

JÁRATI

ANALÍZIS

1. ELŐADÁS

Metrikus tér

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$$

$$① \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$② \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$③ \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

$$x_n, x \in X \quad x_n \rightarrow x, \text{ ha } \forall \varepsilon > 0 - \text{kor}$$

$$\exists N, \text{ ha } n \geq N, \text{ akkor } d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$x_n \in X \text{ Cauchy-sorozat, ha } \forall \varepsilon > 0 - \text{kor}$$

$$\exists N, \text{ ha } n, m \geq N, \text{ akkor } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \varepsilon$$

Ha az X metrikus térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor X -et teljesnek nevezzük.

($\mathbb{R}, \mathbb{C}$ teljes metrikus terek)

Az X metrikus tér egy K részhalmara compact, ha K minden nyílt bőléséből kioldozható részes.

(vagyis dim. a kompaktos és csak balmozat compactos)

lokális tulajdonság

$\forall x \in X$ - nek van olyan környezete, hogy ott teljesül

Lipschitz-függvény

X, Y metrikus terek

$\rightarrow T$ az X -en értelmezett Y -beli ^{értékű} függvény

egy $T: X \rightarrow Y$ Lipschitz-függvény, ha

$$\text{Lip}(T) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(T(x), T(y))}{d_X(x, y)} \leq L < \infty$$

$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq L \cdot d_X(x, y)$$

sup: pontos felső korlát (legkisebb felső korlát $\text{Lip}(T)$)

$$L < 1$$

Ha $\text{Lip}(T) < 1$, akkor T kontrakció. (összehúzó)

X balmoz, $T: X \rightarrow X$ $x \in X$ a T -nek fixpontja

$$\text{ha } T(x) = x$$

Banach -féle fixponttétel (a tényleg innagála lépés)

Legyen X teljes metrikus tér, $T: X \rightarrow X$ kontrakció.

Ekkor T -nek egy és csak egy fixpontja van.

Biz. $x \in X$ tetszőleges és $x_{n+1} = T(x_n)$ $n=0,1,2,\dots$

Az x_n Cauchy-sorozat: indukcióval.

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0)$$

$$d(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq \alpha \cdot d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ x_{n+2} & & x_{n+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} m \geq n \quad d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\quad + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha \dots$$

x_n konvergens

$x_n \rightarrow x$ x -fixpont

$$d(T(x), x) \leq d(T(x), x_n) + d(x_n, x) \leq$$

$$\leq \alpha \cdot d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ T(x_{n-1}) \end{array}$$

$\Downarrow$

$$d(T(x), x) = 0 \quad T(x) = x \text{ tehát fixpont}$$

Tegyük fel, x, y fixpontok

$$T(x) = x \quad T(y) = y$$

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Megjegyzés: Ha T és S az X balinvariancia
invarianciaval való felcserélhető leképezései

$(T \circ S = S \circ T)$ és T -nek pontosan egy fixpontja
van, akkor az S -nek is fixpontja.

$$T(x) = x \quad S(T(x)) = S(x) = T(S(x)) \quad S(x) = x$$

Belső szorzat ^{tér} ~~ter~~: X lineáris tér K felett

Ha adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in K$ leképezése

$X \times X$ -nek K -ban, úgy, hogy

$$① \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$② \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$③ \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ (konjugált)}$$

$$④ \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{és} \quad 0 \text{ ha } x = 0, \text{ ellen}$$

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy belső szorzat tér

Példák K^n -ben

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \leftarrow \text{norma}$$

$$\text{C-S-B: } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Banach-tér: teljes normált tér

Hilbert-tér: teljes belső szorzatú tér

Példák: X ~~reális~~ ^{reális} tér, Y normált tér

$B(X, Y)$ az X -en értelmezett Y -beli értéket
vállaló folytonos függvények halmaza.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad \text{egy norma } B(X, Y) \text{-on}$$

amiből az egyenletes konvergencia származik.

Ha Y Banach-tér, akkor $B(X, Y)$ is.

$L^2(X)$ -tér Legyen $X \subset \mathbb{R}^2$ és

~~§§~~ $f: X \rightarrow K$ és tegyük fel, hogy

f abszolút integrálható $\neq$ minden $X \cap [-1, 1]^2$

halmazra.

