

Bilicz Sándor

bilicz@cut.bme.hu V2 III. em 336

Fogadóóra hétfő 13¹⁵ - 14¹⁵

463-2723

Aláírási feltételek

• 3 db készlet

2 legjobb átlaga > 2

• 2 db HF

Vizsga

• írásbeli:

30 -ból

14,5 -től

2-es

→ szóbeli

Felhasználható irodalom

TK: Fodor György: Hálózatok és Rendszerek (55064)

Példat. Villamosságban példatár (Fodor) (44555)

A) Folytonos idejű (FI) rendszerek (4 hét)

B) Diszkrét idejű (DI) rendszerek (6 hét)

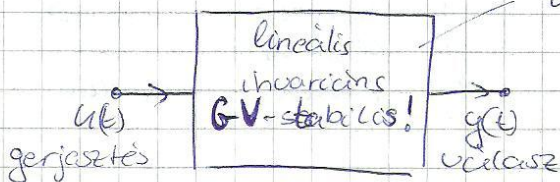
C) Kapcsolatok a FI és DI rendszerek között (2 hét)

D) Moduláció (utolsó 2 hét)

A) I. 1. a, z

A) Folytonos idejű (FI) rendszerek

Ismerős (IR1)



amennyiben ez igaz akkor a válasz hasonló alakú lesz a gerjesztéshez

- más amplitúdó ill.

kezdőfázis

- DE azonos körfrekvencia

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

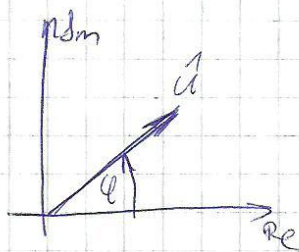
$$y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

amplitúdó ↑
körfrekvencia

↑ kezdőfázis

$$u(t) \Leftrightarrow \bar{u} = \hat{u} e^{j\varphi}$$

komplex fázor



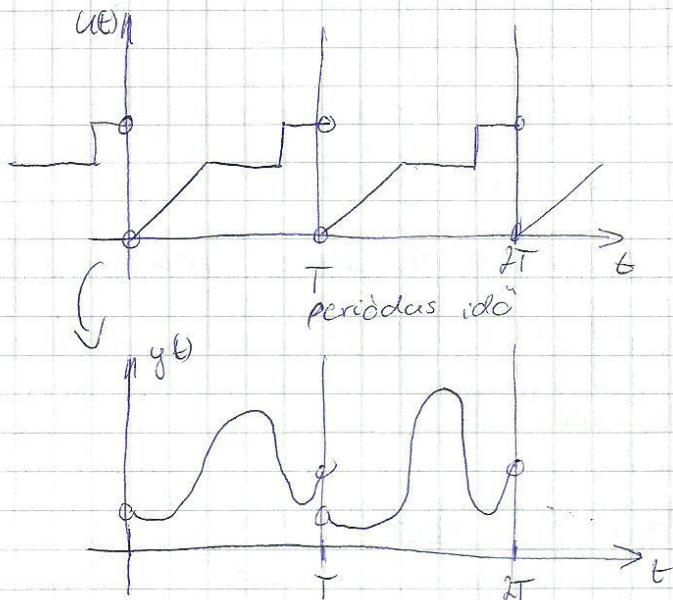
$$u(t) = \text{Re} \left\{ \underbrace{\hat{u} \cdot e^{j\varphi}}_{\text{komplex időfüggvény}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{valós időfüggvény}} \right\}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \bar{H} \quad \text{átviteli tényező}$$

$$\xrightarrow{\omega\text{-tól függ}} H(j\omega) \quad \text{átviteli karakterisztika}$$

I. Periodikus állandósult állapot

- tisztán szinuszos gerj. $\rightarrow$ tisztán szinuszos válasz
- általános periodikus gerj. $\rightarrow$ period. válasz (alakját nem tudjuk)



$$u(t) \equiv u(t + kT)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

alapkör frekvencia

1.) Fourier - sor

a) alapgondolat

periodikus jel = szinuszos jelek összege

$$u(t) \approx u_N(t) = \underbrace{U_0}_{\text{Fourier-együttható}} + \sum_{p=1}^N \left[\underbrace{U_p^A}_{\text{Fourier-együttható}} \cdot \cos(p\omega t) + \underbrace{U_p^B}_{\text{Fourier-együttható}} \cdot \sin(p\omega t) \right]$$

N-ed rendű Fourier - polinom

Fourier-együtthatók

U_0 : állandó összetevő
 U_p : harmonikus összetevők
 ω : alapharmónikus
 $p\omega$: p-edik harmonikus

b) Együtthatók megválasztása

cél: $E_N = \frac{1}{T} \int_0^T (u(t) - u_N(t))^2 dt$

közelítő
hibája

négyzetes középhiba

~~energia~~ (energia-norma)

E_N minimális

Optimális választás:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (\text{középérték})$$

$$U_p^A = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos(p\omega t) dt$$

$$U_p^B = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin(p\omega t) dt$$

c) Fourier-sor alakjai $(N \rightarrow \infty)$

• valós alak: $u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [U_p^A \cos(p\omega t) + U_p^B \sin(p\omega t)]$

• mérnöki valós alak: $u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$

$$U_p = \sqrt{(U_p^A)^2 + (U_p^B)^2} \quad \varphi_p = -\arctg\left(\frac{U_p^B}{U_p^A}\right)$$

• komplex alak: $u(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} U_p^C e^{jp\omega t}$

"-p" és "+p" - komplex konjugátum } így lesz valós

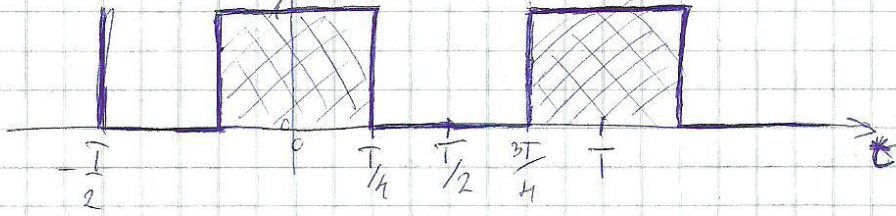
$$U_p^C = (U_{-p}^C)^* \quad \checkmark$$

$$U_p^C = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot e^{-jp\omega t} dt$$

d) példák:

$u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{ezen kívül} \end{cases}$$



$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$U_p^A = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos(p\omega t) \cdot dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1 \cdot \cos(p\omega t) dt =$$

$$\frac{2}{T} \left[\frac{\sin(p\omega t)}{p\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{1}{p\pi} \left[\sin\left(p \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(p \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{T}{4}\right)\right) \right]$$

$$p = 1, 5, 9, \dots \quad U_p^A = \frac{2}{p\pi}$$

$$p = 3, 7, 11, \dots \quad U_p^A = -\frac{2}{p\pi}$$

$$p = 2, 4, 6, \dots \quad U_p^A = 0$$

$$U_p^B = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin(p\omega t) dt = 0$$

szinusz páratlan f.

