A képek alapján ismerkedjünk meg a Galton deszkával! Képzeld el, mi történik, mi történhet, ha start pontra helyezünk egy golyót, ami aztán ide-oda ütődve, legurul az alapvonalra! Feltételezzük, hogy minden elágazásnál a golyó 0.5 valószínűséggel megy balra, 0.5 valószínűséggel megy jobbra.



1. ábra. Galton deszka



2. ábra. Galton deszka: szintek 0-tól 10-ig és a kapuk a 4. szinten



3. ábra. Egy lehetséges pálya mentén többször is odarajzoltuk a golyót

Két fontos kérdéskör:

- Vajon milyen eséllyel gurul a golyó a lehetséges pályák valamelyikén?
- A végén az alapvonalon milyen eséllyel köt ki az egyes cellákban?

Kissé távoli és merész hasonlat, de elgondolkodtató:

- Vajon – az életem egy véletlennel tűzdelt szakaszán – merre sodor a sors?
- Hová sodor a sors, hol kötök ki a végén?

Amikor Ön, Kedves Olvasó, a valószínűségszámítást kezdőként tanulja, akkor először ilyen "golyó-sorsokat" kell érdeklődéssel tanulmányoznia: hogy alakul a leguruló golyó sorsa? Ha ezt nem találja elég izgalmasnak, akkor íme a vígasz: megfelelő mennyiségű és minőségű tanulás árán el lehet jutni sokkal összetettebb, és emiatt izgalmasabb, életszerűbb problémákhoz.

A leguruló golyó pályáját azzal jellemezzük, hogy minden egyes szinttel kapcsolatban (a legalsó szinttől – természetesen – eltekintve) megmondjuk, hogy a golyó balra vagy jobbra hagyja el a szintet. Az ábrán látható pálya a balra (B) és jobbra (J) lépések alábbi sorozatával jellemezhető:

B B J J B B J J J J

Számlálási feladatok:

23. Hány lehetséges pálya van

- a start pont és az alapvonal (10. szint) között?
- a start pont és a 4. szint között?
- a 4. szint 2. kapuja (mint új start pont) és az alapvonal (10. szint) között?

24. Hány pálya fut a start pont és

- az alapvonal 0 -ik cellája között?
- az alapvonal 1 -ső cellája között?

- (c) az alapvonal 2 -ik cellája között?
- (d) az alapvonal 6 -ik cellája között?
- (e) az alapvonal k -ik cellája között?

25. Hány olyan pálya van, mely a start pontból indul és

- (a) átmegy a 4. szint 1. kapuján?
- (b) átmegy a 4. szint 2. kapuján?
- (c) átmegy az i -ik szint j -ik kapuján?

26. Hány olyan pálya van, mely

- (a) átmegy a 4. szint 1. kapuján és az alapvonalon a 3. cellába fut?
- (b) átmegy a 4. szint 1. kapuján és az alapvonalon a 4. cellába fut?
- (c) átmegy a 4. szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?
- (d) átmegy a k -ik szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?

27. Most képzeljünk el egy nagyobb Galton deszkát, aminek több szintje van: az alapvonala nem a 10. szint, hanem az n -ik. Hány olyan pálya van ebben a Galton deszkában, mely átmegy a k -ik szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?

Valószínűségek számolása:

28. Fogadjuk el, hogy a start pont és az alapvonal (10. szint) közötti lehetséges pályák egyforma esélyűek. Eme feltevés elfogadása után meghatározandók az alábbi valószínűségek: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a start pontból induló golyó

- (a) a 0 -ik cellába jut?
- (b) az 1 -ső cellába jut?
- (c) a 2 -ik cellába jut?
- (d) a 6 -ik cellába jut?
- (e) a k -ik cellába jut?

29. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a start pontból induló golyó átmegy

- (a) a 4. szint 1. kapuján?
- (b) a 4. szint 2. kapuján?
- (c) az i -ik szint j -ik kapuján?

30. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- (a) a 4. szint 1. kapujából induló golyó az alapvonalon a 3. cellába fut?
- (b) a 4. szint 1. kapujából induló golyó az alapvonalon a 4. cellába fut?
- (c) a 4. szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?
- (d) a k -ik szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?

31. Most képzeljünk el egy olyan Galton deszkát, aminek az alapvonala nem a 10. szint, hanem az n -ik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a k -ik szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?

2. Diszkrét eloszlás

- Az alábbi 4 feladatban az ott definiált valószínűségi változók eloszlását adja meg táblázattal!
- Készítsen ábrákat az eloszlásokról Excellel!
- Adja meg táblázattal a bal- és jobb oldali eloszlásfüggvényt!
- Készítsen ábrákat az eloszlásfüggvényekről is!
- Keresse meg az eloszlások móduszát és mediánját is! (A számolásokhoz használhatja az Excelt.)
- Adja meg az eloszlásokat matemaikai képlettel is!

Jó tanács: Egy X valószínűségi változó eloszlásának meghatározása kissé összetett feladat: meg kell keresni a valószínűségi változó lehetséges értékeit, és minden lehetséges értéknek meg kell határozni a valószínűségét. A $P(X = x)$ vagy $P(X = k)$ (van amikor az x , van amikor a k betűt szeretjük használni) általános képlet megtalálása nehéz lehet. Ilyenkor érdemes lépésről lépésre haladni:

- Először a $P(X = 1)$ valószínűség értékére keressük meg a választ egy numerikus képlettel, és ennek örülünk.
- Ezután a $P(X = 2)$ valószínűség értékét adjuk meg egy numerikus képlettel, és ennek még jobban örülünk.
- Most már nagyobb önbizalommal merünk belevágni a $P(X = 3)$ valószínűség értékének meghatározásába, és – ha még ez is sikerül, — akkor már nagyon örülünk.
- És így tovább lépésről lépésre haladva egyre jobban kivilágosodik előttünk, hogy mi a problémának a lényege, és – jó esetben – rájövünk még az általános képletre is!

Uccu neki, itt a lehetőség a módszer gyakorlására:

1. (a) Két szabályos érmével dobunk.
(b) Három szabályos érmével dobunk.
(c) Négy szabályos érmével dobunk.
(d) Öt szabályos érmével dobunk.
(e) Tíz szabályos érmével dobunk.

Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{ahány fejet kapunk}$$

2. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk.
(b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk.
(c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk.

Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{ahány dobás kell ehhez}$$

3. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk.
(b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk.

(c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk.
Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{hány írás adódik eközben}$$

4. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{hány dobás kell ehhez}$$

5. 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 golyót **visszatevés nélkül**. Legyen X a pirosak, Y a kékek száma a kihúzottak között! Az $(X; Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása valahol korábban megtalálható ebben a jegyzetben.

- (a) Keresse meg!
(b) Állítsa elő Excellel ezt a táblázatot!
(c) Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!
(d) Adja meg az Y valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!

6. 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 golyót, de most nem visszatevés nélkül, hanem **visszatevéssel**. Legyen X a pirosak, Y a kékek száma a kihúzottak között!

- (a) Adja meg az $(X; Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását képlettel is!
(b) Állítsa elő Excellel az eloszlás táblázatát!
(c) Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!
(d) Adja meg az Y valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!

7. Az érmék tömegei:

érme	5 Ft	10 Ft	20 Ft	50 Ft	100 Ft	200 Ft
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: Érmék és tömegeik

Feltételezzük, hogy az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Hány darabot tegyünk be az egyes érmékből egy kalapba, hogy a kalapból való húzáskor az 5 forintos érme legyen a legvalószínűbb, aztán a 10 forintos, és így tovább, a legkevésbé valószínűsű a 200 forintos legyen! Törekedjen arra, hogy minimális számú érmével oldja meg a feladatot! A megoldásnál – ha gondolja – használjon számítógépet!

Az alábbi feladatok megoldásában

- az összes eset felsorolásához és
- az eloszlás tagjainak meghatározásánál a kedvező kimenetek számának leszámolásához

használja az Excel!

8. Két szabályos dobókockával dobunk. Ha a dobott számok összege kisebb 7 -nél, akkor X legyen a dobott számok minimuma, ellenkező esetben X legyen a dobott számok maximuma. Határozza meg X eloszlását!

3. Folytonos egyenletes eloszlás

1. Egy városban a metró szabályosan 5 percenként jár. Az én érkezési pillanatom a metróállomásra véletlenszerű. Attól függ, hogy hogyan ébredek, mennyi ideig vacakolok, hogyan tudok átmenni a zebrákon, stb. Vegyük a várakozási időmet egyenletes eloszlásúnak 0 és 5 perc között! Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) kevesebb, mint 3 percet kell várnom a metróra?
 - (b) több, mint 3 percet kell várnom a metróra?
 - (c) matematikai pontossággal pontosan 3 percet kell várnom a metróra?
 - (d) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $0 < x < 5$?
 - (e) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $x < 0$?
 - (f) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $5 < x$?
 - (g) matematikai pontossággal pontosan x percet kell várnom a metróra?
2. A reggeli buszom egyenletes eloszlású időpontban érkezik 7 : 30 és 7 : 40 között. Hányra menjek oda a megállóba, ha legalább 80% -os esélyt szeretnék arra, hogy elérjem?
3. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot a $[-1; 2]$ intervallumban. Jelöljük ezt X -szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$?
4. Szimulálja Excellel az előző feladatban szereplő X -et, és sok kísérlet kapcsán számolja ki az ott szereplő esemény relatív gyakoriságát! Ha mindent jól csinált, akkor a relatív gyakoriságnak közel kell lenni a valószínűséghez.
5. Egy téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 10 cm között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) a téglalap kerülete nagyobb 15 cm -nél?
 - (b) a területe kisebb 25 cm^2 -nél?
 - (c) a téglalap kerülete nagyobb 15 cm-nél, és a területe kisebb 25 cm^2 területegységnél?
6. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) a téglalap kerülete kisebb x hosszegységnél, ahol $0 < x < 4$?
 - (b) a területe kisebb y területegységnél, ahol $0 < y < 1$?
 - (c) a téglalap kerülete kisebb x hosszegységnél, és a területe kisebb y területegységnél?
7. Egy nagy papírlapra 5 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) a tű metszi valamelyik egyenest?
 - (b) a tű két egyenest metsz?
8. *Bertrand-paradoxon (híres probléma!)*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120° foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?
 - (a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a hűrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

- (b) A kör területén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.
- (c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

9. A Buffon féle tű probléma általánosításai:

- (a) Egy nagy papírlapra 10 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - i. a tű metszi valamelyik egyenest?
 - ii. metszi valamelyik egyenest, és 30 foknál kisebb szöget zár be az egyenessel?
- (b) Egy nagy papírlapra 5 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - i. a tű metszi valamelyik egyenest?
 - ii. a tű két egyenest metsz?
- (c) Egy nagy papírlapra 2 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű pontosan k darab egyenest metsz? ($k \geq 0$ egész)
- (d) Egy nagy papírlapra négyzethálót szerkesztünk úgy, hogy 20 cm-enként párhuzamos piros egyeneseket húzunk, majd az ezekre az egyenesekre merőlegesen szintén 20 cm-enként párhuzamos zöld egyeneseket húzunk. Ezután egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - i. a tű piros és zöld egyenest is metsz?
 - ii. a tű metszi valamelyik egyenest?