(f és $|f|$ is integrálható)

($\operatorname{Re}(f)$ és $\operatorname{Im}(f)$ is absz. int.)

$$L^2(X) := \{ f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid \dots, \int |f|^2 < \infty \}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} \quad L^2(X) \text{ is Hilbert-} \text{tr}$$

$\mathbb{R}^n$ -tér $X \subset \mathbb{R}^k$ (mértékter)

mértékter (vagy nem olyan fontos)

$$1 \leq p \leq \infty$$

$f: X \rightarrow \mathbb{K}$ (valós v. komplexen ért.)

$X \cap [-c, c]^k \leftarrow$ a k -adik határ.
egy origó közepű kör

ilyen halmazon abszolút integrálható f.

Az f az $L^p(X)$ tér eleme, ha

$$\int_X |f|^p < \infty.$$

ilyen f. -ek halmazát jelöljük $L^p(X)$ -el

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}$$

- azaz a f. ~~ek~~ normát elvettük a
L^p-norma értelmezés
eredménye (megért)

Az $L^p(X)$ -ből nem lesz ki a
skalárral való szorzás, nem lesz ki a
konjugált képzés és az abszolút sem.

$$|f+g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}$$

$$|f+g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

integrálva jobboldal. mégis itt van!

$p = \infty$ esetén is akarunk definiálni egy $\|f\|$ -t

$L^\infty(X)$ álljon az olyan $X \cap [-c, c]^k$ -on
abszolút integrálható ($\forall c > 0$)
függvényekből, amelyekre

$\exists r > 0$ valós szám $\nearrow$ alkalom. r -t vett.
az $|f(x)|$ mind r
nulla halmaz

$$\{x \in \mathbb{R}^k : |f(x)| \geq r\} \text{ nulla halmaz}$$

Legyen egy ilyen f függvény az

$\|f\|_\infty$ az ilyen r -ek infimuma

$$\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \text{ nulla halmaz}$$

$$\|f\|_\infty \geq 0 \text{ és}$$

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ akkor és csak akkor ha } f = 0$$

hiszen egy nulla halmazt

~~ezt~~ (ennek azt próbált mondani, hogy
majdnem mindenütt)

Minkowski - egyenlőtlenség

Teljesül a háromszögegyenlőtlenség a
 $\| \cdot \|_p$ -ra

Az L^p -tér egy normáltér.

Riesz - Fischer - tétel

$L^p(X)$ tér teljes

$$f, g \in L^2(X)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g}$$

innen definiert

Herz. skalar

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_X f \bar{f} \right)^{1/2}$$

norma

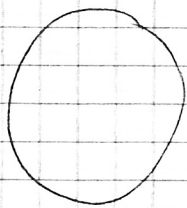
$\underbrace{\quad}_{\|f\|^2}$

→ ez egy Herz. skalar tér: Hilbert-tér

Fixpont tulajdonság:

Az X metrikus tér fixpont tulajdonságú, ha X bármely címragóra való folytonos leképezésének van fixpontja

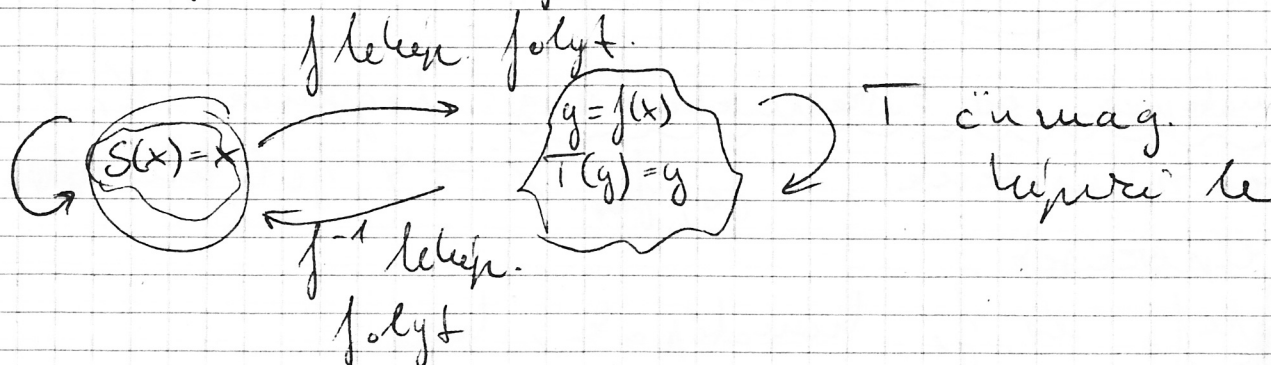
pl: a szöveg



fixpont
tulajd.