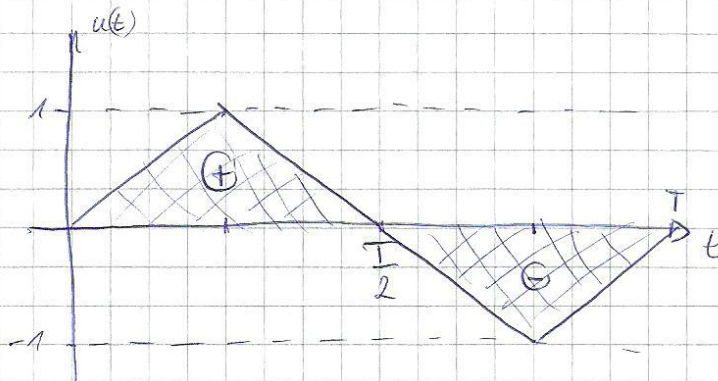
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1} \cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \dots \right]$$

Megjegyzés: ha $u(t)$ páros $\rightarrow U_p^B \equiv 0 \quad \forall p$

ha $u(t)$ páratlan $\rightarrow U_p^A \equiv 0 \quad \forall p$

$U_p \sim \frac{1}{p}$ nem folytonos $u(t) \rightarrow$ lassan csökken

3)



$$U_0 = 0$$

$$U_p = 0$$

párosan fo!

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1} \sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega t) - \dots \right]$$

$$U_p \sim \frac{1}{p^2} \quad \text{folytonos } u(t)$$

általában:

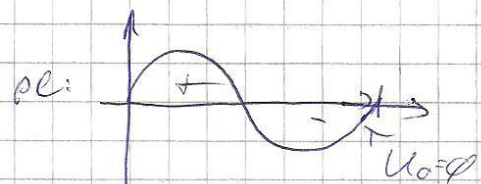
$u(t)$ m-szer folytonosan differenciálható

$$U_p \sim \frac{1}{p^{m+2}}$$

2. Periodikus jelek jellemzői

a) egyszerű középérték

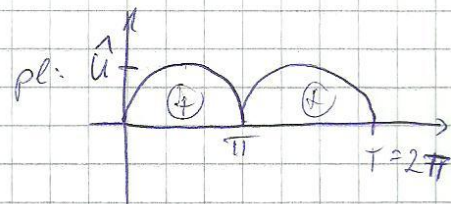
$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$



b) abszolút középérték

$$U_a = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

$$U_a = \frac{2}{\pi} \cdot U$$

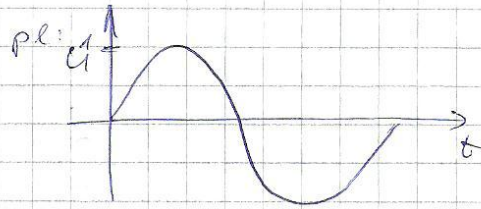


c) négyzetes közép (effektív)

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

c) effektív-érték

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$



$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \sin^2(\omega t) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

d) alaktényező

• forma ~ $k_f = \frac{U_{\text{eff}}}{U_a}$ - abszolút középérték

p.e. szinusz jelre

$$k_f = \frac{\frac{U}{\sqrt{2}}}{U \cdot \frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

• csúcs ~ $k_m = \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{eff}}}$

e) jellemzők a Fourier-sorból

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cdot \cos(p\omega t + \varphi_p) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- egyszerű közép: U_0

- effektív érték: $U_{\text{eff}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p^2}$

Biz. alapgondolata

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega t + \varphi_p) \cdot \cos(q\omega t + \varphi_q) dt \stackrel{(*)}{=}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{cases} \cos(\varphi_p) - \cos(\varphi_q) & p=q=0 \\ 1/2 & p=q \neq 0 \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

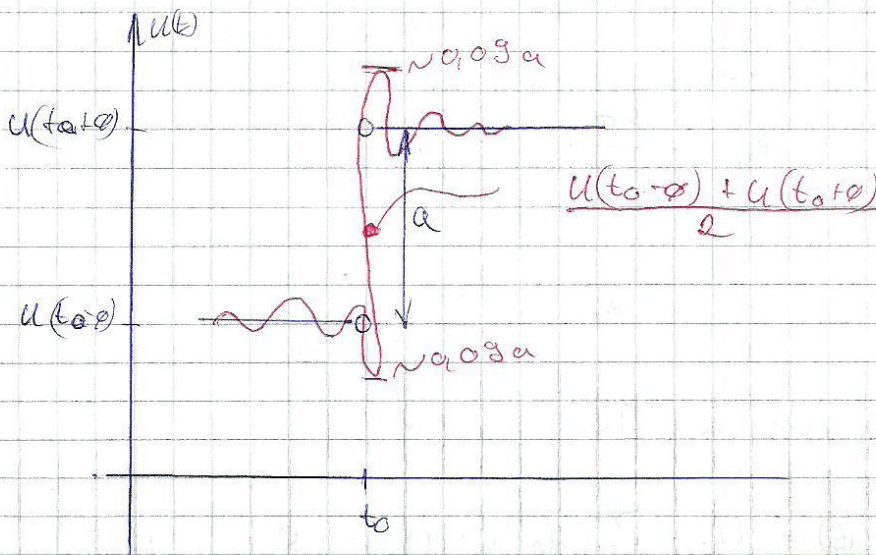
- torzítási tényező

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U_{eff}} \quad \text{felharmónikusok}$$

