BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Az elemi sorműveletek

AZ ELEMI LINEÁRIS ALGEBRA SVÁJCI BICSKÁJA

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Az elemi lineáris algebra svájci bicskája = elemi sorműveletek

Tartalomjegyzék

Ismeretek, képességek, célok

- Lineáris kombináció (üres halmazé is)
- Lineáris kapcsolatok, függetlenség, függőség eldöntése
- (Redukált) lépcsős alakra hozás, Gauss(–Jordan)-módszer
- Egyenletrendszer megoldáshalmazának felírása
- Generátorrendszer, bázis, dimenzió kiszámítása
- Kitüntetett alterek: $\mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A})$, $\mathcal{S}(\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$ meghatározása
- A lineáris algebra alaptétele
- A sortérbe eső egyetlen megoldás kiszámítása
- Determináns definíciója és kiszámítása
- Bázisfelbontás, LU-felbontás kiszámítása

Egyenletrendszerek

Egyenletrendszerek

Elemi sorműveletek, lépcsős alak

Elemi sorműveletek

D Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:

- Sorcsere: két sor cseréje
  $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje
- Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal
  cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel, ahol $c \neq 0$
- Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása
  $S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása

D elemi oszlopműveletek: $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$.

? Mire jó?
lépcsős, redukált lépcsős, háromszög-, diagonális alakra hozás; egyenletrendszer, determináns, rang,...

Lépcsős alak

D Egy mátrix lépcsős alakú, ha

1. a 0-sorok (ha vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

P A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lépcsős alak és rang

T Bármely test feletti mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B
1. bal oldali nulloszlopok letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és

   ha nincs több sor, VÉGE,

   ha van, menjünk a 1 pontra.

T Egy mátrix bármely lépcsős alakjában azonos a nemzérus sorok száma.

D E számot a mátrix rangjának nevezzük.

J A rangját $\mathrm{r}(\mathsf{A})$ $(\mathrm{rang}(\mathsf{A}), \mathrm{rank}(\mathsf{A}))$ jelöli

Redukált lépcsős alak (`rref` = reduced row echelon form)

D Egy mátrix redukált lépcsős, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel (vezéregyes);
3. a főoszlopokban a főelemeken kívül minden elem 0;

P A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

m Algoritmus: oszloponként haladva először a vezérelemek alatt, majd csak utána az utolsó oszloppal kezdve és visszafelé haladva fölöttük is eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ mátrixot!

M $\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&2\\0&-4&4\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-1\\0&-4&4\end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2} \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

M2 $\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix} \xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&2&4\end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$

T **A redukált lépcsős alak egyértelmű**

Egy test elemeiből képzett bármely mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

m Programnyelvekben (pl. MATLAB) is `rref()` e függvény neve.

Egyenletrendszerek

Egyenletrendszerek megoldása

Gauss-módszer

D Az egyenletrendszer konzisztens, ha van megoldása, egyébként inkonzisztens.

m A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lin.egy.rsz. megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva). A főoszlopok változói: kötött változók, a többi a szabad. Megoldás visszahelyettesítéssel (backward substitution).

P Oldjuk meg az $\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ y+z&=3 \end{aligned}$ egyenletrsz.-t Gauss-módszerrel!

M Az egy.rsz. bővített mátrixa már lépcsős alakú: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$, így a megoldás visszahelyettesítésekkel megkapható:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Gauss–Jordan-módszer (megoldás rref-ra hozással)

P Oldjuk meg a köv. $\mathbb{F}_7$ fölötti egyenletrendszert (változók x, y, z)!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3, S_4 - S_2]{1/6 S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 - S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - t \\ 5 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{F}_7.$$

A harmadik változó a szabad változó ($z = t$), az első kettő a kötött változó.

- Az egyenletrendszernek 7 megoldása van, mivel az egyetlen paraméter 7 értéket vehet fel.

Gauss–Jordan-módszer – több paraméter

P
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A kötött változók: x_1, x_3, a szabad változók: $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$.

-
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszerek

A megoldások terei

Nulltér

T **Homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza**

Egy n-ismeretlenes $\mathbb{F}$ testbeli együtthatós homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{F}^n$-ben (zárt a vektorok összeadására és skalárral szorzására nézve).