10. **Extra feladat:**

A korábban tált *"Randevű probléma"* folytatása. Jancsi és Juliska déli 12 óra és 1 óra között – mint feljebb leírtuk – randevűznak. Azonban a randevű menetébe és sikerébe nem csak a véletlen szól bele, mint korábban, hanem Juliska apukája is: az 1 órás időtartam alatt a fiatalok érkezésétől függetlenül ő is egyenletes eloszlás szerint odatoppan a randevű helyszínére, és ha valamelyik fiataalt ott találja, akkor nagy patáliát csap, és megakadályozza a randevű létrejöttét. Mi a valószínűsége, hogy a fiatalok randevűja mégis létrejön?

11. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- (a) $RND < 0.75$?
- (b) $RND > 0.45$?
- (c) $0.45 < RND < 0.75$?

12. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- (a) $RND^2 < 0.75$?
- (b) $RND^2 > 0.45$?
- (c) $0.45 < RND^2 < 0.75$?

13. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- (a) $\sqrt{RND} < 0.75$?
- (b) $\sqrt{RND} > 0.45$?
- (c) $\sqrt{RND} < 0.75$?

14. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegy

- (a) 3 -mal egyenlő?
- (b) 3 -nál nagyobb?

- (c) osztható 3 -mal?
15. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni második tizedesjegye
- (a) 3 -mal egyenlő?
 - (b) 3 -nál nagyobb?
 - (c) osztható 3 -mal?
16. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye 3 -mal egyenlő, és a tizedespont utáni második tizedesjegye
- (a) 4 -gyel egyenlő?
 - (b) 4 -nél nagyobb?
 - (c) osztható 4 -gyel?
17. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye 3 -nál nagyobb, és a tizedespont utáni második tizedesjegye
- (a) 4 -gyel egyenlő?
 - (b) 4 -nél nagyobb?
 - (c) osztható 4 -gyel?
18. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye osztható 3 -mal, és a tizedespont utáni második tizedesjegye
- (a) 4 -gyel egyenlő?
 - (b) 4 -nél nagyobb?
 - (c) osztható 4 -gyel?
19. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) $RND_1 + RND_2 < 0.75$?
 - (b) $RND_1 + RND_2 < 1.75$?
 - (c) $0.75 < RND_1 + RND_2 < 1.75$?
 - (d) $RND_1 + RND_2 < z$?
 - (e) $a < RND_1 + RND_2 < b$?
20. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) $RND_1 \cdot RND_2 < 0.25$?
 - (b) $RND_1 \cdot RND_2 < 0.75$?
 - (c) $0.25 < RND_1 \cdot RND_2 < 0.75$?
 - (d) $RND_1 \cdot RND_2 < z$?
 - (e) $a < RND_1 \cdot RND_2 < b$?
21. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) $RND_1 < RND_2^2$?
 - (b) $RND_1 < 1 - RND_2^2$?
 - (c) $RND_1 < RND_2^3$?
 - (d) $RND_1 < RND_2^n$?

22. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) $RND_1 + RND_2^2 < 0.75$?
 - (b) $RND_1 + RND_2^2 < 1.75$?
 - (c) $0.75 < RND_1 + RND_2^2 < 1.75$?
 - (d) $RND_1 + RND_2^2 < z$?
 - (e) $a < RND_1 + RND_2^2 < b$?
23. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) $RND_2 < RND_1^2$?
 - (b) $RND_2 < \sqrt{RND_1}$?
 - (c) $RND_1^2 + RND_2^2 < 1$?
24. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) az $x^2 + RND_1 \cdot x + RND_2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei valós számok?
 - (b) az $x^2 + RND_1 \cdot x + RND_2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei komplex számok?
25. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . A nekik megfelelő két pont három részre osztja a $[0; 1]$ intervallumot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) a középső rész hosszabb, mint a másik két rész akármelyike ?
 - (b) a középső rész hosszabb, mint a másik két rész együttesen ?
 - (c) a három részből háromszöget lehet összerakni, azaz mindegyik rész rövidebb, mint a másik két rész hosszának az összege?

4. További műveletek és szabályok

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 4, azaz mind a 10 kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 4?
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 3?
 - (c) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám 4-gyel egyenlő?
- Ha egy szabályos dobókockát végtelen sokszor feldobnánk, akkor minden n -re értelmezhető lenne az alábbi esemény: "az első n dobás során nem dobunk hatost".
 - (a) Mennyi ennek az eseménynek a valószínűsége?
 - (b) Győződjön meg róla, hogy ezek az események csökkenő sorozatot alkotnak!
 - (c) Mit jelent ennek a végtelen sok eseményeknek a metszete?
 - (d) A fentiekből kiadódik annak az eseménynek a valószínűsége, hogy "a végtelen sok dobás során soha sem dobunk 6-ost". Rakja össze fentiekből, hogy hogyan jön ez ki!

- Venn diagram segítségével igazolja az összegzési szabályt két tetszőleges eseményre: ha A, B tetszőleges események, akkor

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Venn diagram segítségével igazolja az összegzési szabályt három tetszőleges eseményre: ha A, B, C tetszőleges események, akkor

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \\ &P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- Hogyan nézhet ki az $(X; Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása, hogy X és Y között fennáll a

- (a) $Y = 20 - X$
- (b) $Y = 2X$
- (c) $Y \leq 20 - X$
- (d) $Y = X^2$
- (e) $Y < X^2$

relációk valamelyike?

- Adjon meg olyan síkbeli egyenletes eloszlást, melynek vetületei egyik tengelyen sem egyenletes!
- Adjon meg olyan síkbeli nem egyenletes eloszlást, melynek vetülete mindkét tengelyen egyenletes!
- Adjon meg két egymástól különböző síkbeli eloszlást, melyeknek vetületei mindkét tengelyen megegyeznek! (Tanulság: egy síkbeli eloszlás vetületei nem határozzák meg a síkbeli eloszlást.)
- Rajz segítségével győződjön meg róla, hogy az A, B események úniójának a metszete egy C eseménnyel ugyanaz, mint az $A \cup C$ metszete $B \cup C$ -vel.
- Rajz segítségével győződjön meg róla, hogy az A, B események metszetének úniója egy C eseménnyel ugyanaz, mint az $A \cap C$ úniója $B \cap C$ -vel.

5. Feltételes valószínűség és eloszlás

I. téma: Feltételes valószínűség

- Egy szabályos dobókockával dobunk. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 -ost dobtunk,
 - ha barátomtól tudom, hogy párosat dobtunk?
 - És ha azt tudom, hogy legalább 3 -ast dobtunk?
 - És ha azt tudom, hogy legfeljebb 5 -öst dobtunk?
- Feldobunk két dobókockát.
 - Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2 -est dobtunk?
 - Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2 -est dobtunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6?
- Tegyük fel, hogy minden születendő gyermek azonos eséllyel lesz fiú vagy lány. Tekintsünk egy véletlenszerűen választott háromgyerekes családot. Ha megtudjuk, hogy a családban van fiú, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy
 - pontosan egy fiú van a családban?
 - pontosan két fiú van a családban?
 - pontosan három fiú van a családban?
- A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, mind a négy színből 5. Én is és barátom is kap 5 lapot.
 - Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?
 - Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje, ha nekem 3 zöldem és 2 pirosam van?
- Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	beteg	egészséges	összesen
fiú	50	60	110
lány	40	80	120
tanár	10	20	30
összesen	100	160	260

Táblázat: Betegek, egészségesek száma

- Véletlenszerűen kihúzzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy a karton
 - fiúé?
 - betegé?
 - beteg fiúé?
- Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?
- Az orvos szorgos asszisztense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

- (d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

II. téma: Szorzási szabály

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzzuk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzzunk, ha húzás után a golyókat
- (a) visszatesszük
 - (b) nem tesszük vissza?
7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60 %-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszor már csak a 40 %, harmadszor pedig csak a 20 %-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
- (a) átvészeli a teljes eljárást?
 - (b) az utolsó irtáskor pusztul el?
 - (c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?
8. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?
9. Egy valószínűségvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúzott egy-egy tételt. Mivel visszatévéssel húznak, húzhatják mindketten ugyanazt is. Mi annak a valószínűsége, hogy
- (a) csak az első hallgató húzott nevezetes eloszlásos tételt?
 - (b) mindkét hallgató ilyen tételt húzott?
 - (c) egyik sem húzott ilyen tételt?
10. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy ezek után az első dobozban 3 piros golyó lesz?
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros és a második kék?
 - (c) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros volt, ha a második kék?
11. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe, majd az első dobozból ismét egyet a másikba. Találjon ki olyan kérdéseket, melyek golyók színével kapcsolatosak, és feltételes valószínűségekkel megválaszolhatók!

III. téma: Teljes valószínűség tétele és Bayes tétel

12. Egy sulis tanulóinak 80 %-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 85 %-a, a fiúk 90 %-a megy át. A hallgatóságnak kb. hány százaléka megy át az első vizsgán?
13. Két szabályos dobókockával dobunk, és megnézzük a dobott számok különbségét (ami egy 0 és 5 közötti szám). Amennyi a dobott számok különbsége, annyi szabályos érmével dobunk. (Tehát az is lehet, hogy 0 darab érmével dobunk.) Mi a valószínűsége annak, hogy az érmével pontosan 4 fejet kapunk?
14. Első lépés: három tízforintos érmével dobunk, és megnézzük, hány fejet kapunk. Második lépés: ahány fejet kaptunk az első lépésben, annyi húszforintos érmével dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a húszforintos érmével pontosan 2 fejet kapunk,
- (a) ha nem tudjuk, hogy a tízforintos érmével mi jött ki?