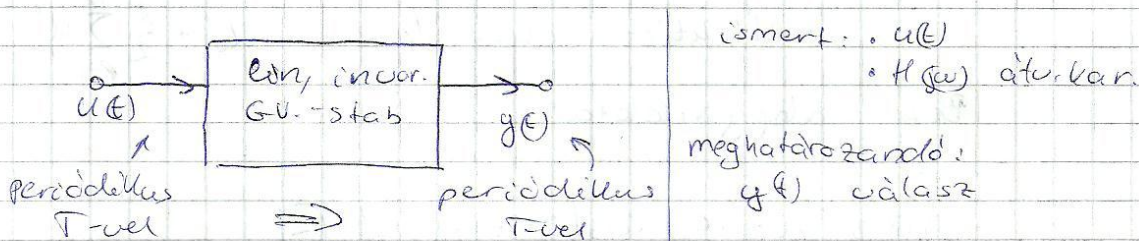
$\Rightarrow$
teljes jel

$$U_p^A = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(p\omega t) dt \approx \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{99} u(t_n) \cos(p\omega t_n) \Delta t_n$$

GLBB - jelenség (téllice's: nem lesz kisebb, mint a céges ugrás 9%-a)



3. Rendszer ~~száraz~~ analízis Fourier-sorral



a) az "algoritmus"

① $u(t)$ Fourier-sorral polinóm

$$u(t) \approx U_0 + \sum_{p=1}^N U_p \cos(p\omega t + \phi_p) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

(2) $H(j\omega)$ Kiértékelése

$$H(j\omega) \quad \omega = 0, \omega, 2\omega, 3\omega, \dots, N\omega$$

(3)
$$\bar{Y}_p = \underbrace{\bar{U}_p}_{U_p e^{js_p}} H(jp\omega)$$

$$Y_p e^{js_p}$$

(4)
$$y(t) \approx Y_0 + \sum_{p=1}^N Y_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

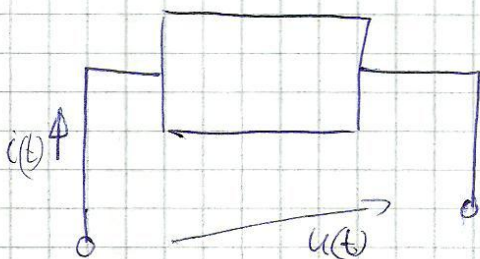
Szuperpozíció (linearitás miatt)

b)

p	U_p	S_p	$H(jp\omega)$	$\text{arc}(H(jp\omega))$	Y_p	φ_p
0	U_0	$\varnothing$	H_0	$\varnothing$	$U_0 H_0$	$\varnothing + \varnothing$
1	U_1	S_1	H_1	α_1	$U_1 H_1$	$S_1 + \alpha_1$
2	U_2	S_2	H_2	α_2	$U_2 H_2$	$S_2 + \alpha_2$
$\vdots$						

$A e^{j\alpha} \cdot B e^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$

4. Teljesítmények kiszámítása



$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega t + S_p)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{p=1}^{\infty} I_p \cos(p\omega t + S_p - \varphi_p)$$

fáziskülönbség

a) pillanatnyi teljesítmény

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_0 I_0 + U_0 \sum_{p=1}^{\infty} I_p \cdot \cos(p\omega t + \varphi_p - \varphi_p) \quad (*)$$

$$(*) \quad I_0 \sum_{p=1}^{\infty} U_p \cos(p\omega t + \varphi_p) + \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_p I_q \cos(p\omega t + \varphi_p)}_{\cos(q\omega t + \varphi_q - \varphi_q)} \quad (*)$$

b) hatásos teljesítmény

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (\text{középérték})$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0 \quad (1 \text{ periódusra vett középérték})$$

$$\int_0^T \cos(p\omega t + \sigma) dt = 0 \quad p=1, 2, 3, \dots \quad \sigma - \text{tetszőleges kezdőérték}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega t + \sigma_p) \cdot \cos(q\omega t + \sigma_q) dt = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ \frac{1}{2} & p = q \end{cases}$$

$$(*) \quad \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \frac{1}{T} \int_0^T \cos(p\omega t + \varphi_p) \cdot \cos(p\omega t - \varphi_p) dt \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \cos \varphi_p$$

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} U_p I_p \cos \varphi_p$$

A/II. Analízis a frekvenciatarományban

-általános időfüggés $\rightarrow$ diff. egyenlet

$\hookrightarrow$ fázor
 $\hookrightarrow$ Fourier-sz. fázor
 $\hookrightarrow$ Fourier-transzformáció

algebrai egyenlet

1) Fourier-transzformáció

a) alapgondolat, def.

-periodikus jel T -vel

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c \cdot e^{j\omega_p t} \quad \left(\omega_p = \frac{2\pi}{T}\right), \quad X_p^c = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_p t} dt$$

-aperiodikus jelekre $T \rightarrow \infty$ $\omega_1 \rightarrow 0$

legyen: $X(j\omega_p) \triangleq T X_p^c = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_p t} dt$

akkor: $x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{X(j\omega_p)}{T} \cdot e^{j\omega_p t}$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j\omega_p) e^{j\omega_p t} \quad \left| \omega_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{X(j\omega)}^{x(t) \text{ spektruma}} e^{j\omega t} d\omega \right|$$

Inverz Fourier-transzformáció

Jelölés: $x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(j\omega)\}$

Jelölés

ω körfrek. elemi összetevő:

$$dx(t) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega$$

a) spektrum számítása

- ha $x(t)$ absz. integrálható: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier - transzformáció

Jelölés: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

- egyébként: ???

b) a transzformáció tételei

a) lineáris

$$\mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

b) $x(t)$ valós $\Leftrightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ bővebbmennyben: $|X(j\omega)|$ páros fu. $\arg X(j\omega)$ páratlan fu.c) $x(t)$ valós, páros

$$X(j\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right\} \text{ valós}$$

 $x(t)$ valós, páratlan

$$X(j\omega) = 2j \cdot \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\} \text{ képzetes}$$

d) eltolási tétel $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

$$\mathcal{F}\{x(t-T)\} = X(j\omega) \cdot e^{-j\omega T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\underbrace{t-T}_u) \cdot e^{j\omega \underbrace{t}_u} du = e^{j\omega T} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot e^{-j\omega u} du}_{X(j\omega)}$$

e) Modulációs tétel

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega - \omega_0))$$

előző dualisa

f) skálázási tétel

$$\mathcal{F}\left\{x\left(\frac{t}{m}\right)\right\} = \frac{1}{m} X\left(j\frac{\omega}{m}\right)$$

