1. Vizsgazárthelyi 2007 nyár A2

1. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^3 x^3}{x^3 + n^3}\, dx = ?$

2. Számítsa ki Taylor-sor segítségével az $\int_0^1 \sin x^4 \, dx$ integrál értékét 0.01 pontossággal!

3. Legyen $a = (1,1,1)$ és $\mathbf{A}$ az az $\mathbb{R}^3$-on értelmezett lineáris transzformáció, melyre igaz, hogy $\mathbf{A}r = a \times r$ minden $r \in \mathbb{R}^3$. Határozza meg $\mathbf{A}$ mátrixát a szokásos bázisban ($i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$) és adjon meg egy olyan b vektor (ha van ilyen), melyre $a \times b = (1,-2,1)$.

4. Legyen a P a legfeljebb elsőfokú valós együtthatós polinomok euklideszi tere a következő skalárszorzattal: $p \cdot q = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$ és legyen r az azonosan 1 polinom ($r(x) = 1$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$). Határozzuk meg P öszes olyan egységnyi normájú elemét, mely merőleges r-re!

5. Legyen K az egységsugarú origóközéppontú kör x tengely feletti fele. $\iint_K x^4 y \, dx\, dy = ?$

6.

(a) Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ az L lineáris tér tetszőleges lineáris transzformációi és $\mathbf{0}$ a nulla transzormáció ($\mathbf{0}x = 0$ minden $x \in L$-re). Igaz-e

- **(a1)** Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
- **(a2)** Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ invertálhatóak, akkor $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ is az.

(b) Legyen f tetszőleges kétváltozós függvény. Igaz-e

- **(b1)** Ha f vegyes parciálisai léteznek, akkor $f_{xy} = f_{yx}$
- **(b2)** Ha f deriválható, akkor $f_{xy} = f_{yx}$.

(c) Igaz-e, hogy ha az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergenciasugara R, akkor a sor

- **(c1)** konvergens minden a $[-R, R]$-en
- **(c2)** egyenletesen konvergens a $(-R, R)$-en.