- (b) ha tudjuk, hogy a tízforintos érmével legalább 2 fejet kaptunk?
15. A ketyere gyárban az A , B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B -n 35, a C -n 40 %-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5 %-a, a B gépsoron előállítottak 4 %-a, a C -n gyártott ketyeréknek csak 2 %-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A , B , illetve a C gépsoron gyártották?
16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0 -t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1 -et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.
- (a) Mi a valószínűsége, hogy 1 -et kapunk?
- (b) Kaptunk egy 0 -t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0 -ként is adták le?
17. Egy dobozban pénz érmék vannak. Az érmék tömegei:

érme	5 Ft	10 Ft	20 Ft	50 Ft	100 Ft	200 Ft
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: Az érmék tömegei

18. Feltételezzük, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Háromszor húzunk úgy, hogy az 5, 10, 20 és 50 forintos érméket visszatesszük, a 100 és 200 forintos érméket nem. Mi a valószínűsége annak, hogy
- (a) a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?
- (b) a 2 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk, feltéve, hogy a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?
19. Ugyanaz a helyzet mint az előző feladatban, de most – kezdetkor – minden érméből 3 -at teszünk a dobozba. Most mi a valószínűsége annak, hogy
- (a) a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?
- (b) a 2 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk, feltéve, hogy a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?

6. Függetlenség

1. Tegyük fel, hogy az év egy bizonyos napján Budapesten, New York-ban és Tokióban minden nap egymástól függetlenül esik az eső 0.6 , 0.8 , 0.5 valószínűségekkel, illetve nem esik 0.4 , 0.2 , 0.5 valószínűségekkel. Esőzés szempontjából a három városban 8 féle variáció lehetséges. Sorolja fel ezt a 8 variációt, és mind a 8 variácónak adja meg a valószínűségét!
2. (Az előző feladat folytatása)
Hogyan egyszerűsödik az előző feladatban a számítás, ha az eső valószínűsége mindhárom városban ugyanannyi?
3. (Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre)
Egy 10 és egy 20 forintos érmevel dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:
 - $A =$ a 10 forintos érme fejet ad
 - $B =$ a 20 forintos érme fejet ad
 - $C =$ mindkét érmevel írást dobok vagy mindkét érmevel fejet dobok A és B nyilván függetlenek egymástól. Mutassuk meg, hogy
 - (a) A és C függetlenek.
 - (b) B és C függetlenek.
 - (c) A és B és C nem függetlenek.
4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:
 - $A =$ a dobott számok összege 7
 - $B =$ legalább az egyik kockán van hatos
 - $C =$ mindkét kockával páratlant dobok
 - $D =$ a két kockával különböző számokat dobok
 - $E =$ a zöld kockával 4 -est dobok

Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

- (a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
- (b) Kizáróak-e az A és C események?
- (c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
- (d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D ? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?
- (e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
- (f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
 - i. függetlenek, de nem kizáróak,
 - ii. kizáróak, de nem függetlenek.

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt

Az alábbi számolós feladatok megoldásához előnyösen lehet használni az Excelt. Az Excel használata akkor lenne igazán hasznossá, ha táblázatok mérete lényegesen nagyobb lenne, mint a most következő feladatokban adott 5×4 -es táblázatok.

1. Töltse ki az alábbi táblázatot nemnegatív számokkal úgy, hogy azok összege 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat egy kétdimenziós $(X; Y)$ valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázata lenne.

y							
3							
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4		x

Táblázat: Kétdimenziós eloszlás

- (a) Adja meg X súlyfüggvényének értékeit az alábbi táblázatban:

0	1	2	3	4	x

Táblázat: X eloszlása

- (b) Adja meg Y súlyfüggvényének értékeit az alábbi táblázatban:

y	
3	
2	
1	
0	

Táblázat: Y eloszlása

A függőleges helyzetű "álló" táblázatot természetesen "le lehet fektetni", vízszintes helyzetbe:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y eloszlása

- (c) Adja meg a $Z = XY$ valószínűségi változó súlyfüggvényének értékeit egy megfelelő táblázatban!
- (d) Adja meg a $Z = X + Y$ valószínűségi változó súlyfüggvényének értékeit egy megfelelő táblázatban!

2. (Az 1. feladat folytatása.) Töltse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az x értékhez tartozó oszlopba az $X = x$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvény értékeit írja:

y							
3							
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4		x

Táblázat: Feltételes súlyfüggvények (eloszlások) az $X = x$ feltételek mellett

3. (Az 1. feladat folytatása.) Töltse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az y értékhez tartozó sorba az $Y = y$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvény értékeit írja:

y							
3							
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4		x

Táblázat: Feltételes súlyfüggvények (eloszlások) az $Y = y$ feltételek mellett

4. Töltse ki a

0	1	2	3	4	x

Táblázat: X súlyfüggvénye

táblázatot pozitív számokkal úgy, hogy az összegük 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat egy X valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázata lenne.

Töltse ki a

y							
3							
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4		x

Táblázat: Y feltételes súlyfüggvényei $X = x$ feltételek mellett

táblázat minden oszlopát pozitív számokkal úgy, hogy minden oszlopban az összegük 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat minden oszlopa egy Y valószínűségi változó $X = x$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvényének a táblázata lenne.

A felvett táblázatokra építve határozza meg az (X, Y) valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázatát:

y							
3							
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4		x

Táblázat: *Kétdimenziós eloszlás*

5. Töltse ki az alábbi két táblázatot pozitív számokkal úgy, hogy mindkét táblázatban 1 legyen az összeg:

0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Egyik eloszlás*

0	1	2	3	y

Táblázat: *Másik eloszlás*

Határozza meg a két eloszlás

- (a) direktszorzatát
- (b) konvolúcióját!

6. Töltse ki az alábbi táblázatokat pozitív számokkal úgy, hogy minden táblázatban 1 legyen az összeg:

1. táblázat: az X valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása):

0	1	2	3	4	x

Táblázat: *X súlyfüggvénye (eloszlása)*

2. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 0$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 0$ feltétel mellett

3. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 1$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 1$ feltétel mellett

4. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 2$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 2$ feltétel mellett

5. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 3$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 3$ feltétel mellett

6. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 4$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 4$ feltétel mellett

Határozza meg az Y valószínűségi változó súlyfüggvényét (eloszlását) úgy, hogy veszi a 2., 3., 4., 5., 6. táblázatban adott súlyfüggvények (eloszlások) keverékét az 1. táblázatban adott súlyfüggvény (eloszlás) szerint!

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban

- 1.
- 2.

Vetier András – Valószínűesszámitás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

9. Vegyes feladatok eseményekre, valószínűségekre

1. Egy pakli francia kártyát (azaz 52 lapot, melyek között 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk ki úgy, hogy mindenki kap 13-13 lapot. Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász?
2. Egy diák három záróvizsgájára készül. Az első júniusban lesz, és ezen 90%-os eséllyel megy át. Ha ezen átment, akkor júliusban próbálhatja meg a második vizsgát, amely 80 % eséllyel lesz sikeres. Ha ezen is átment, akkor szeptemberben megy a harmadik vizsgára, ahol már csak 70% eséllyel megy át. Ellenben ha bármelyik vizsgája sikertelen, akkor csak egy év múlva lehet újra próbálkozni
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első évben átmegy mindhárom vizsgán?
 - (b) Feltéve, hogy nem sikerült az első évben letenni a vizsgákat, mi a valószínűsége, hogy a második vizsgája volt sikertelen?
3. z A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.
 - (a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.
 - (b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?
 - (c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)
4. Egy dobozban 4 cédula van, három piros és egy kék. Kihúzzunk egy cédulát, majd visszatesszük még három ugyanolyan színűvel együtt. Ezután ismét húzzunk egy cédulát. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) egyforma színű cédulákat húzzunk?
 - (b) pirosakat húzzunk, feltéve, hogy egyforma színű cédulákat húzzunk?
5. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B -nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy
 - (a) az első üzletkötés kedvező lesz?
 - (b) mindkét üzletkötés javunkra válik?
 - (c) lesz közöttük rossz és jó üzlet is?
6. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyéréshez (11 - 10 -nél folytatják két pont különbségig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzjutalmat: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben 10 – 9 -es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztozkodás a pénzen?
7.
 - (a) Minden héten egy szelvénnel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnel játszunk?
 - (c) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnel játszunk, amelyeken nincs egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)
8. Egy dobókockát az első hatosig, egy érmét az első fejig dobálunk. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) a kockával pontosan annyit kell dobnunk, mint az érmével?
 - (b) a kockával többet kell dobnunk, mint az érmével?

9. Kertemben 5 fehér és 7 barna tyúkot tartok. A fehér tyúkok átlagosan 3 naponként, a barnák 4 naponként tojnak egy-egy tojást.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy tyúkjaim 24 óra alatt együttesen is csak egyetlen tojást produkálnak? Ma reggel a 12 tyúkból 2 beszökött az üres nyúlketrecbe, és rájuk záródott az ajtó. Mi a valószínűsége annak, hogy
- (b) mindkét tyúk barna volt?
- (c) az egyik fehér, a másik barna volt?
- (d) holnap reggel a nyúlketrecben tojás lesz?
- (e) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a ketrecben nem találok tojást?
- (f) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a másik barna, és a ketrecben nem találok tojást?

10. (*Kapkodó utazó.*) Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevét. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt 0, 1 valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

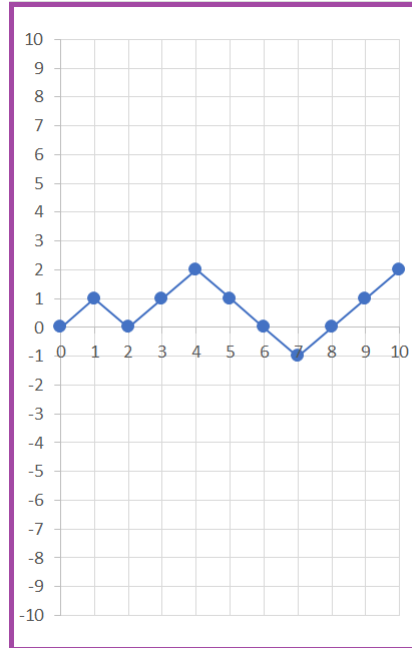
- (a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?
- (b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útlevél nem is volt ezekben?
- (c) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy a hátralévő fiókban megtalálja?