B $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$

D A homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

P Határozzuk meg az $\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ nullteret (ld. előző pl.)

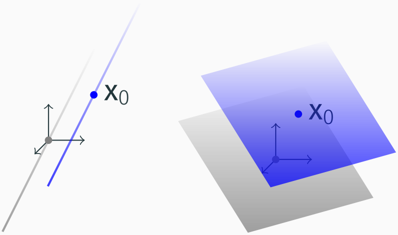
M $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t, u \in \mathbb{R}$$

T

Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

Az inhomogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerre:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén}\\ \text{összes}\\ \text{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egy}\\ \text{tetszőleges}\\ \text{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}\text{ homogén}\\ \text{rész összes}\\ \text{megoldása}\end{array}}$$



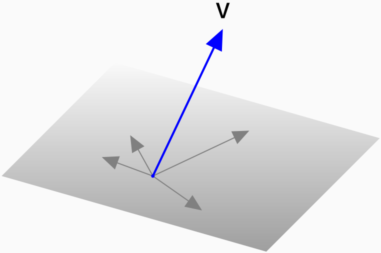
Lineáris függetlenség

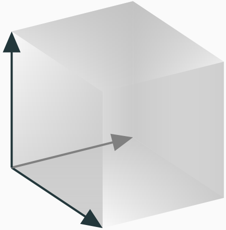
		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{u}_1 + \ldots + t_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$n-2$ független?? egyenlet
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$n-1$ független?? egyenlet
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	n független?? egyenlet

Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}_\mathbb{F}$ lineáris kombinációja $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i$ $(c_i \in \mathbb{F})$.

Az üres vektorhalmaz lin.komb-ja $\mathbf{0}$.





D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független, ha egyik sem áll elő a többi lin.komb-jaként. (egy vektorra is jó: $\{\mathbf{v}\}$ független, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

D Lineárisan függő, ha nem független (van olyan, amelyik előáll)

T $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lin.független $\iff$ $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén áll fenn.

Lineáris függetlenség végtelen sok vektor esetén, bázis

D AMH a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \ldots\}$ véges vagy végtelen vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

D AMH $\mathcal{B}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{B}$-beli lineáris kombinációjaként.

D AMH $\mathcal{B}$ vektorrendszer a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisa, ha

(1) lineárisan független,

(2) generátorrendszer.

T Minden vektortérnek van bázisa.

A zérustéré az üreshalmaz. (Zérustér $= \{\mathbf{0}\}$)

Bázis és dimenzió

Á L! $\mathcal{V}$ vektortér, és $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$. A következők ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ lineárisan független generátorrendszere $\mathcal{V}$-nek (bázis $\mathcal{V}$-ben)
- $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer,
- $\mathcal{B}$ maximális független vektorokrendszer.

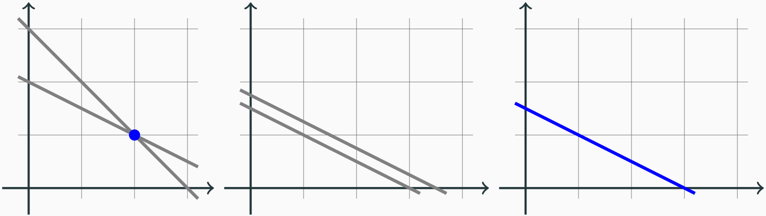
T **Bázistétel**

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

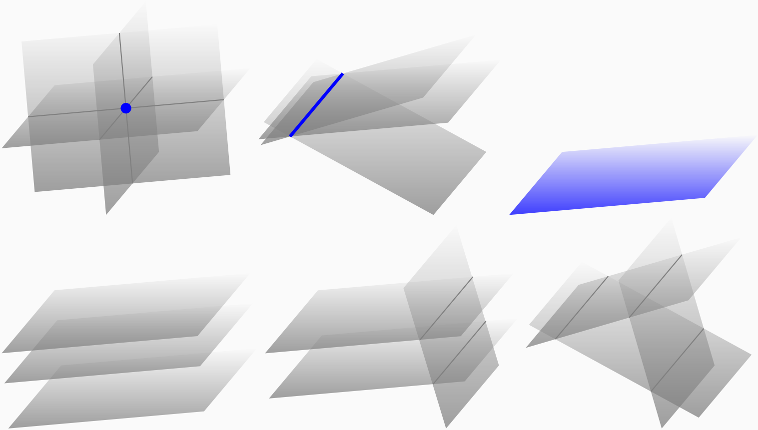
D A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Sormodell: lin. egyenletrendszer mo-a = hipersíkok metszete