nem fixpont
tulajdonságú



folytonos leképezések nem voltak a fixpont tulajdonságú

Def. Retraktum: Egy X metrikus tér egy

Y részhalma az X retraktuma,

ha van olyan folytonos leképezés

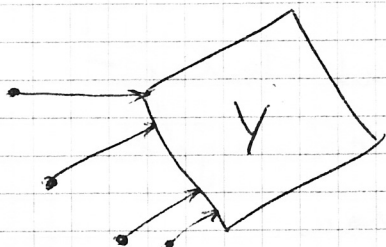
X -nek Y -ra, amely Y -on identikus

↓
az nem csíndt
semmi

feltét lehet egy nem üres konvex

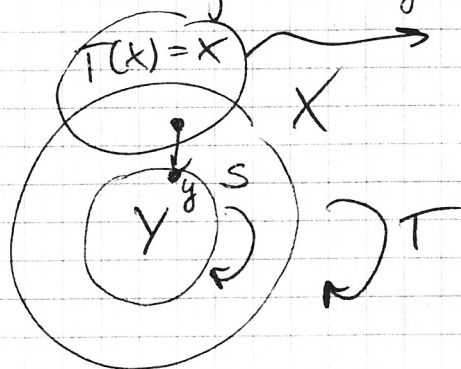
észt részhalma retraktuma

Az azt konvex halmaz legkisebbi
pontját minden x hozza a
pontokhoz



Tétel: Ha X fixpont tulajdonságú és
 Y az X retraktuma, akkor Y -is
fixpont tulajdonságú

az egy fixpont



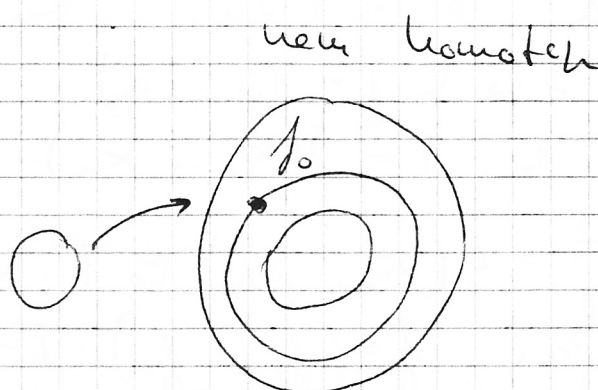
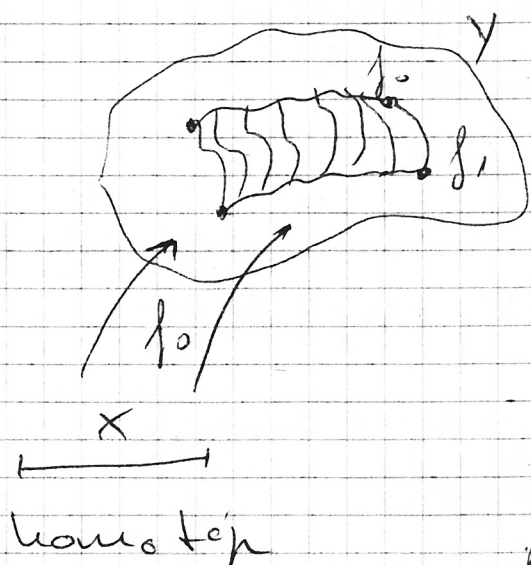
$$T \circ T = T$$

Homotópia és összehúzhatóság: Legyenek X, Y
metrikus terek, $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ folytonos
leképezések.

~~Az~~ f_0 és f_1 homotópák, ha

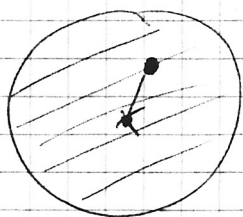
$$\exists F: X \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ -hoz}$$

hogyan $F(x, 0) = f_0(x)$ az egy leképezés a más folytonos
 és $F(x, 1) = f_1(x)$ a más folytonos.