11. **Szimmetrikus bolyongás:** Egy bolha csücsül a számegyenes egyik pontján (például az origón), majd elkezd ugrálni. Ugrásainak eredményeként össze-vissza mozog, bolyong a számegyenesen. Az első ugrás kezdetének a pillanatát nevezzük 0 időpillanatnak. Időegységenként, mondjuk másodpercenként ugrik: 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. Minden ugrás nagysága 1 hosszegység. Az első ugrásával a -1 vagy a $+1$ pontba jut. Akár ide, akár oda jutott, megint egységnyi ugrik 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. A második ugrásával a -2 vagy a 0 vagy a $+2$ pontba jut. Aztán megint ugrik, megint ugrik, összesen 10 ugrást végez, mindig 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. A 10 ugrással a -10 vagy a -8 vagy a -6 vagy a $\dots +10$ pontok valamelyikébe jut. Nyilvánvaló, hogy a páratlan számok itt ki vannak zárva, hiszen 10 ugrással nem lehet például a $+1$ pontba jutni.

Természetesen tekinthetnénk a bolyongást a $[0; 10]$ időintervallum helyett az általánosabb $[n_0; n]$ vagy $[n_0; +\infty]$ időintervallumokon is. Itt most az egyszerűség kedvéért a $[0; 10]$, illetve az $[n_0; 10]$ időintervallumokra szorítkozunk.

A bolha pályáját azzal jellemezzük, hogy minden (egész) időpillanatban megmondjuk, hogy hol van. Az ábrán az időt a vízszintes tengelyen vettük fel. A számegyenest, ahol a bolha ugrál, függőleges tengelyenként ábrázoljuk. Ezért amikor a bolha a számegyenesen balra ugrik, az ábrán ez lefelé lépésnek, ereszkedésnek felel meg. A jobbra ugrás pedig felfelé lépésnek, emelkedésnek. Az ábrán látható pálya annak felel meg, hogy a bolha az origóból indul, és az alábbi ugrásokat teszi:

J B J J B B B J J J



4. ábra. A bolha egy lehetséges pályája

Mivel a mi bolhánk egyforma esélyekkel ugrik balra vagy jobbra, a bolyongást szimmetrikusnak nevezzük. Amikor balra vagy jobbra ugrás különböző valószínűségekkel történik, akkor asszimmetrikus bolyongásról beszélünk. Sok más általánosítás is lehetséges, melyekkel a valószínűségszámítás magasabb szintjén vagy a sztochasztikus folyamatok elméletében foglalkoznak.

Számlálási feladatok:

12. Hány lehetséges pályája van a bolhának
 - (a) a $[0; 10]$ időintervallum alatt, ha a 0 időpillanatban a 0 pontból indul?
 - (b) a $[0; 4]$ időintervallum alatt, ha a 0 időpillanatban a 0 pontból indul?
 - (c) a $[4; 10]$ időintervallum alatt, ha a 4 időpillanatban a 2 pontból indul?
13. Hány olyan pálya fut a $[0; 10]$ időintervallum alatt, mely a 10 időpillanatban
 - (a) a -10 pontban végződik?
 - (b) a -2 pontban végződik?
 - (c) a 0 pontban végződik?
 - (d) a k pontban végződik?
14. Hány olyan pálya fut a $[0; 4]$ időintervallum alatt, mely a 4 időpillanatban
 - (a) a -4 pontban végződik?
 - (b) a -2 pontban végződik?
 - (c) a 0 pontban végződik?
 - (d) a k pontban végződik?
15. Hány olyan pálya van, hogy a bolha a

- (a) 4. pillanatban a 2 pontban van és a 10. pillanatban a 6 pontba fut be?
 - (b) 4. pillanatban a i pontban van és a 10. pillanatban a j pontba fut be?
 - (c) k -ik pillanatban a i pontban van és a 10. pillanatban a j pontba fut be?
16. Most képzeljük el a $[k; n]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontból indul, és az n -ik időpillanatban a j pontba fut be?
17. Most képzeljük el a $[0; n]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontban van, és az n -ik időpillanatban a j pontba fut be?

Valószínűségek számolása:

18. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 0 időpillanatban a 0 pontból induló bolha a 10. időpillanatban
- (a) a -10 pontba jut?
 - (b) a -2 pontba jut?
 - (c) a 0 pontba jut?
 - (d) a k pontba jut?
19. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 0 időpillanatban a 0 pontból induló bolha a 4. időpillanatban
- (a) a -4 pontba jut?
 - (b) a -2 pontba jut?
 - (c) a 0 pontba jut?
 - (d) a k pontba jut?
20. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- (a) a 4. időpillanatban a 2 pontból induló bolha a 6 pontba fut be?
 - (b) a 4. időpillanatban az i pontból induló bolha a j pontba fut be?
 - (c) a k -ik időpillanatban az i pontból induló bolha a j pontba fut be?
21. Most képzeljük el a $[k; n]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontból indul, és az n -ik időpillanatban a j pontba fut be?
22. Most képzeljük el a $[0; n]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontban van, és az n -ik időpillanatban a j pontba fut be?

JÖN MAJD IDE

Tükrözési elv

Első elérés

Ki nyer a végén? Ismertebb néven: a tönkremenés problémája

Valószínűesszámitás
2. rész
Nevezetes diszkrét eloszlások
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András
2019. július 23.

Tartalomjegyzék

1. Nevezetes eloszlások	3
2. Módusz megkeresése	5
3. Szimuláció	6
4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka	7
5. Egydimenziós adatrendszerek	8
6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása	9
7. Nagy számok törvényei	12
8. Várható érték, variancia, szórás általános tulajdonságai	14
9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák	15
10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások	16
11. Binomiális eloszlás második momentumának, varianciájának és szórásának levezetése	17
12. Feltételes várható érték, variancia, szórás	18
13. Vegyes feladatok diszkrét eloszlásokra	19

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékát emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSc hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhettek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztunovember 29.

Vetier András

1. Nevezetes eloszlások

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

- Nevezze meg eloszlást!
- Indokolja meg az eloszlás jogosságát!
- Ha lehet, adja meg az eloszlás paramétereinek numerikus értékét!
- Ha nem lehet, magyarázza el, milyen adatokra, mérési eredményekre lenne szükség a paraméterek megadásához!

Íme a valószínűségi változók:

- (a) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk fejet.
- (b) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk írást.
- (c) Két érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk dupla fejet.
- (d) Két érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk legalább egy fejet.
- (e) Egy dobókockát 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk hatost.
- (f) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
- (g) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
- (h) Addig dobunk két szabályos érmével, amíg harmadszorra kapunk dupla fejet, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
- (i) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy hány dobás kellett ehhez.
- (j) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy hány dobás kellett ehhez.
- (k) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy előtte hányszor dobtunk hattól különböző számot.
- (l) Ahányadik autó felvesz, amikor kiállok az országútra (mert autóstoppal akarok utazni).
- (m) Ahány autó elmegy 10 perc alatt.
- (n) Ahányadik autó a harmadik piros.
- (o) Ahány pótkocsi nélküli elmegy az első pótkocsis előtt.
- (p) Ahány pótkocsi nélküli elmegy az ötödik pótkocsis előtt.
- (q) Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül.
- (r) Ahány kocsi jön 5 perc alatt.
- (s) Ahány kocsi jön 10 perc alatt.
- (t) Ahány kocsi megáll 10 perc alatt.
- (u) Ahány kocsi elmegy, mielőtt az első megáll.
- (v) Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll.
- (w) Ahány kocsi elmegy, mielőtt a második megáll.
- (x) Ahány kocsi elmegy, mielőtt a harmadik megáll.

2. Feltéve, hogy egy 100 tagú társaságban 40 balkezes van, adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott ember között

- (a) pontosan 3 balkezes van.
- (b) pontosan x balkezes van.

3. Feltéve, hogy egy országban a balkezesek aránya kb. 40%, adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott ember között
- (a) pontosan 3 balkezes van.
 - (b) pontosan x balkezes van.
4. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy
- (a) hányszor állt le a szalag az n -edik termékig (őt is beleértve)?
 - (b) hány terméket gyártott a gép az n -edik leállásig?
 - (c) hány terméket szállított két leállás között?
 - (d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna?
5. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?
6. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?
7. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?
8. Tegyük fel, hogy hétköznaponként Pesten 0.4, Budán 0.7 annak a valószínűsége, hogy nem történik súlyos baleset. Mi a valószínűsége annak, hogy
- (a) Pesten pontosan 1 baleset történik?
 - (b) Budán pontosan 1 baleset történik?
 - (c) Budapesten pontosan 1 baleset történik?

2. Módusz megkeresése

1. Vezesse le a hipergeometrikus eloszlás móduszára fentebb megadott képletet!
2. Vezesse le a negatív binomiális eloszlás móduszára fentebb megadott képletet!
3. Tegyük fel, hogy valaki azzal szórakozik, hogy mindenkivel, akivel összefut, megkérdezi, hogy mikor van a születésnapja. (Az év nem számít, csak a hónap, nap. Szökőévektől eltekintünk. Feltételezzük, hogy minden megkérdezett ember a többitől függetlenül egyforma eséllyel mondja születésnapjaként az év 365 napját.) Embertünk izgul, hogy hányadik embernél adódik az első olyan helyzet, hogy a megkérdezett ember születésnapja egybeesik egy olyan születésnappal, amit már valaki mondott korábban: vajon hányadok kérdezésnél következik ez be? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak
 - (a) a lehetséges értékeit!
 - (b) súlyfüggvényét!
 - (c) móduszát!
4. Tegyük fel, hogy egy X valószínűségi változó binomiális eloszlást követ, melynek paramétereit nem ismerjük. Azt azért tudjuk, hogy az n paraméter 10 és 15 között van, és azt is tudjuk, hogy X legvalószínűbb értéke 5. Adjon alsó és felső becslést az $X = 6$ esemény valószínűségére!
5. Sok éves tapasztalatok alapján tudni lehet, hogy egy bizonyos országban az a legvalószínűbb, hogy egy év alatt 3 hármasiker születik. Adjon alsó és felső becslést annak az eseménynek a valószínűségére, hogy egy évben nem születnek hármasikrek!
6. **Példa: Hányadik embernél adódik először születésnap ismétlődés?** Barátom azzal szórakozik, hogy akivel csak összefut, megkérdezi, mikor van a születésnapja. (A születés éve nem számít, csak a hónap és a nap. Szökőévektől eltekintünk. Feltesszük, hogy minden kérdezésnél – a korábbi válaszoktól függetlenül – egyforma eséllyel kaphatjuk születésnapként az év 365 napjának akármelyikét.) Barátom arra kíváncsi, hogy hányadik kérdezésnél áll elő először az a helyzet, hogy a megkérdezett ember születésnapja egybeesik egy korábban mondott nappal. Ennek a valószínűségi változónak
 - a legkisebb lehetséges értéke 2 (ami akkor adódik, ha a 2-ik megkérdezett ember születésnapja egybeesik az első születésnappal),
 - a legnagyobb értéke pedig 366 (ami akkor adódik, ha a sors először 365 olyan emberrel hozza össze barátomat, akik mind különböző napokon születtek).