$m > 1$: $x(t)$ keskenyedik, $X(j\omega)$ szélesedik

$m < 1$: $x(t)$ szélesedik, $X(j\omega)$ keskenyedik

g) derivált - tétel ($\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$)

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega X(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt &= \left[x(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} (-j\omega) dt = \\ &= \cancel{x(t) e^{-j\omega t}}_{\emptyset} - \cancel{x(t) e^{-j\omega t}}_{\emptyset} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \underbrace{j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(j\omega)} \end{aligned}$$

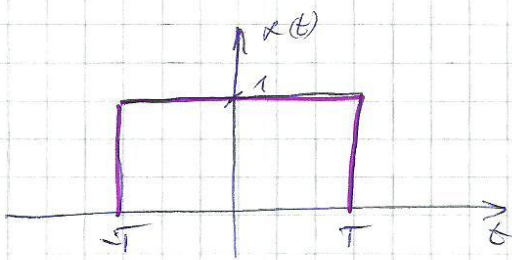
h) konvolúció - tétel

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} = \underbrace{\mathcal{F}\{h(t)\}}_{H(j\omega)} \underbrace{\mathcal{F}\{u(t)\}}_{U(j\omega)} = Y(j\omega)$$

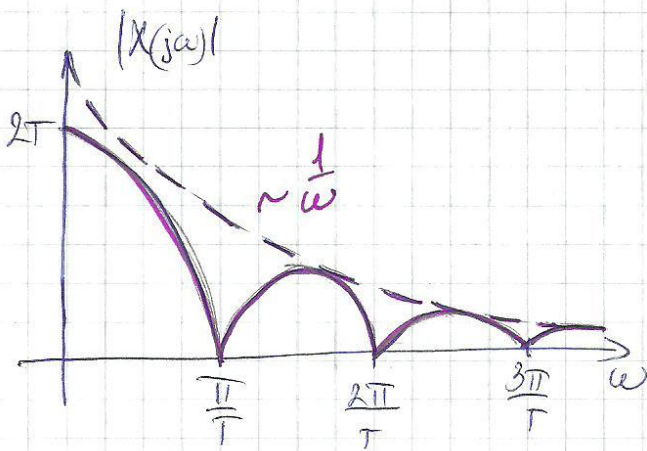
c) példák - elemi jelek spektruma

d) négyzetimpulzus



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T = 2 \cdot \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j\omega} = 2 \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega}$$

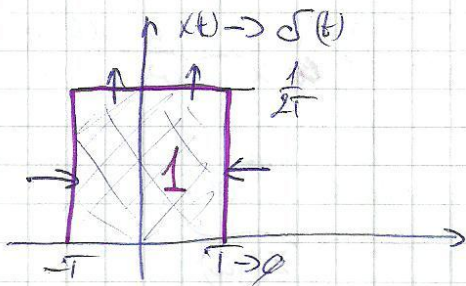


$$2 \frac{\sin \omega T}{\omega} = 2T \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$



b) Dirac-Impuls

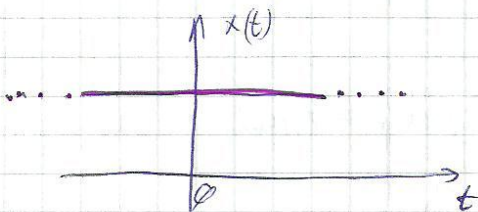


$$X(j\omega) \rightarrow 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1$$

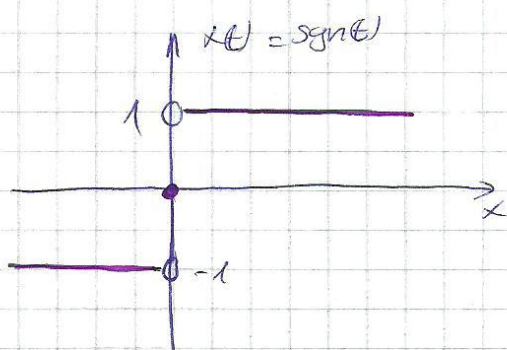
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

7) Korlātes jee:



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

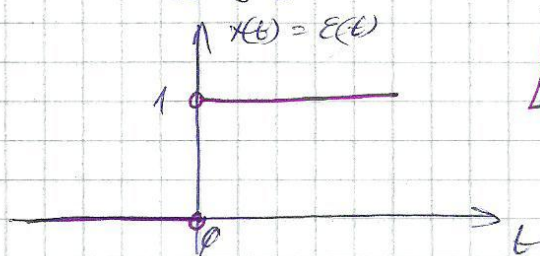
5) előjel fu. : $\text{sgn}(t)$



belátható

$$X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

6) egységugrás : $\varepsilon(t)$

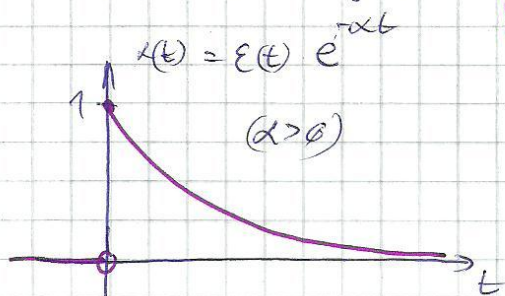


$$F\{\varepsilon(t)\} = F\left\{\frac{\text{sgn}(t) + 1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} F\{\text{sgn}(t)\} + F\left\{\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

7) exponenciális jelek

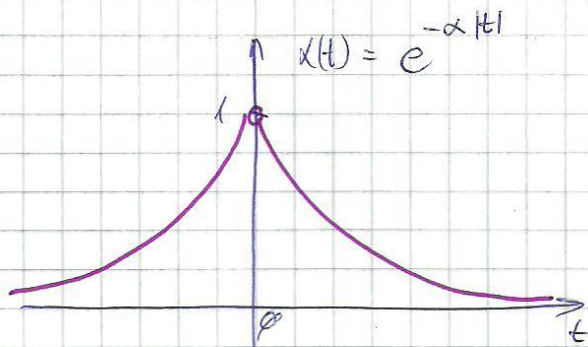


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt =$$

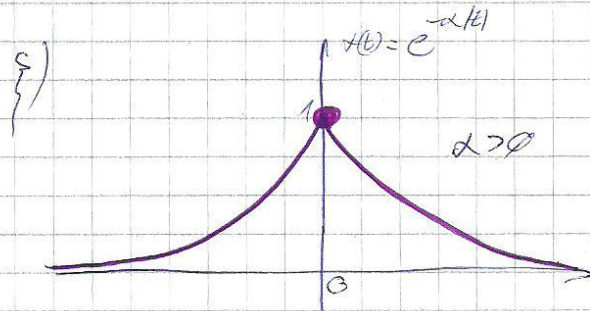
$$= \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(\alpha + j\omega)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt =$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{①}$$

$$\text{②} \dots = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

η) szinuszos jelek

$$F\{\cos \omega_0 t\} = F\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} \quad \text{③}$$

$$\text{④} \quad \frac{1}{2} F\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2} F\{e^{-j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2} (2\pi \delta(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} (2\pi \delta(\omega + \omega_0)) \quad \text{⑤}$$

$$\text{⑥} \quad \pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$F\{\sin \omega_0 t\} = \dots = -j\pi (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