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



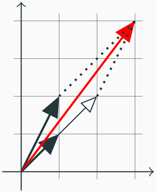
Sormodell 3D-ben

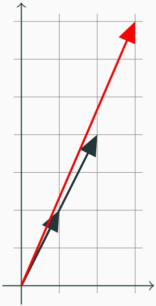


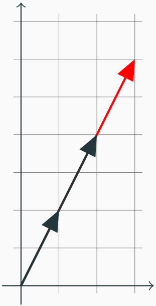
Oszlopmodell: jobb oldal = oszlopvektorok lineáris komb-ja

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$







Kifeszített altér

D a $\mathcal{W} = \{\, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_{\mathbb{F}} : i = 1, 2, \dots \}$ vektorrendszer által kifeszített altér $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ az összes belőlük képzett lineáris kombinációk altere, azaz

$$\left\{ c_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + \ldots + c_{i_k}\mathbf{v}_{i_k} : c_{i_1}, \ldots, c_{i_k} \in \mathbb{F},\ \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k} \in \mathcal{W} \right\}.$$

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) \leqslant \mathcal{V}$, azaz altér.

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ a minimális altér azok között, melyek tartalmazzák a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ vektorokat.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele

D Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

Á Az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix sortere $\mathbb{F}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{F}^m$ altere.

J A sortere: $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vagy $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$, oszloptere: $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ vagy $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$

T **$\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$ feltétel**

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor konzisztens, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként ($\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$). A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

T **Mátrixrangos feltétel**

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor konzisztens, ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja megegyezik, azaz ha $\boxed{\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).}$

A lineáris algebra alaptétele

Sortér és oszloptér változása elemi sorműveletek közben

T **Sortér és oszloptér változása**

Elemi sorműveletek közben a

- sortér nem változik és az
- oszlopvektorok közti lineáris kapcsolatok nem változnak.

K Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lin. kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főoszlopok $\mathbf{B}$-ben és az azonos indexű oszlopok $\mathbf{A}$-ban is lineárisan függetlenek.

Mátrix, rang, dimenzió

Á **Dimenzió $=$ rang**

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$.)

T **Dimenziótétel = rang–nullitási tétel**

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának (= **A** rangjának) és a nulltér dimenziójának (= **A** nullitásának) összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n \qquad (\mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{null}(\mathbf{A}) = n).$$

B kötött változók száma + szabad változók száma = n

Valós mátrixok sor- és nulltere

D Valós vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik, egyet a másik altérből, azok merőlegesek.

D Két altér kiegészítő altér, ha $\mathcal{V}$ bármely vektora egyértelműen előáll az egyik és a másik altérbe eső vektorok összegeként.

D A $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altér merőlegesén a rá merőleges vektorok alterét értjük, jele $\mathcal{W}^\perp$ („W perp").

T **A lineáris algebra alaptétele**

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

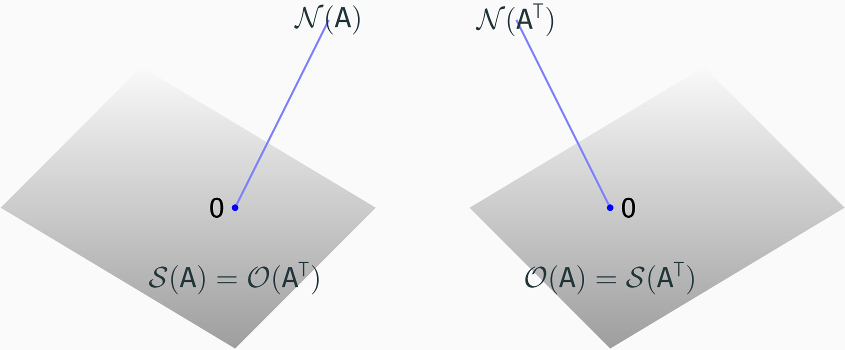
K $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.

K Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

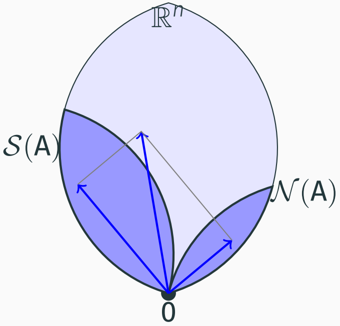
D Az $\mathbf{A}$ mátrix négy kitüntetett altere: $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.

A négy kitüntetett altér

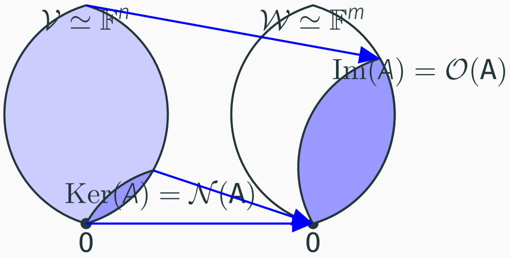
- Az alábbi ábra egy 3×3-as 2-rangú mátrix kitüntetett altereit szemlélteti, de ezzel szemléltethetjük a 4 kitüntetett alteret általában is:



Egy $m \times n$-es mátrix 4 kitüntetett alterének szemléltetése levéldiagrammal:



Lineáris leképezés rangja



D L! $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti vektorterek. A lineáris $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés rangján képterének, nullitásán magterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, $\mathrm{null}(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

T **Dimenziótétel – rang-nullitási tétel lineáris leképezésekre**

Ha $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés, és $\dim \mathcal{V} = n$, akkor

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n \qquad (\mathrm{r}(A) + \mathrm{null}(A) = n)\,.$$

Az elemi sorműveletek alkalmazásai

Az altérbe tartozás vizsgálata

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

M $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K Legyen $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az A együtthatómátrixú homogén lineáris egyrndsz.-nek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- az A lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1,2,3,4)$, $(0,1,0,1)$ és $(1,1,1,0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a hom.lin.egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Altér bázisának meghatározása

P Határozzuk meg az $(1,1,0,-2)$, $(2,3,3,-2)$, $(1,2,3,0)$ és $(1,3,6,2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

2M oszlopvektorokkal a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak felírása (az előbbi bázisban)

P Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Az elemi sorműveletek alkalmazásai

Sortérbe eső egyetlen megoldás

Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

T

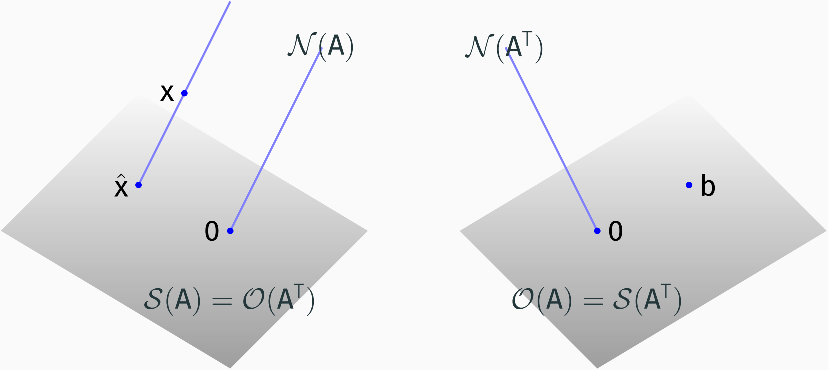
Lineáris egyenletrendszer megoldásai

Minden valós együtthatós konzisztens lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
- a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
- az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

Megoldások és a kitüntetett alterek

- Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = 2$.
- Ekkor $\dim(\mathcal{S}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{A})) = 2$, $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = 3 - 2 = 1$.