Határozza meg

- (a) a jobboldali eloszlásfüggvény képletét,
- (b) a súlyfüggvény képletét,
- (c) az eloszlás móduszát.

3. Szimuláció

1. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami binomiális eloszlást követ
 - (a) $n = 5$ és $p = 0.4$ paraméterekkel.
 - (b) $n = 5$ és változtatható p paraméterekkel.
 - (c) változtatható $n = 5$ és p paraméterekkel.
2. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami optimista geometriai eloszlást követ változtatható p paraméterrel.
 - (a) $p = 1/2$ paraméterrel.
 - (b) $p = 1/6$ paraméterrel.
 - (c) változtatható p paraméterrel.
3. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadott eloszlást követi:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: Numerikusan adott eloszlás

4. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadott eloszlást követi:

x	k_0	k_1	k_2	k_3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: Eloszlás szabad paraméterekkel

ahol k_0, k_1, k_2, k_3 változtatható paraméterek.

5. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadott eloszlást követi:

x	k_0	k_1	k_2	k_3
$p(x)$	p_0	p_1	p_2	p_3

Táblázat: Eloszlás szabad paraméterekkel

ahol k_0, k_1, k_2, k_3 és p_0, p_1, p_2, p_3 változtatható paraméterek.

4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

5. Egydimenziós adatrendszerek

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása

1. Tegyük fel, hogy egy normált tömeg eloszlás az $[A; B]$ intervallumra koncentrálódik. Hogy néz ki az eloszlás, ha

- (a) a súlypontja a lehető leginkább balra helyezkedik el?
- (b) a súlypontja a lehető leginkább jobbra helyezkedik el?
- (c) ha a tehetetlenségi nyomatéka a lehető legnagyobb?

2. A

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: Eloszlás N.1

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

- (a) várható értéke?
- (b) második momentuma?
- (c) varianciája?
- (d) szórása?
- (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

3. A

x	10	11	12	13
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: Eloszlás N.2

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

- (a) várható értéke?
- (b) második momentuma?
- (c) varianciája?
- (d) szórása?
- (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

4. A

x	0	10	20	30
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.3*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

- (a) várható értéke?
- (b) második momentuma?
- (c) varianciája?
- (d) szórása?
- (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

5. A

x	0	11	22	33
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.4*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

- (a) várható értéke?
- (b) második momentuma?
- (c) varianciája?
- (d) szórása?
- (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

6. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családoknak kb.

- 15%-ának nincs gyereke
- 40%-ának 1 gyereke van
- 30%-ának 2 gyereke van
- 10%-ának 3 gyereke van
- 5%-ának pedig 4

A 4 -nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól. Feltesszük, hogy minden gyerek a többitől függetlenül 0.5 – 0.5 valószínűséggel születik lánynak vagy fiúnak.

- (a) Átlagosan hány gyerek van egy-egy családban?
- (b) Átlagosan hány lány-gyerek van egy-egy családban?

- (c) Átlagosan hány fiú-gyerek van egy-egy családban?
- (d) Ha egy családról annyit tudunk, hogy van benne gyerek, akkor a gyerekek számának mi az eloszlása?
- (e) A családi pótlékot az alábbi táblázat szerint kapják a családok:

gyerekek száma	0	1	2	3	4
családi pótlék (<i>fitying</i> -ben)	0 000	5 000	25 000	30 000	35 000

Táblázat: *Családi pótlék*

Átlagosan hány *fitying* családi pótlékot kap egy-egy család?

- (f) Átlagosan hány *fitying* családi pótlékot kapnak a gyerekes családok?

7. Egy dobozban pénzérmék vannak. Az érmék tömegei:

érme	5 Ft	10 Ft	20 Ft	50 Ft	100 Ft	200 Ft
tömeg (<i>g</i>)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Érmék tömegei*

Feltételezzük, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. 1000 -szer húzunk visszatevés-sel. Kb. mennyi lesz a kihúzott érmék

- értékének
- súlyának

az átlaga? (Ha esetleg kísérletekkel ellenőrizni akarja számítását, akkor azt ne igazi érmékkel, hanem számítógépes szimulációval tegye! Az, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel, csak egy hipotézis volt. Egyáltalán nem biztos, hogy ezek a valószínűségek megfelelnek a valóságnak.)

8. Találja meg az általános képletet egy valószínűségi változó várható értékére, ha az eloszlását nem a súlyfüggvénnyel, hanem a lehetséges értékek súlyaival adjuk meg (melyek összege általában nem 1.)

7. Nagy számok törvényei

1. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

- (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- (b) 1, 2, 6, 6, 6, 6;
- (c) 1, 2, 2, 3, 3, 3;
- (d) 1, 2, 2, 2, 2, 6;
- (e) 1, 1, 1, 2, 2, 3;
- (f) 11, 11, 11, 12, 12, 13;
- (g) 21, 21, 21, 22, 22, 23;
- (h) 21, 22, 22, 22, 22, 26;
- (i) 210, 220, 220, 220, 220, 236;
- (j) 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6;
- (k) 0.1, 0.2, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6;
- (l) 5.1, 5.2, 5.6, 5.6, 5.6, 5.6;
- (m) -1, -2, -3, -4, -5, -6;
- (n) -1, -2, -6, -6, -6, -6;
- (o) -1, -2, 2, 3, 3, 3.

A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X -szel. Képzeld el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X -re sok kísérletet végezz. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \dots, X_N$$

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}{N}$$

kifejezés értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \dots, X_N$ számok második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek kell meghatározni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) második momentumának nevezzük.)

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 2.8-tól való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 2.8)^2 + (X_2 - 2.8)^2 + \dots + (X_N - 2.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \dots, X_N$ számoknak a 2.8-re vonatkozó második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) 2.8-re vonatkozó második momentumának nevezzük.)

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változónak a várható értékre vonatkozó második momentumának nevezzük. Ezt a mennyiséget varianciának, avagy szórásnegyzetnek is hívjuk.

2. Először számolja ki a

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.5*

eloszlás

- (a) várható értékét
- (b) második momentumát
- (c) varianciáját
- (d) szórását

majd pedig szimuláljon olyan valószínűségi változót, amely a megadott eloszlást követi, csináljon sok kísérletet, számolja ki a kísérleti eredmények

- (a) átlagát
- (b) második momentumát
- (c) varianciáját
- (d) szórását

és győződjön meg arról, hogy a kísérleti eredmények megfelelő jellemzői az eloszlás megfelelő jellemzőihez közel vannak, a kísérletsorozat ismételtetésével azok körül ingadoznak.

8. Várható érték, variancia, szórás általános tulajdonságai

1. Egy dobozban két cédula van, rajtuk az 1, illetve a 2 számok. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen X = ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon mindkét szám ott legyen. Határozza meg X

- (a) várható értékét!
- (b) szórását!

2. Egy dobozban három cédula van, rajtuk az 1, 2, illetve a 3 számok. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen X = ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon mind a három szám ott legyen. Határozza meg X

- (a) várható értékét!
- (b) szórását!

(Segítség: Az első húzással kihúzzunk valamit. Véletlentől függ, hogy ezután hány húzás kell ahhoz, hogy egy ettől különböző számot húzzunk. Jelölje a szükséges húzások számát Y . Véletlentől függ, hogy ezután hány húzás kell ahhoz, hogy a már kihúzott két számtól különböző számot húzzunk. Jelölje a szükséges húzások számát Z . Nem nehéz rájönni, hogy milyen eloszlást követ Y és Z , és hogy mennyi a várható értékük. Ha ezek után felhasználja a nyilvánvaló $X = 1 + Y + Z$ tényt, megkapja kért várható értéket.)

3. Egy dobozban 10 cédula van 1 -től 10 -ig számozva. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen X = ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon az összes szám ott legyen. Határozza meg X

- (a) várható értékét!
- (b) szórását!

4. Tegyük fel, hogy egy eloszlás szerint

- (a) a 2 koordinátájú pontra eső valószínűség 0.3 . Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy a 2 ponton lévő 0.3 valószínűséget a 13 pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié 5 volt?
- (b) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0 . Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $x_0 + b$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (b konstans)
- (c) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0 . Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $a x_0$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (a konstans)
- (d) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0 . Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $a x_0 + b$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (a és b konstansok)

9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák

1. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozóközpontba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?
2. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben legalább 99% valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
3. Egy dobozban 5 piros és 4 fehér golyó van. 3 golyót kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen X a kihúzott piros golyók száma. Számolja ki X eloszlását, várható értékét, varianciáját, szórását!
4. Ha egy országban átlagosan 2,7 hármásiker születik, akkor mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 hármásiker születik
 - (a) egy év alatt?
 - (b) két év alatt?
5. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!
6. Sok év adatai alapján feltesszük, hogy egy bizonyos kisvárosban naponta átlagosan 4.5 könnyű baleset és 2.8 súlyos baleset történik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy nap alatt a könnyű balesetek száma
 - (a) 10 -nél kisebb?
 - (b) 5 -nél nagyobb?
 - (c) 5 -nél nagyobb, de 10 -nél kisebb?
 - (d) 10 -nél kisebb, feltéve, hogy 5 -nél nagyobb?
 - (e) 5 -nél nagyobb, feltéve, hogy 10 -nél kisebb?

Hogyan módosulnak a fenti kérdésekre adott válaszok, ha nem egy, hanem két egymást követő napon bekövetkező balesetek számára vonatkoznak?