"Valóságos" moduláció

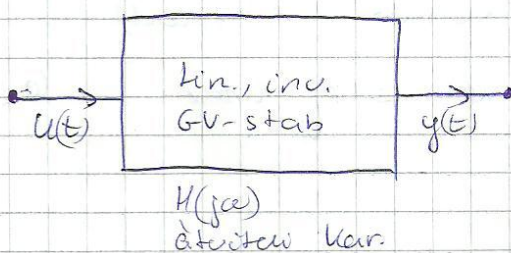
$$F\{x(t) \cdot \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))]$$

pl:

$$F\{E(t) \cdot \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} \left[\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} \right]$$

2) A spektrális leírás alkalmazása

a) rendszer válaszáinak számítása



$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a gerj. spektruma

elemi összetevő w-n:

$$du(t) = \frac{U(j\omega)}{2\pi} e^{j\omega t} d\omega$$

$$dy(t) = du(t) \cdot H(j\omega)$$

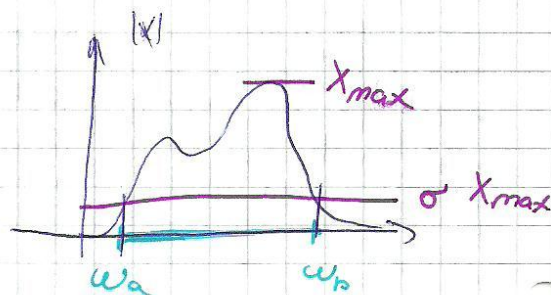
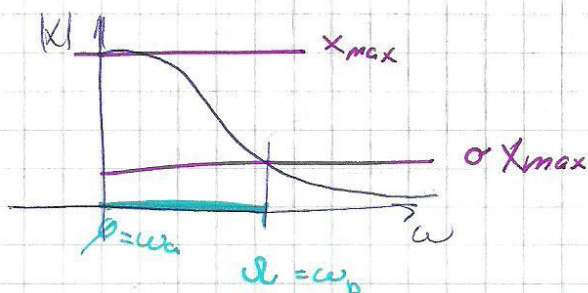
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(j\omega) U(j\omega)}_{\text{a válasz spektruma}} e^{j\omega t} d\omega \quad y(t) = F^{-1}\{H(j\omega) U(j\omega)\}$$

b) sávszélességek

a) a jel sávszélessége: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

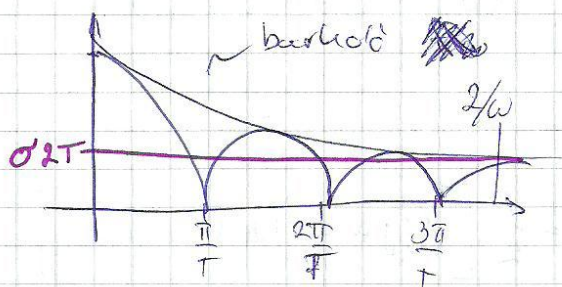
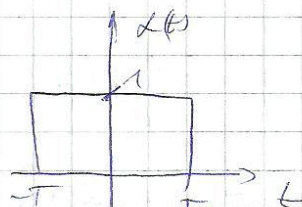
tartomány (ω_a, ω_b) :

$|X(j\omega)| \geq \sigma |X(j\omega)|_{\max}$ $(0 < \sigma < 1)$ pl: 0.05
amplitúdó spektrum



pl: négyszög impulzus

$$X(j\omega) = 2T \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$



$$\sigma 2T = \frac{2T}{\omega} \Big|_{\omega=\Omega}$$

$$\Omega = \frac{1}{\sigma}$$

b) rendszer sávszélessége ($= |H(j\omega)|$ sávszélessége)

$K(\omega) = |H(j\omega)|$
amplitúdó
karakterisztika

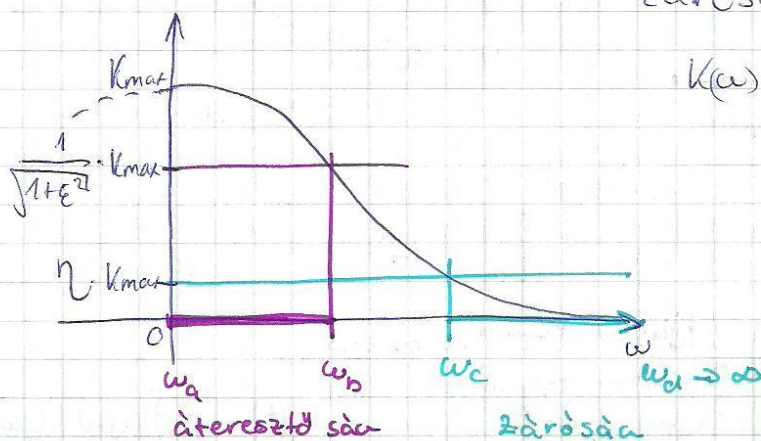
átteresztő sáv (ω_a, ω_b)

$$K(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \quad (\text{pl } \varepsilon=1)$$