A sortérbe eső megoldás meghatározása

P Állítsuk elő a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás segítségével.

$$x + y + z + w = 3$$
$$x + y - z - w = 1$$

M A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - s \\ s \\ 1 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

- A nullteret a $(-1, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, -1, 1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges:

$$\begin{aligned} -x + y \qquad\qquad &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned}$$

- Ezekkel kibővítve az egyenletrendszert, majd megoldva

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

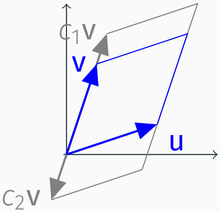
tehát a sortérbe eső mo.: $(1, 1, 1/2, 1/2)$, az összes mo.:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

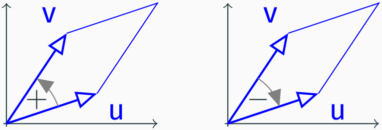
Az elemi sorműveletek alkalmazásai

Determináns

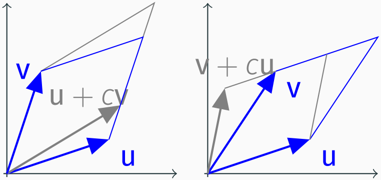
Á $f(c\mathbf{u},\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v})$



Á $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v},\mathbf{u})$



Á $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{v},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+c\mathbf{u})$



D **Determináns (elemi sorműveletekkel)**

Determináns az a test fölötti négyzetes mátrixokon értelmezett skalár értékű függvény, amely

D1 értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,
D2 -1-szeresére változik különböző sorok fölcserélésekor,
D3 nem változik a hozzáadás sorművelete közben,
D4 az egységmátrixhoz 1-et rendel.

m A determináns egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű (integritási tartomány) fölött is definiálható, bár kiszámítása a Gauss-módszerrel nehézségekbe ütközik, mivel az osztás nem mindig végezhető el.

T Test (sőt integritási tartomány) fölötti mátrixra a fenti $D1$–$D4$ feltételeket kielégítő függvény létezik és egyértelmű.

A determináns kiszámítása

m det kiszámítása: elemi sorműveletekkel a determinánst olyan alakra hozzuk, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú.

P Pascal-háromszögből képzett mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Permutáló mátrix determinánsa

D Permutáló mátrix: minden sorában és oszlopában egyetlen 1-es van, a többi elem 0. Kígyó: minden sorában és oszlopában egyetlen olyan elem van, amin kívül minden más elem 0.

D egy permutáló mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ inverzióinak száma például 4.

D Legyen σ az $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja. AMH az $i, j \in X$ elemek inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\sigma(i) > \sigma(j)$.

P A 3241 permutációban 4 inverzió van.

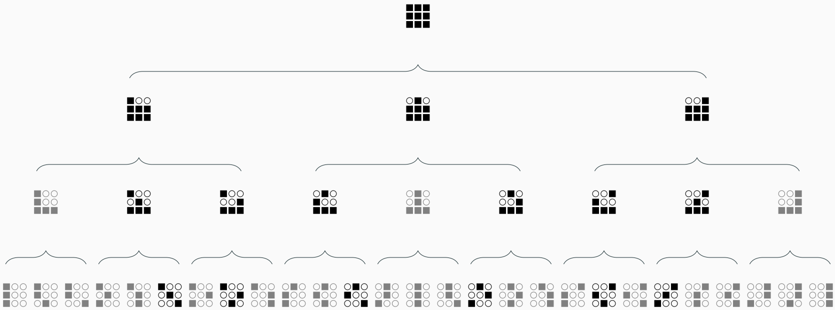
D Egy permutáció páros(ptln), ha inverzióinak száma páros(ptln).

T A permutáló mátrix determinánsa aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan. (Ez megegyezik annak a permutációnak a paritásával, mely az 1-es elemek első indexeit a másodikba viszi.)

Additivitás használata

Mivel $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



T **Tétel**

Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ (ennek értéke $+1$ vagy -1) annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az a_{1j_1}, a_{2j_2},..., a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ permutációján végigfut.

Mátrixfelbontások

Mátrixfelbontások

Bázisfelbontás

Bázisfelbontás

T Jelölje az $\mathsf{A}_{m\times n}$ mátrix

- redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló $r \times n$-es részmátrixát R ($r = \mathrm{r}(\mathsf{A})$),
- az R főoszlopainak megfelelő A-beli oszlopok alkotta $m \times r$-es részmátrixot B.