10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások

Vetier András – Valószínűesszámitás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

11. Binomiális eloszlás második momentumának, varianciájának és szórásának levezetése

Vetier András – Valószínűesszámitás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

12. Feltételes várható érték, variancia, szórás

Vetier András – Valószínűesszámlítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

13. Vegyes feladatok diszkrét eloszlásokra

1. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X . Kérdés: $P(X = 7) = ?$
2. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van? Hány sajtóhiba a legvalószínűbb a 13. oldalon? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két sajtóhiba van?
3. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadástól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiegészített a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?
4. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel eltalálom. Mi a valószínűsége, hogy 6 célzásból
 - (a) pontosan 4 -et találok el?
 - (b) 2 -nél többet találok el, de azért nem az összeset?
5. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap $0,2$ valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor $0,95$ valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrizi-e aznap Blicc úr villamosát.)
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
 - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
 - (c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind ötször volt ellenőr a villamoson?
 - (d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?
6. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után
 - (a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
 - (b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
 - (c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?
7. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?
8. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.
 - (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dob-nánk?
 - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?
9. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p , akkor mennyi a valószínűsége, hogy
 - (a) pont k -szor dobunk a fej előtt?
 - (b) pont k -szor dobunk az érmével?

10. Dobogatok a kockával és vonással számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor különbözne ez az előző eredménytől?
11. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?
12. Egymás után kérdezzük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.
- (a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!
 - (b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!
13. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását! Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok
- (a) összegét.
 - (b) különbségét.
14. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább $1/2$ legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)
15. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej esetén tippelnének még az igazságos érmére, hány fej esetén tippelnének már a cinkeltre?)
16. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N -ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n -szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti
- (a) legkisebbet,
 - (b) legnagyobbat,
 - (c) 2-ik legkisebbet,
 - (d) 3-ik legkisebbet,
 - (e) s -edik legkisebbet.
- Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény képletét!
17. *Általánosítás:* Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r -ik pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény és az eloszlásfüggvény képletét! Adja meg a súlyfüggvényt visszatevéses húzás esetén is!

Valószínűesszámitás
3. RÉSZ
Egydimenziós folytonos valószínűségi változók
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András
2019. szeptember 18.

Tartalomjegyzék

1. Folytonos eloszlások	3
2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel	5
3. Random számok transzformációi	6
4. Várható érték, variancia, szórás (– <i>folytonos eset</i>)	7
5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (– <i>diszkrét és folytonos eset</i>)	10
6. Nevezetes folytonos eloszlások	11
7. Közelítések normális eloszlással	12
8. Eloszlások transzformációi	15
9. Monoton darabokból összetevődő transzformációk (<i>Extra tananyag</i>)	17
10. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése (<i>Extra tananyag</i>)	18
11. A főnökök halmaza nem mérhető (<i>Extra tananyag</i>)	19
12. A nagy számok erős törvénye eseményekre (<i>Extra tananyag</i>)	20

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékát emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSc hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhettek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztus 29.

Vetier András

1. Folytonos eloszlások

1. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó

- a $[0, 1]$ intervallumon
- a $[0, B]$ intervallumon
- az $[A, B]$ intervallumon

Mennyi az X

- mediánja?
- alsó kvartilise?
- felső kvartilise?
- p -kvartilise?
- Adja meg a kvantilis függvény képletét!

2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.

- (a) $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$
- (b) $f(x) = 2x/a^2 \quad (0 < x < a)$
- (c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad (0 < x < 1)$
- (d) $f(x) = 0.5 + x \quad (0 < x < 1)$
- (e) $f(x) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

Rajzolja le a sűrűségfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a mediánja?
- alsó kvartilise?
- felső kvartilise?
- p -kvartilise?
- Adja meg a kvantilis függvény képletét!
- Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!

3. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.

- (a) $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$
- (b) $F(x) = x^2/a^2 \quad (0 < x < a)$
- (c) $F(x) = 1 - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$
- (d) $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$

Rajzolja le az eloszlásfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a mediánja?
- alsó kvartilise?
- felső kvartilise?
- p -kvartilise?
- Adja meg a kvantilis függvény képletét!
- Határozza meg a sűrűségfüggvény képletét!

4. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat.

- (a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!
- (b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!
- (c) Az eloszlásfüggvény használata nélkül, az

$$f(x) \approx \frac{P(x_1 \leq X \leq x_2)}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \leq x \leq x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{-hez})$$

képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

5. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket.

- (a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!
- (b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!
- (c) Az eloszlásfüggvény használata nélkül, az

$$f(x) \approx \frac{P(x_1 \leq X \leq x_2)}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \leq x \leq x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{-hez})$$

képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

6. Ahhoz hasonlóan, ahogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény tulajdonságai és $f(x)$ -szel való kapcsolatát megvilágítottuk, keresse meg a $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait és $f(x)$ -szel való kapcsolatát!

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékekkel, pontfelhővel

- 1.
- 2.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

3. Random számok transzformációi

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

4. Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset)

1. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó

- a $[0, 1]$ intervallumon
- a $[0, B]$ intervallumon
- az $[A, B]$ intervallumon

Mennyi az X

- várható értéke?
- második momentuma?
- varianciája?
- szórása?
- Mennyi X^3 a várható értéke?

2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.

- (a) $f(x) = 2x$ ($0 < x < 1$)
- (b) $f(x) = 2x/a^2$ ($0 < x < a$)
- (c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ($0 < x < 1$)
- (d) $f(x) = 0.5 + x$ ($0 < x < 1$)
- (e) $f(x) = 2e^{-2x}$ ($x \geq 0$)

Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?
- a varianciája?
- a szórása?

3. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.

- (a) $F(x) = x^2$ ($0 < x < 1$)
- (b) $F(x) = x^2/a^2$ ($0 < x < a$)
- (c) $F(x) = 1 - e^{-2x}$ ($x \geq 0$)
- (d) $F(x) = \sqrt{x}$ ($0 < x < 1$)

Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?
- a varianciája?
- a szórása?

4. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat. Ha X -re 1000 kísérletet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

- (a) átlaga?
- (b) négyzetének az átlaga?
- (c) varianciája?
- (d) szórása?

5. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket. Ha X -re 1000 kísérletet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények
- (a) átlaga?
 - (b) négyzetének az átlaga?
 - (c) varianciája?
 - (d) szórása?

6. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel
- a legnagyobbat.
 - a nagyság szerint középsőt.
 - a legkisebbet.

Mind a három esettel kapcsolatban végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

7. Generálunk tíz egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerint harmadik legkisebbet. Végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.
8. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel
- a legnagyobbat.
 - a nagyság szerint középsőt.
 - a legkisebbet.

Mind a három esettel kapcsolatban határozza meg, hogy ha X -re 1000 kísérletet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

- (a) átlaga?
 - (b) négyzetének az átlaga?
 - (c) varianciája?
 - (d) szórása?
9. Választunk egy véletlen számot egyenletes eloszlás szerint az $(1, 4)$ intervallumon, majd szerkesztünk egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek ekkora a befogója. Mennyi a háromszög területének a várható értéke?

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ($0 < x < 1$). Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \dots, X_N$$

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -tól való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 0.8)^2 + (X_2 - 0.8)^2 + \dots + (X_N - 0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \dots, X_N$ számoknak a 0.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

10. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \sqrt{x}$ ($0 < x < 1$). Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \dots, X_N$$

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -tól való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 0.8)^2 + (X_2 - 0.8)^2 + \dots + (X_N - 0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \dots, X_N$ számoknak a 0.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

11. Egy Bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{ha } x > 1$$

Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a Dél-Szaharait, aminek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ha } x > 1$$

vagy a Bergengócot?

12. A vihar X idő múlva tör ki a Balatonon, ahol X egy exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó λ paraméterrel. Bérbe veszek egy csónakot A Ft/óra bérleti díjért c óra időtartamra ($c > 0$ valós konstans), és azonnal bérbe adom egy "albérlőnek" B Ft/óra bérleti díjért ($A < B$) ameddig csak lehet, tehát $\min(X, c)$ időtartamra azzal a feltétellel, hogy

- ha a vihar előbb jön mint a c időtartam letelte, akkor a visszamaradó $c - X$ időrészt elvesztéséért én D Ft/óra vigaszdíjat fizetek az "albérlő"-nek.

(a) Hogyan függ a hasznom az X tényleges értékétől?

(b) Írja fel a haszon várható értékét képlet formájában!

(c) Mennyi legyen a c konstans értéke, hogy a hasznom várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (– *diszkrét és folytonos eset*)

1. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba. Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6. Nevezetes folytonos eloszlások

- 1.
- 2.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

7. Közelítések normális eloszlással

1. Egy árverésen a műkincsek élettartama exponenciális eloszlású, 100 év várható értékkel. Eladási árak négyzetesen nő az idővel. Mi az eladási ár várható értéke?
2. Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
 - (a) Mennyi a várható élettartama?
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?
 - (c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?
 - (d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kieg?
 - (e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?
3. Annak a valószínűsége, hogy egy buszmegállóban, hogy a következő t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várunk legalább 10 percet?
4. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?
5. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba.
 - (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya meghaladja a 105 dkg -ot?
 - (b) Mekkora az az x érték, amire teljesül, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya 0.99 valószínűséggel haladja meg az x dkg -ot?
6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?
7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ.
 - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?
 - (b) Hány óra garanciát vállaljunk, ha a garanciális időn belül átlagosan csak 5% garanciaigényt akarunk kielégíteni?
8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?
9. A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!
10. Egy számítógépes programozási nyelvben RND függvény előállít egy véletlen egyenletes eloszlású valószínűségi változót a $(0, 1)$ intervallumon. Milyen transzformációnak vessük alá ezt a számot ahhoz, hogy a kapott szám egy 7 paraméterű exponenciális legyen?
11. Bizonyítsuk be, hogy az
 - $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
 - $G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$

eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

12. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi(x) dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx$

(e)

13. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

14. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

(a) $P(-1 < X < 1)$

(b) $P(-2 < X < 2)$

(c) $P(-3 < X < 3)$

15. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

16. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:

(a) $P(X > 225)$

(b) $P(215 < X < 229)$

(c) $P(215 < X < 229 | X > 225)$

(d) $P(X > 225 | 215 < X < 229)$

17. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk Excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!

18. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órákor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk Excelben ismerősünk megérkezési idejét!

19. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

(a) 50 fő alatt

(b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

20. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

21. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének Excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!

