2. Vizsgazárthelyi

A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Legyen az e_1 és e_2 egyenesek egyenlete a következő:

$$e_1: \quad x = 4 - 2t, \quad y = -3 + t, \quad z = 3 + t$$
$$e_2: \quad x = 3 + s, \quad y = -1 + s, \quad z = 6 + 4s.$$

Határozza meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza e_1-et és párhuzamos az e_2-vel!

2. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{9n^3 5^n + 3n^5 3^n}{n^9 2^n - 7n^3 5^n} = ?$

3. Legyen $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ minden $x \neq 0$-ra.

(a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = ?$ (b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = ?$

4. Hol deriválható az $f(x) = |x^3|$ függvény és mi a deriváltja ott, ahol deriválható?

5. Legyen $f(x) = x \ln x$ az origón kívül és $f(0) = 1$.

(a) Integrálható-e f a $[0, 1]$ intervallumon?

(b) $\displaystyle\int_1^e x \ln x \, dx = ?$

6. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

(1)

(a) Ha (a_n) konvergens, akkor $({a_n}^n)$ is konvergens.

(b) Ha (a_n) konvergens, akkor $(\sqrt[n]{a_n})$ is konvergens.

(c) Ha $a_n \longrightarrow 1$, akkor ${a_n}^n \longrightarrow 1$.

(d) Ha $a_n \longrightarrow 1$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$.

(2)

(a) Ha egy függvény felveszi minimumát és maximumát egy korlátos intervallumon, akkor folytonos ott.

(b) Ha egy függvény folytonos egy korlátos intervallumon, akkor felveszi minimumát és maximumát ott.

(c) Ha egy függvény nem veszi fel sem minimumát sem maximumát egy korlátos intervallumon, akkor nem korlátos ott.

(d) Ha egy függvény nem korlátos egy korlátos intervallumon, akkor vagy minimumát vagy maximumát nem veszi fel ott.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Legyen az e_1 és e_2 egyenesek egyenlete a következő:

$$e_1: \quad x = 4 - 2t, \quad y = -3 + t, \quad z = 3 + t$$
$$e_2: \quad x = 3 + s, \quad y = -1 + s, \quad z = 6 + 4s.$$

Határozza meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza e_1-et és párhuzamos az e_2-vel!

MO.

A keresett sík egy normálvektora: $(-2, 1, 1) \times (1, 1, 4)] = 3 \cdot (1, 3, -1)$ **4p**

A keresett sík egy pontja pl. az e_1-nek a $t = 0$ paraméteréhez tartozó pontja: $(4, -3, 3)$. **2p**

Ezekkel a sík egyenlete: $(x - 4) + 3(y + 3) - (z - 3) = 0 \rightsquigarrow x + 3y - z = -8$. **4p**

10p

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{9n^3 5^n + 3n^5 3^n}{n^9 2^n - 7n^3 5^n} = ?$

MO. $\dfrac{9n^3 5^n + 3n^5 3^n}{n^9 2^n - 7n^3 5^n} = \dfrac{9 + 3n^2 (3/5)^n}{n^6 (2/5)^n - 7} \longrightarrow -\dfrac{9}{7}$, mert tetsz. $k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$-re $n^k a^n \longrightarrow 0$. **10p**

3. Legyen $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ minden $x \neq 0$-ra. (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ?$

MO.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, mert csendőrelvvel $0 \le |f(x)| \le |x| \longrightarrow 0$ **5p**

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, mert az $x = 1/y$ helyettesítéssel $f(1/y) = \dfrac{\sin y}{y}$, tehát

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{y \to 0+} f(1/y) = \lim_{y \to 0+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$ **5p**

10p

4. Hol deriválható az $f(x) = |x^3|$ függvény és mi a deriváltja ott, ahol deriválható?

MO. Mindenütt, hisz $f(x) = |x^3| = |x|x^2 \rightsquigarrow f(x) = -x^3$ ha $x < 0$, $f(x) = x^3$ ha $x \ge 0$,

így az origó kivételével hatványfüggvény **2p**

és az origóban: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|x^2}{x} = x|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \rightsquigarrow f'(0) = 0$. **4p**

Mindezekkel $f'(x) = -3x^2$ ha $x < 0$, $f'(x) = 3x^2$ ha $x \ge 0$ **2p**

tehát: $f'(x) = 3x|x|$ minden $x \in \mathbb{R}$. **2p**

10p

5. Legyen $f(x) = x \ln x$ az origón kívül és $f(0) = 1$.

(a) Integrálható-e f a $[0, 1]$ intervallumon?

(b) $\displaystyle\int_1^e x \ln x \, dx = ?$

MO.

(a) f az origón kívül folytonos, mert ilyenekből származik folytonosságmegőrző módon, **2p**

továbbá $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$ miatt f korlátos a $[0, 1]$-en $\rightsquigarrow$ f integrálható a $[0, 1]$-en. **2p**

(b) Parciális integrálással:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$ **6p**

10p

Folytatás a következő oldalon.

6.

Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

(1)

(a) Ha (a_n) konvergens $({a_n}^n)$ is konvergens.

(b) Ha (a_n) konvergens $(\sqrt[n]{a_n})$ is konvergens.

(c) Ha $a_n \longrightarrow 1$ akkor ${a_n}^n \longrightarrow 1$.

(d) Ha $a_n \longrightarrow 1$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$.

(2)

(a) Ha egy függvény felveszi minimumát és maximumát egy korlátos intervallumon, akkor folytonos ott.

(b) Ha egy függvény folytonos egy korlátos intervallumon, akkor felveszi minimumát és maximumát ott.

(c) Ha egy függvény nem veszi fel sem minimumát sem maximumát egy korlátos intervallumon, akkor nem korlátos ott.

(d) Ha egy függvény nem korlátos egy korlátos intervallumon, akkor vagy minimumát vagy maximumát nem veszi fel ott.

MO.

(1)

(a) Nem: $a_n = 2$. 1p

(b) Nem: (a_n) az $(1/2^n)$ és az és az $(1/3^n)$ összefésülése. 2p

(c) Nem: $a_n = 1 + 1/n$. 1p

(d) Igen: $(a_n) \longrightarrow 1 \rightsquigarrow$ elég nagy n-ekre $\frac{1}{2} \le a_n \le 2 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow 1 \longleftarrow \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{2} \longrightarrow 1 \rightsquigarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1 \text{ (csendőrelv).}$$ 2p

(2)

(a) nem: $f(x) = \operatorname{sign} x$ a $[-1,1]$-en . 1p

(b) nem: $f(x) = x$ a $(-1,1)$-en. 1p

(c) nem: $f(x) = x$ a $(-1,1)$-en. 1p

(d) igaz, ellenkező esetben az intervallumon: $\min f(x) = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = \max f(x)$. 1p

10p