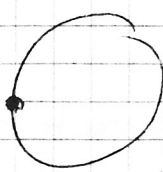


lyukak halmozása,
 egy pont görbét nem
 tudok átdeformálni

Az X metrikus tér összehúzható, ha
 az identikus leképezés homotóp egy
 konstans leképezéssel



összehúzható
 egy pontba



nem összehúzható
 egy pontba

Tétel: Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a
 n -dimenziós gömb felületének

S^n az n -dimenziós
 gömb felület

1, S^{n-1} nem összehúzható

↳ n -dimenziós gömb felület
 (egys. sugarú és origó középpontú)

2, S^{n-1} nem rektuma

B^n -nek
 ↳ n -dimenziós gömb

(a leíró pont nem tudunk polynomosan
reprezentálni a halmazokat)

3, Az $\mathbb{R}^n$ bármely X nem üres konvex kompakt
részhalmaza felpont tulajdonságú
(Brauer-féle felponttétel)

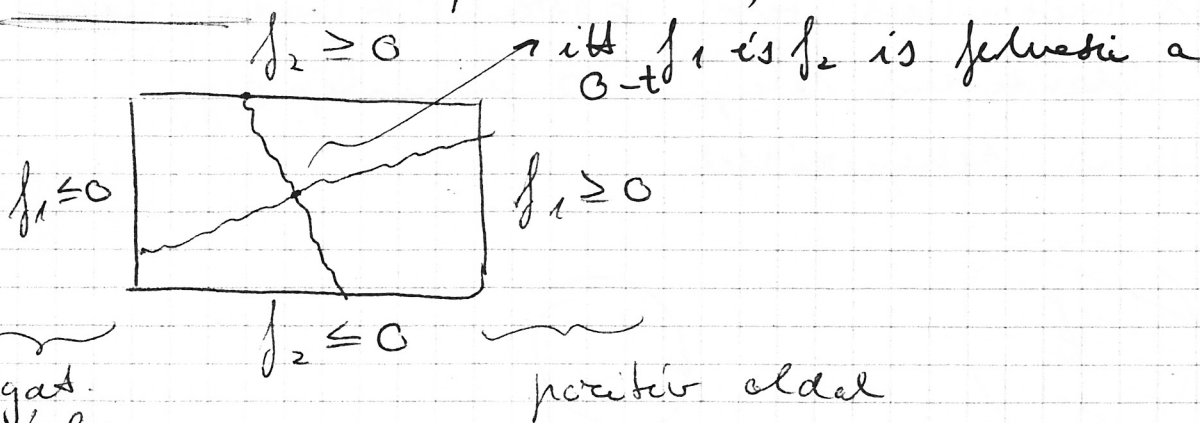
4, Ha $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
 $r_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$)
és a $T = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_j - a_j| \leq r_j\}$

$\rightarrow T_j^\pm = \{(x_1, \dots, x_n) \in T : x_j - a_j = \pm r_j\}$

lapjai $f = (f_1, \dots, f_n) : T \rightarrow \mathbb{R}^n$

folymos $f_1 = r_1$ ha $f_j \geq 0$ a $T_j^\pm$ -on,
akkor f a T -n felveszi a 0-t
értékűt

(Miranda-féle leíró tétel)



Mindig igaz.

Schauder második felponttétel

Legyen C az X normáltérben egy
nem üres konvex részhalmaza. Legyen egy leíró

$\mathbb{R}$ a C egy folytonos leképezése egy
 $K \subset C$ kompakt halmazban. Ekkor T -nek
van felpontja

Általánosítás: Schauder első fixponttétel
 Egy X normált és egy nemüres kompakt
 konvex részhalmaza fixpont tulajdonságú.