22. Egyszerre feldobunk öt különböző szabályos "dobóizét": egy tertaédert, egy kockát, egy oktaédert, egy dodekaédert, egy ikozaédert. Mindegyik izével a számok 1-től kezdődően jöhetnek ki. Az dobott számokat így szimulálhatjuk Excellel:

tertaéder esetén: $VÉL.KÖZÖTT(1;4)$
kocka esetén: $VÉL.KÖZÖTT(1;6)$
oktaéder esetén: $VÉL.KÖZÖTT(1;8)$
dodekaéder esetén: $VÉL.KÖZÖTT(1;12)$
ikozaéder esetén: $VÉL.KÖZÖTT(1;20)$

Az öt izével dobott számok összege X . Határozza meg X

- (a) várható értékét!
 - (b) szórását!
 - (c) Az $X > 35$ esemény valószínűségét!
23. Van 25 izzóm, melyek élettartamai egymástól függetlenek, és (napokban mérve) exponenciális eloszlást követnek 0.4 paraméterrel. Az izzókat egymás után használom a sötét pincénk folyamatos világítására. Legyen X az az időtartam, ameddig a 25 izzóval a világosság a pincében biztosítható, tehát X = az izzók élettartamainak az összege. Határozza meg X
- (a) várható értékét!
 - (b) szórását!
 - (c) az $X > 60$ esemény valószínűségét!
 - (d) Mennyi az az x időtartam, amire 0.9 biztonsággal garantálható a világosság? Vagyis mennyi az az x időtartam, hogy az $X > x$ esemény valószínűsége 0.9 ?

8. Eloszlások transzformációi

1. Tegyük fel, hogy egy speciális kemencében a hőmérséklet Celsius fokokban mérve egyenletes eloszlást követ 1000 és 1200 között. Milyen eloszlást követ a hőmérséklet Fahrenheit fokokban? Adja meg a sűrűségfüggvény képletét mindkét esetben! (Mint ismeretes: x Celsius fok $y = \frac{9}{5}x + 32$ Fahrenheit foknak felel meg.)
2. Tegyük fel, hogy X exponenciális eloszlást követ 2.5 paraméterrel. Milyen eloszlású az $Y = 3X$ képlettel értelmezett Y valószínűségi változó? Adja meg Y
 - (a) sűrűségfüggvényének
 - (b) eloszlásfüggvényéneka képletét!
3. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlást követ 12.5 nap várható értékkel. Mostantól számoljuk a napokat, de az alkatrészt csak fél nap múlva kezdjük el használni. Azt az időpontot jelöljük X -szel, amikor az alkatrész elromlik. Adja meg X
 - (a) sűrűségfüggvényének
 - (b) eloszlásfüggvényéneka képletét!
4. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az
 - (a) $Y = 2X$
 - (b) $Y = -2X$
 - (c) $Y = 2X + 3$valószínűségi változó?
5. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az
 - (a) $Y = 20X$
 - (b) $Y = -20X$
 - (c) $Y = 20X + 30$valószínűségi változó?
6. Tegyük fel, hogy X normális eloszlást követ 100 és 10 paraméterekkel. Milyen eloszlást követ az
 - (a) $Y = 20X$
 - (b) $Y = -20X$
 - (c) $Y = 20X + 30$valószínűségi változó?
7. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = \sqrt{x}$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás
 - eloszlásfüggvénye?
 - sűrűségfüggvénye?
8. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás
 - eloszlásfüggvénye?

- sűrűségfüggvénye?
- várható értéke?

9. A standard normális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk.

- eloszlásfüggvénye?
- sűrűségfüggvénye?
- várható értéke?

A kapott eloszlás neve: **elsőrendű khinégyzet eloszlás**. (Figyelem: Az $y = x^2$ függvény $-\infty, 0$ intervallumon csökken, a $0, \infty$ intervallumon nő!)

10. Tegyük fel, hogy egy Y valószínűségi változó sok független 1-közel értékű valószínűségi változó szorzata. Y logaritmusát jelöljük X -szel: $X = \ln(Y)$. Mivel a logaritmus képzése szorzatot összegbe visz, az X valószínűségi változó sok független 0-közel értékű valószínűségi változó összege. Ezért X eloszlást normálisnak vehetjük valamilyen μ, σ paraméterekkel. Mivel $Y = e^X$, az Y eloszlását úgy kaphajuk meg, hogy a normális eloszlást az $y = e^y$ transzformációnak vetjük alá. A transzformációval kapott eloszlás neve: **lognormális eloszlás** μ, σ paraméterekkel. Határozza meg a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

Vetier András – Valószínűesszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi eloszlások

9. Monoton darabokból összetevődő transzformációk (*Extra tananyag*)

Vetier András – Valószínűesszámitás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

10. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése (*Extra tananyag*)

Küzdelem a zavaró fény ellen! Él egy barátom északon, a sarkkörön túl, ott ahol télen mindig sötét van. A házuk előtt világít a fehér hó és egy rosszul elhelyezett utcai lámpa. Barátom kisfia utálja, hogy a lámpa bevilágít a szobájába. Ezért minden délután pontosan 18 órakor (vacsora előtt) – egy jól irányzott lövéssel – megpróbálja csúzlival kilőni. A lámpa magasan van, ezért minden lövése csak 0.01 valószínűséggel talál. A tél legelején egy sötét napon 0 órakor betettek egy új izzót, aminek élettartama exponenciális eloszlást követ 10 hét várható értékkel, vagyis – az időt hetekben mérve – 0.1 paraméterrel. Kérdések:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a fiú az első sikert
 - (a) az első napon elkönnyvelheti magának?
 - (b) a k -ik napon könnyvelheti el magának?
 - (c) az első héten könnyvelheti el magának?
 - (d) a k -ik héten könnyvelhet el magának?
2. Mi a valószínűsége annak, hogy már az első héten
 - (a) az izzót cserélni kell, mert a fiú kilövi?
 - (b) az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?
 - (c) az izzót cserélni kell?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert a fiú kiövi? (Az időt hetekben mérjük. $x > 0$ valós.)
 - (b) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?
 - (c) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell?

11. A főnökök halmaza nem mérhető (*Extra tananyag*)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

12. A nagy számok erős törvénye eseményekre (*Extra tananyag*)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Valószínűesszámitás

4. RÉSZ

Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András

2019. április 29.

Tartalomjegyzék

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók	3
2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás	7
3. Béta eloszlások kétdimenzióban	8
4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke	9
5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára	10
6. Vetület- és feltételes eloszlások	11
7. Transzformáció síkról síkra	13
8. Lineáris transzformáció síkról síkra	14
9. Transzformáció síkról egyenesre	15
10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel	17
11. Normális eloszlások a síkon	18

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az "**Extra feladat**", "**Extra tananyag**" címkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékát emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSc hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhettek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztus 29.

Vetier András

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

1. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$$

- (a) Szemléltesse az eloszlást "festékekkel"!
- (b) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!
- (c) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
- (d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?
- (e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?
- (f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?
- (g) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (h) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (i) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (j) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

2. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c(x + y) \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$$

ahol c egy alkalmas konstans.

- (a) Határozza meg a c konstans értékét!
- (b) Szemléltesse az eloszlást "festékekkel"!
- (c) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!
- (d) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
- (e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?
- (f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?
- (g) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?

3. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c(2x + y) \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$$

ahol c egy alkalmas konstans.

- (a) Határozza meg a c konstans értékét!
- (b) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Számolja ki a $P(Y < 0.1 | X = 0.25)$ feltételes valószínűséget!
- (e) Számolja ki a $P(Y < 0.1 | X = 0.50)$ feltételes valószínűséget!
- (f) Számolja ki a $P(Y < 0.1 | X = 0.75)$ feltételes valószínűséget!
- (g) Számolja ki a $P(Y < 0.1 | X = x)$ feltételes valószínűséget!
- (h) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (i) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (j) Számolja ki a $P(X < 0.1 | Y = 0.25)$ feltételes valószínűséget!
- (k) Számolja ki a $P(X < 0.1 | Y = 0.50)$ feltételes valószínűséget!

(l) Számolja ki a $P(X < 0.1|Y = 0.75)$ feltételes valószínűséget!

(m) Számolja ki a $P(X < 0.1|Y = y)$ feltételes valószínűséget!

Megoldás:

(a) $c = 2$, vagyis $f(x, y) = 2(2x + y) = 4x + 2y$ ($x > 0, y > 0, x + y < 1$)

(b) $f_1(x) = 2x - 3x^2 + 1$ ($0 < x < 1$)

$$F_1(x) = x^2 - x^3 + x \quad (0 < x < 1)$$

(c) $f_{2|1}(y|x) = \frac{4x+2y}{2x-3x^2+1}$ ($0 < x < 1 - y < 1$)

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1} \quad (0 < x < 1 - y < 1)$$

(d) $P(Y < 0.1|X = 0.25) = F_{2|1}(y|x) \Big|_{x=0.25, y=0.1} = 0.080$

(e) $P(Y < 0.1|X = 0.50) = F_{2|1}(y|x) \Big|_{x=0.50, y=0.1} = 0.164$

(f) $P(Y < 0.1|X = 0.75) = F_{2|1}(y|x) \Big|_{x=0.75, y=0.1} = 0.375$

(g) $P(Y < 0.1|X = x) = F_{2|1}(0.1|x) = \frac{0.4x+0.01}{2x-3x^2+1}$ ha $0 < x < 0.9$

$$P(Y < 0.1|X = x) = 1 \quad \text{ha } 0.9 < x < 1$$

(h) $f_2(y) = 2 - 2y$ ($0 < y < 1$)

$$F_2(y) = 2y - y^2 \quad (0 < y < 1)$$

(i) $f_{1|2}(x|y) = \frac{2x+y}{1-y}$ ($0 < y < 1 - x < 1$)

$$F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y} \quad (0 < y < 1 - x < 1)$$

(j) $P(X < 0.1|Y = 0.25) = F_{1|2}(x|y) \Big|_{x=0.1, y=0.25} = 0.047$

(k) $P(X < 0.1|Y = 0.50) = F_{1|2}(x|y) \Big|_{x=0.1, y=0.50} = 0.120$

(l) $P(X < 0.1|Y = 0.75) = F_{1|2}(x|y) \Big|_{x=0.1, y=0.75} = 0.340$

(m) $P(X < 0.1|Y = y) = F_{1|2}(0.1|y) = \frac{0.01+0.1y}{1-y}$ ha $0 < y < 0.9$

$$P(X < 0.1|Y = y) = 1 \quad \text{ha } 0.9 < y < 1$$

4. Reggel taxival megyek az egyetemre. A várakozási időm percekben mérve X . Feltesszük, hogy X exponenciális eloszlást követ $\lambda_1 = 0.1$ paraméterrel. Este taxival megyek haza. A várakozási időm percekben mérve Y . Feltesszük, hogy Y exponenciális eloszlást követ $\lambda_2 = 0.2$ paraméterrel. A két várakozási idő független egymástól.