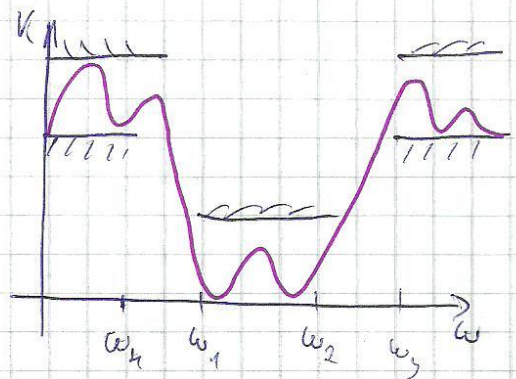
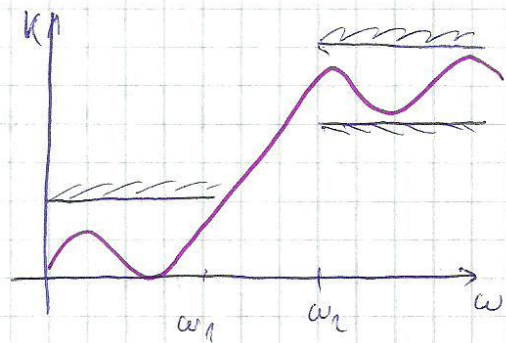
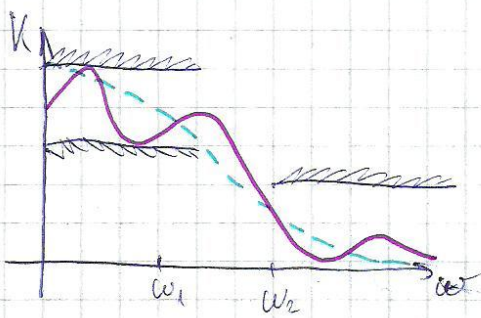
ha nincs megadva, akkor 1

zárósáv (ω_c, ω_d)

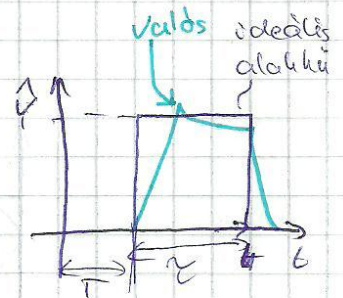
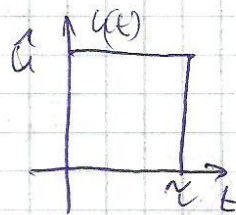
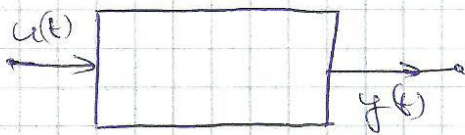
$$K(\omega) \leq \eta \cdot K_{\max} \quad (0 < \eta < 1)$$



toleranciasémák:

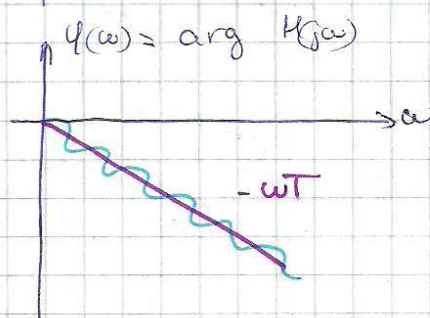
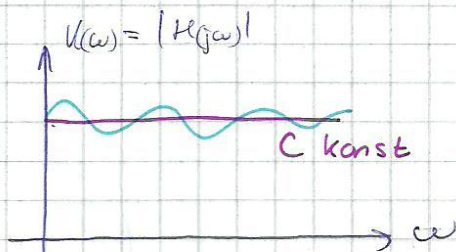


c) alakkü átvitel



$$u(t) \rightarrow y(t) = C u(t-T)$$

$$U(j\omega) \rightarrow Y(j\omega) = \underbrace{C \cdot e^{j\omega T}}_{H(j\omega)} U(j\omega)$$



3.) A jel energiája a frekvenciatartományban

$$|x(t)|^2 \sim \text{teljesítmény}$$

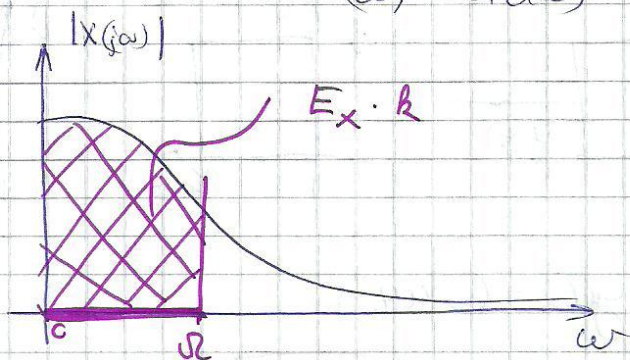
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \sim \text{energia}$$

a) Parseval-tétel

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|X(j\omega)|^2}_{\text{energiaspektrum}} d\omega$$

$|X(j\omega)|^2 d\omega$ energia van az $(\omega, \omega+d\omega)$ tartományban



$$\frac{\int_0^{\Omega} |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} = k$$

Példák

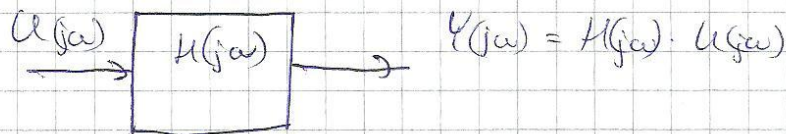
$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

$$x(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-2\alpha} = \underline{\underline{\frac{1}{2\alpha}}}$$

$$\begin{aligned}
 G_X &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha + j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha} - \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\arctg \infty - \arctg(-\infty) \right) = \frac{1}{2\alpha}
 \end{aligned}$$

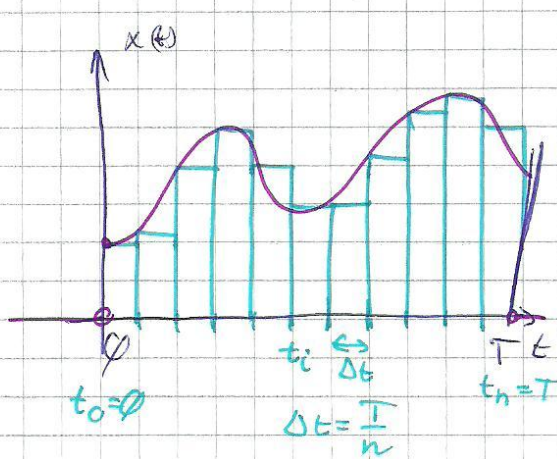
b) Energiaátviteli karakterisztika



$$|Y(j\omega)|^2 = \underbrace{|H(j\omega)|^2}_{K^2(\omega)} \cdot |U(j\omega)|^2$$