Ekkor az R mátrix j-edik oszlopa megegyezik az A mátrix j-edik oszlopának a B oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben:

$$\mathsf{A}_{*j} = \mathsf{BR}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathsf{A} = \mathsf{BR}.$$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{a}_5]$

M $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

E mátrix első két sora alkotja az **R** mátrixot, az **A** mátrix első és harmadik oszlopa a **B** mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

m Az $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5)$ térben $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ bázis, melyben

$[\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_5]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \end{bmatrix}$

Mátrixfelbontások

LU-felbontás, PLU-felbontás

LU-felbontás

D $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontás, ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

m nincs mindig: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

m Invertálható mátrixra egyértelmű (ha $\exists$), egyébként nem biztos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, azaz $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ megoldása:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b},\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y},$$

és e két egyenletrendszer visszahelyettesítésekkel megoldható.

m a mátrixinverz is megadható visszahely.-kel az LU-felbontásból

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 1/2 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_{21}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/4 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/2 S_2}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Tehát $\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből $\mathbf{L} = (\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21})^{-1} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1}$.

- Tudva, hogy $S_j - l_{ij}S_i$ inverze $S_j + l_{ij}S_i$, kapjuk hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1}\mathbf{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tehát $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- A fenti példából megsejthető egyszerű számolás általában is igaz. Az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix $a_{11} \neq 0$ elemével elimináljuk az alatta lévőket, azaz elvégezzük az $S_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} S_1$,..., $S_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} S_1$ sorműveleteket. Legyen $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, általában

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \quad m \geq i > j > 0.$$

Az e műveletekhez tartozó elemi mátrixok inverzei

$$\mathbf{E}_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \dots \ \mathbf{E}_{m1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

- Igazolható, hogy ha az első oszloppal kezdve, és oszloponként föntről lefelé haladva végezzük az eliminálást, akkor az elimináló elemi mátrixok szorzatára igaz, hogy $\mathbf{L} = (\mathbf{E}_{21}^{-1}\mathbf{E}_{31}^{-1} \dots \mathbf{E}_{n1}^{-1})(\mathbf{E}_{32}^{-1} \dots \mathbf{E}_{m2}^{-1}) \dots (\mathbf{E}_{m,m-1}^{-1})$ ami megkapható az l_{ij} értékeknek az egységmátrix ij-indexű helyére való beírásával, azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Az LU-felbontás memóriahasználata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 3.50 \end{bmatrix}$$

PLU-felbontás

D $PA = LU$, azaz $A = P^T LU$, P permutáló.

m nem csak négyzet alakúakra értelmezhető

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m A Matlab/Octave programok csak PLU-t számolnak, és mindig az oszlop legnagyobb abszolút értékű elemével eliminálnak a számítási hibák csökkentése érdekében.

m Egyenletrendszer megoldása PLU-val: $Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff Ly = Pb$ és $Ux = y$

PLU

$$
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \to
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \to
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to
\begin{array}{c} 3\\2\\4\\1 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to
\begin{array}{c} 3\\2\\4\\1 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

m Mivel elemi sorműveletekkel bármely test fölötti mátrix lépcsős alakra hozható, ezért PLU-felbontása is létezik. (LU-felbontásban az elemi sorműveletek közül csak a „sor hozzáadása egy alatta lévő sorhoz” művelet volt megengedve.)

Matlab/Octave megoldás az előző feladatra

```
>> A = [
 -1  6  1 -7  4
  1  4  4 -7  5
  4 -8  4  8 -4
  3 -6  8  6 -8 ];

>> [L U P] = lu(A)
L =

    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.25000    1.00000    0.00000    0.00000
    0.75000    0.00000    1.00000    0.00000
   -0.25000    0.66667    0.00000    1.00000

U =

    4   -8    4    8   -4
    0    6    3   -9    6
    0    0    5    0   -5
    0    0    0    1   -1

P =

Permutation Matrix

    0    0    1    0
    0    1    0    0
    0    0    0    1
    1    0    0    0
```