Általánosított inverz:

X és Y véges dimenziós belső szorzat
 terek, $A: X \rightarrow Y$ lineáris leképezés

$$Ax = b$$

$\|Ax - b\|^2 \rightarrow$ minimális $\Rightarrow$ legyen L
 Mindig megoldható

$$\|Ax - b\|^2 = L, \quad \|x\|^2 \rightarrow \text{minim. keres.}$$

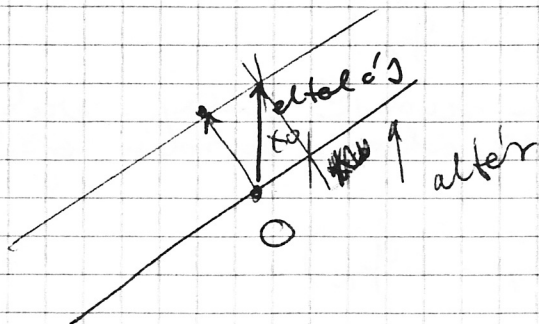
minimális hosszú vektor

Ez megoldható és egyértelmű
 $\rightarrow$ az értéktérre v. képre

$\text{Im}(A)$ lineáris és leképezik $y: \|y - b\| \rightarrow \min$

$Ax = y$ megold. a min. normájú l. l.

$$\text{ker}(A) + x_0 = A^{-1}(y) \quad x_0 \in A^{-1}(y)$$



b -re a megoldás x_0

$A b \rightarrow x_0$ leképezést A^+ -al

jelöljük, ez az A általánosított inverze

Tykhonov regularizáció ^{nyíltan nem lehet} mint a pseudo inverz
Adott $C > 0$ konstansal felírjuk a

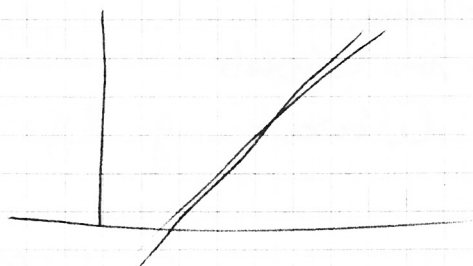
$$\|A_\sigma x - b_\sigma\|^2 + \sigma \|Tx\|^2 \rightarrow \min$$

ahol $\sigma > 0$, $\|b - b_\sigma\| \leq \sigma$
 $\|Pb - P_\sigma b_\sigma\| \leq C\sigma$

és T Tykhonov operátor ~~leggyakorlatibb~~
~~leggyakorlatibb~~ $T = \Pi x$; itt P az $\text{im}(A)$ -ra
 P_σ analóg az $\text{im}(A_\sigma)$ -ra való
 merőleges vetítés

Mi $\sigma \rightarrow 0$ tart akkor az itteni
 megold. tart az ered. probl. megold.

pl.: 2 egyenes metszésp. hisz megvan



2011.11.03

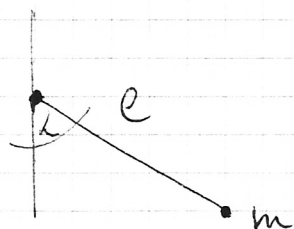
Variációszámítás

(dimenziós)

$\rightarrow$ integr. változó skalar

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

$\rightarrow$ a rendszer állapot. érték
 az által. koordin. együttes



$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$t_1 \rightarrow$ Lagrange f.

$$\int_{t_0} L(t, q, \dot{q}) dt = S(q) \rightarrow \text{minimális (lokálisan)}$$

$\uparrow$
hatás

$$L = T - U$$

↑
mozgási energia

↑
helyzeti energia

↓
Ritki lá

↑
mozgási energia

↑
Árnyékolás

Euler - Lagrange - d.e.

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$$

~~$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q})$$~~

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}} - L_q = 0 \quad p = L_{\dot{q}} \quad \dot{p} = L_q$$

$$\frac{d}{dt} (L_{\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t))) = L_q(t, q(t), \dot{q}(t))$$

↑
 $L_{\dot{q}}$ szerinti
deriváltja

- ahány által. volt, annyi differenciál egyenlet

• Egydimenziós probléma

$t \rightarrow x(t)$ ismeretlen f. $u, m \in \mathbb{N}^+$, $G \subset \mathbb{R}$
nemüres, ~~nyílt~~ nyílt intervallum

M megengedett függvények osztálya,
azon f. halmaza amelyekre az

$$x \in C^m(G, \mathbb{R}^n)$$

$$S(x) = \int L(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(u)}(t)) dt$$

értelmezve van, ahol az L egy

Q nyílt reál mazon értelmezett

~~Helyettesítés~~