$K^2(\omega)$ energiaátviteli karakterisztika

k.) Diszkrét Fourier-transzformáció



$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 X(j\omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) e^{-j\omega t_i} \Delta t
 \end{aligned}$$

Véges ω_q elemeire, $q = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\omega_q = q \frac{2\pi}{T} \quad t_i = i \cdot \Delta t = i \cdot \frac{T}{n}$$

$$X_q = X(j\omega_q) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot q \cdot i \cdot \frac{T}{n}} = \left(e^{j \frac{2\pi}{n}} \right)^{-qi}$$

III. Analízis a komplex frekvenciatartományban

motiváció a Fourier-transzformáció korlátosságai

- csak abszolút integrálható jelek

- csak GV stabilis rendszerek

emlékeztető: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

1) A Laplace-transzformáció

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

komplex körfrekvencia

$$s = \sigma + j\omega$$

csak belépő jeleket értelmes
vizsgálni
(lehet nem belépő jelet is,
de elveszik a (t) -k információja)

- $x(t)$ -nek nem kell abszolút integrálhatónak lennie

Jelölés: $\mathcal{L}\{x(t)\} \equiv X(s)$

inverz transzformáció:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \equiv x(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{belépő jel, megállapodás} \\ \text{szerint} \end{array} \right)$$

a) A transzformáció tételei

1) lineáris

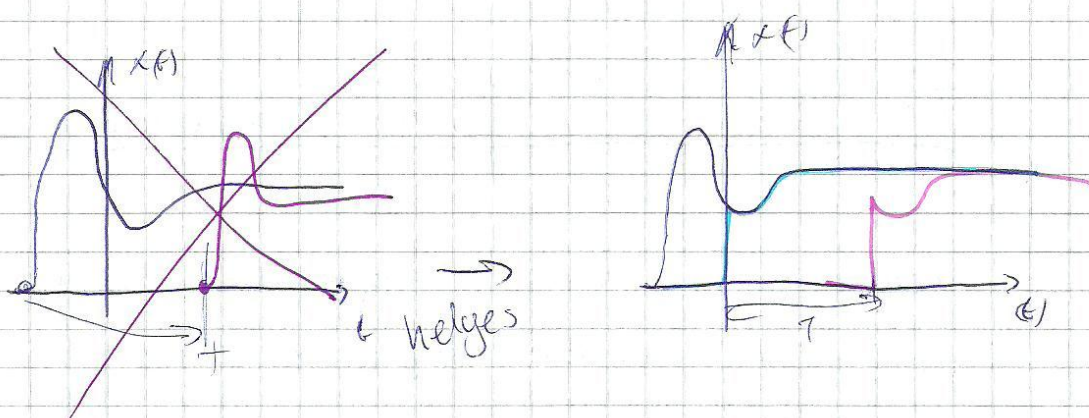
$$\mathcal{L}\{C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

2) csillapítási tétel

$$\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{-\sigma t}\} = X(s + \sigma) \quad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

3) eltolási tétel

$$\mathcal{L}\{x(t-T) \varepsilon(t-T)\} = X(s) e^{-sT} \quad T > 0$$



5) derivációs tétel

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = s \cdot X(s) - x(-0)$$

$$\int_{-0}^{\infty} \underbrace{x'(t)}_u \cdot \underbrace{e^{-st}}_v dt = \left[x(t) \cdot e^{-st} \right]_{-0}^{\infty} - \int_{-0}^{\infty} t(t) \cdot (s) \cdot e^{-st} dt$$

$$x(\infty) \cdot e^{-s\infty} = 0$$

$$x(-0) \cdot e^0$$

6) integrálási tétel

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{-0}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

7) szerzés hatványfüggvényei

$$\mathcal{L} \{ t x(t) \} = \frac{dX(s)}{ds}, \quad \mathcal{L} \{ t^2 x(t) \} = \frac{d^2 X(s)}{ds^2} \dots$$

8) konvolúció

$$y(t) = \int_{-0}^t u(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (u, u, \text{bemenet})$$

$$Y(s) = \mathcal{L} \{ u(t) \} \mathcal{L} \{ u(t) \} = H(s) \cdot U(s)$$

9) kezdeti érték - tétel

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

i) végtelen -tétel

X(s) minden

pólusa a komplex
sík bal felében van

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

b) példák: elemi jelek Laplace-transzformáltja

$$a) \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1$$

$$m) \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$s = \sigma + j\omega$

$$n) \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \dots = \frac{1}{s-a}$$

$$o) \mathcal{L}\{t \cdot 1\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$p) (t \cdot f(t))' = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

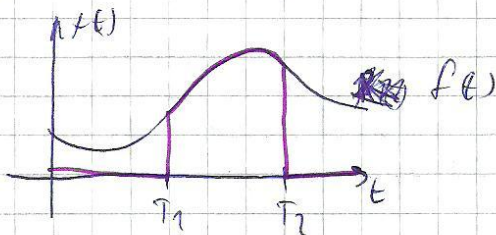
$$c) \mathcal{L}\{f(t) \cdot \cos \omega t\} = \mathcal{L}\left\{f(t) \cdot \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{f(t) e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{f(t) e^{-j\omega t}\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot \sin \omega t\} = \dots = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

f) ábrázolt jelek



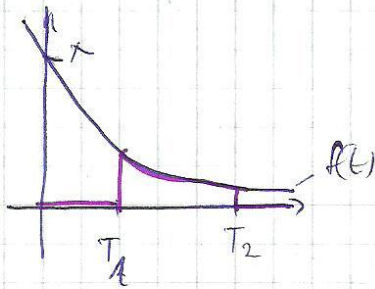
$$x(t) = [f(t-T_1) - f(t-T_2)] \cdot f(t)$$