(a) Határozza meg az $f(x, y)$ síkbeli sűrűségfüggvény képletét!

- (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < 15$?
- (c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < z$?
- (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$?
- (e) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$, feltéve, hogy $X + Y < 15$?

Az alábbi, "pince-világítással kapcsolatos" feladatok egymásra épülnek. A feladat-sorozat lépésről-lépésre vezeteti a gamma eloszlások sűrűségfüggvényeinek a képletét.

5. Másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:

Sötét pincénkben állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzóim. Sajnos csak két izzóm van. Ezeket egymás után fogom használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a második is kiég.

- (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! (Ez a másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a második izzó kiég.)
- (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

6. Harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:

Szomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő gazdagabb, neki három izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a második izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a harmadik is kiég.

- (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! (Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)
- (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! (Ez a harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a harmadik izzó kiég.)
- (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

7. Negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:

Másodszomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még gazdagabb, neki négy izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a harmadik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.

- (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! (Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)
- (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! (Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.)
- (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

8. Ötödrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:

Harmadik szomszédomb pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még a másodszomszédomnál is gazdagabb, neki öt izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a negyedik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az ötödik izzó kiég.

- (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! (Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg, és akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)
- (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! (Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor aaz ötödik izzó kiég.)
- (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

9. n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése a teljes indukció módszerével:

A jó hosszú utcánk végében lakó ember pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Neki – mondjuk – n izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az $(n - 1)$ -edik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az n -edik izzó kiég.

- (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! (Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt a teljes indukció módszerének megfelelően – okosan – vegye fel!
- (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
- (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
- (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! (Ez az n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a n -edik izzó kiég.)
- (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás

1. Egy bolha az origóból indulva a pozitív irányba ugrál. Ugrásainak nagysága független egymástól, és deciméterben mérve egyenletes eloszlást követ 30 és 60 között. Legyen X annak a pontnak a koordinátája, ahova először ugrik, Y pedig annak a pontnak a koordinátája, ahova másodszor ugrik.
 - (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
 - (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
2. Az origó középpontú, egységnyi sugarú körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy (X, Y) pontot.
 - (a) Határozza meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (b) Határozza meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
 - (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
 - (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

3. Béta eloszlások kétdimenzióban

1. Öt jóbarát mindegyike a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Legyen X az az időpont, amikor a már négyen vannak, és legyen Y az az időpont, amikor a már mind az öten ott vannak. Ha van rá lehetősége, szimulálja a jelenséget és a valószínűségi változókat! Az alábbi feladatok megértésében és megoldásában sokat segít, ha érti, látja, hogy mi történik, hogyan dolgozik a véletlen!

- (a) Fókuszáljunk először csak az Y valószínűségi változóra!

- i. Határozza meg az

$$Y < 0.75$$

esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy mindenki odaér háromnegyed egy előtt.)

- ii. Határozza meg Y eloszlásfüggvényének a képletét!

- iii. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

- iv. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

- (b) Fókuszáljunk most csak az X valószínűségi változóra!

- i. Határozza meg az

$$X < 0.25$$

esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt. A binomiális eloszlás képletét összegzésekkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

- ii. Határozza meg X eloszlásfüggvényének a képletét!

- iii. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

- iv. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

- (c) Most foglalkozzunk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval!

- i. Határozza meg az

$$X < 0.25 \text{ és } Y < 0.75$$

esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt, és mindenki odaér háromnegyed egy előtt. A polinomiális eloszlás összegzésekkkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

- ii. Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

- iii. Határozza meg (X, Y) eloszlásfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke

1. Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása táblázattal megadva így fest:

y					
5	0.060	0.120	0.090	0.030	
4	0.080	0.160	0.120	0.040	
3	0.030	0.060	0.045	0.015	
2	0.020	0.040	0.030	0.010	
1	0.010	0.020	0.015	0.005	
	1	2	3	4	x

Határozza meg

- (a) az XY szorzatának,
- (b) az Y/X hányados,
- (c) az X/Y hányados

a várható értékét!

2. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = x + y \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$$

Határozza meg

- (a) az XY szorzatának,
- (b) az Y/X hányados,
- (c) az X/Y hányados

a várható értékét!

3. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 4x + 2y \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$$

Határozza meg

- (a) az XY szorzatának,
- (b) az Y/X hányados,
- (c) az X/Y hányados

a várható értékét!

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

- 1.
- 2.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6. Vetület- és feltételes eloszlások

1. Tekintjük a $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást. Határozza meg

- az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!
- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!

2. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg

- az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!
- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!

3. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg

- az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!

- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
 - (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
 - (b) a feltételes mediánját,
 - (c) a feltételes várható értékét,
 - (d) a feltételes második momentumát,
 - (e) a feltételes varianciáját
 - (f) a feltételes szórását!
4. Kalkulátor vagy a számítógép által előállított 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számokra építve definiáljon olyan kétdimenziós valószínűségi változót, mely az alább megadott eloszlásokat követi. Az eloszlásokat a sűrűségfüggvényükkel adjuk meg:
- (a) $f(x, y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$
 - (b) $f(x, y) = x + y \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$
 - (c) $f(x, y) = 4x + 2y \quad (x > 0, y > 0, x + y < 1)$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A feladatok)

7. Transzformáció síkról síkra

1. Az (x, y) -sík egységnégyzetén vett egyenletes eloszlást transzformáljuk az $u = xy, v = \frac{y}{x}$ transzformációval az (u, v) -síkra.
 - (a) Határozza meg az egységnégyzet képét!
 - (b) Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!
2. Az (x, y) -sík egységnégyzetén tekintjük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$. Az eloszlást az (u, v) -síkra transzformáljuk az $u = xy, v = \frac{y}{x}$ transzformációval. Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

8. Lineáris transzformáció síkról síkra

1. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned}u &= 2x + 3y \\ v &= x + 2y\end{aligned}$$

lineáris transzformációval.

- (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!
- (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!
- (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

2. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned}u &= 2x + 5y \\ v &= x + 2y\end{aligned}$$

lineáris transzformációval.

- (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!
- (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!
- (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

3. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned}u &= 2x + 6y + 10 \\ v &= x + 2y - 5\end{aligned}$$

lineáris transzformációval.

- (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!
- (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!
- (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Transzformáció síkról egyenesre

1. Köralakú céltáblára lövünk. A kör sugara 1 méter. A találat helye egyenletes eloszlást követ a körlapon. A találat helyének távolsága

- a kör középpontjától
- a kör kerületétől

véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

- (a) eloszlásfüggvényét!
- (b) sűrűségfüggvényét!

2. Hatalmas köralakú céltáblára lövünk. A találat helye standard normális eloszlást követ a körlapon. A találat helyének

- a kör középpontjától való távolsága
- a kör középpontjától való távolságának a négyzete

véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

- (a) eloszlásfüggvényét!
- (b) sűrűségfüggvényét!

3. A $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást vejtjük

- (a) az x -tengelyre,
- (b) az y -tengelyre

Milyen eloszlásokat kapunk a tengelyeken?

4. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg

- (a) az x -tengelyre,
- (b) az y -tengelyre

vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

5. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg

- (a) az x -tengelyre,
- (b) az y -tengelyre

vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

6. Tegyük fel, hogy az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x, y) = 4x + 2y$ ($x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$) Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

7. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten egyenletes eloszlást követnek 0 és 1 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

8. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X egyenletes eloszlást követ 0 és 3 között, Y pedig egyenletes eloszlást követ 0 és 5 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

10. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X λ_1 paraméterű, Y pedig λ_2 paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!
11. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3 függetlenek, és mindhárman λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + X_3$ sűrűségfüggvényének a képletét!
12. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3, X_4 függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ sűrűségfüggvényének a képletét!
13. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ sűrűségfüggvényének a képletét!
14. $\sqrt{RND_1} + \sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $2/3z^3$ ha $0 < z < 1$, $-2/3(z^3 - 6z + 4)$ ha $1 < z < 2$
15. $\sqrt{RND_1} + 2 \cdot \sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $z^3/6$ ha $0 < z < 1$, $z/2 - 1/3$ ha $1 < z < 2$, $-z^3/6 + 5z/2 - 3$ ha $2 < z < 3$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel

1. Ha a Hoppantó Bolhának azt mondjuk, hogy "HOPP!", akkor ugrik egy nagyot. Az ugrásának (méterben mért) nagysága véletlentől függ. Ezt a valószínűségi változót X -szel jelöljük. Ebben a feladatban feltesszük, hogy X egyenletes eloszlást követ 4 és 6 között. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy

- az eseteknek kb. a negyedében 4 méternél nagyobb, de 4.5 méternél kisebbet ugrik,
- az eseteknek kb. a negyedében 4.5 méternél nagyobb, de 5 méternél kisebbet ugrik,
- az eseteknek kb. a negyedében 5 méternél nagyobb, de 5.5 méternél kisebbet ugrik,
- az eseteknek kb. a negyedében 5.5 méternél nagyobb, de 6 méternél kisebbet ugrik.

A bolha szeret a véletlennel és a pénzzel játszani. Ha olyan adakozó emberre akad, aki beígéri neki, hogy fizetni fog, és csak úgy kijelent egy c konstans számot is, akkor elkezd ugrálni, és jó sok (mondjuk kb. 100) ugrást végez. A szabályok szerint az adakozó ember minden egyes ugrás után fizet:

- ha $X > c$, akkor $(X - c)$ -szer 10 forintot,
- ha $X < c$, akkor $(c - X)$ -szer 20 forintot.

Ezért a bevállalós ember vesztesége ugrásonként:

- ha $X > c$, akkor $10 \cdot (X - c)$ forint,
- ha $X < c$, akkor $20 \cdot (c - X)$ forint.

Hogyan válassza meg a bevállalós ember a c konstans számot, ha azt akarja, hogy veszteségének ugrásonkénti várható értéke minimális legyen?

2. (Az előző feladat folytatása) Ebben a feladatban a Hoppantó Bolha ugrásának nagysága normális eloszlást követ 5 méter várható értékkel és 1 méter szórással. A kérdés ugyanaz, mint az előző feladatban.

11. Normális eloszlások a síkon

Vetier András – Valószínűesszámitás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)