$$X(s) = ?$$

$$x(t) = f(t-T_1) f(t) - f(t-T_2) f(t)$$

az ábrázolt jelek
közvetlenül nem
alkalmazható

pl: (1) $f(t) = A \cdot e^{-\alpha t}$



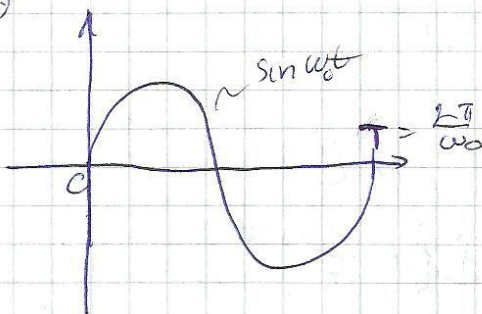
$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{E}(t-T_1) A e^{-\alpha t} - \mathcal{E}(t-T_2) A e^{-\alpha t} \\ &= \mathcal{E}(t-T_1) \cdot e^{-\alpha(t-T_1+T_1)} - \mathcal{E}(t-T_2) \cdot e^{-\alpha(t-T_2+T_2)} = \\ &= \mathcal{E}(t-T_1) A \cdot e^{-\alpha(t-T_1)} \cdot e^{-\alpha T_1} - \mathcal{E}(t-T_2) A e^{-\alpha(t-T_2)} e^{-\alpha T_2} \end{aligned}$$

$$X(s) = A e^{-\alpha T_1} \frac{1}{s+\alpha} e^{-s T_1} - A e^{-\alpha T_2} \frac{1}{s+\alpha} e^{-s T_2}$$

$$X(s) = A e^{-\alpha T_1} \frac{1}{s+\alpha} e^{-s T_1} - A e^{-\alpha T_2} \frac{1}{s+\alpha} e^{-s T_2}$$

Megj: $\mathcal{L}\{f(t) A \cdot e^{-\alpha t}\} = A \frac{1}{s+\alpha}$

(2)



$$\begin{aligned} X(s) &= [\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t-T)] \cdot \sin(\omega_0 t) = \\ &= \mathcal{E}(t) \sin(\omega_0 t) - \mathcal{E}(t-T) \sin(\omega_0 t) = \\ &= [\omega_0(t-T)] \end{aligned}$$

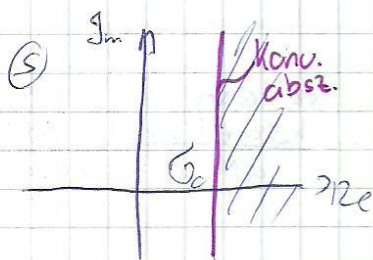
$$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-sT}$$

c) kiegészítő megjegyzések

a) a konvergencia abszcissza

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty A(t) e^{\sigma t} e^{j\omega t} dt$$

$\sigma \in \mathbb{R}$



Fel: $x(t) = \mathcal{E}(t) \cdot e^{\sigma t}$

$$\int_0^\infty e^{\sigma t} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \quad (\sigma - \alpha) < 0 \quad \sigma_0 - \alpha$$

$$x(t) = \varepsilon(t) \quad \sigma_0 = 0$$

$$x(t) = \varepsilon(t) e^{-2t} \quad \sigma_0 = -2$$

$$L \rightarrow \frac{1}{s+2}$$

1) Kapcsolat a Fourier- és Laplace-transzformáció között

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad 1) x(t) \text{ absz. intg. haték}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad 2) belépő$$

$$j\omega \triangleq s \quad X(s) = X(j\omega) \Big|_{j\omega = s}$$

Figyelmeztetés

$$X(s) \Big|_{s=j\omega} = X(j\omega) \quad \text{a teljes spektrum}$$

2) inverziós integrál $L^{-1}\{ \} = ?$

$$y(t, \sigma) \triangleq \varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t} \quad (y(t, \sigma) \text{ absz. intg. haték})$$

$$Y(j\omega, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t, \sigma) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

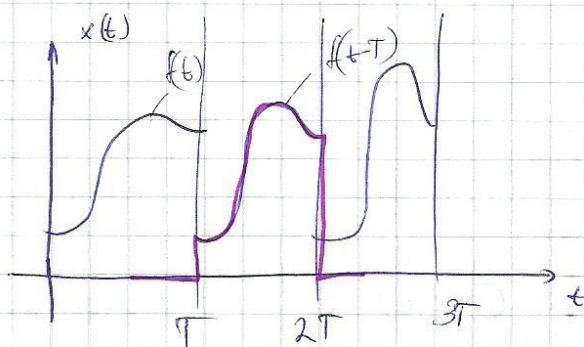
$$s \triangleq \sigma + j\omega$$

$$\varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{Y(j\omega, \sigma)}_{X(s)} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\varepsilon(t) x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{s t} ds \quad ds = j d\omega$$

$$\varepsilon(t) x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad \text{Piemann-mellin integrál}$$

5) periodikus jelek Laplace transzf.

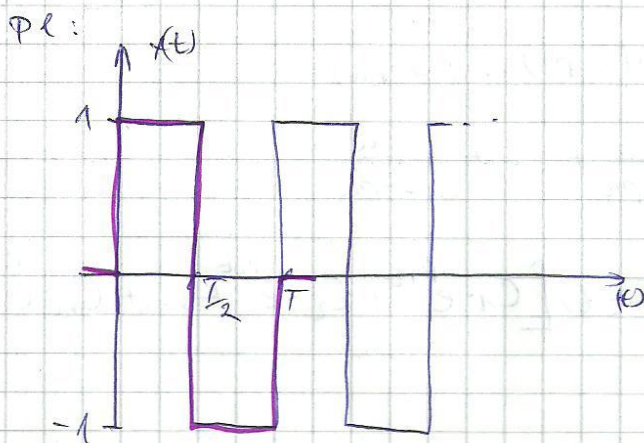


$$X(s) = ?$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathcal{L}\{f(t - nT)\}}_{\mathcal{L}\{f(t) e^{-s nT}\} \text{ (eltoltt)}}$$

$$X(s) = F(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s nT} = F(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}} \text{ (mértani sor)}$$



$$X(s) = \frac{1}{s} \left(1 - 2e^{-sT/2} + e^{-sT} \right) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$f(t) = \mathcal{E}(t) - 2\mathcal{E}\left(t - \frac{T}{2}\right) + \mathcal{E}(t - T)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{1}{s} e^{-sT/2} + \frac{1}{s} e^{-sT}$$

2) Invert Laplace - transzformáció

$$X(s) \rightarrow x(t) = ?$$

a) „részre”

$$\mathcal{L}^{-1}\{A\} = A \delta(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{B \frac{1}{s}\right\} = B \varepsilon(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{C \frac{1}{s+\alpha}\right\} = C \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t} \dots (stb)$$

b) $X(s)$ valódi periodikus törtfüggvény

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

valódi tört, mert N fokszáma $>$ M fokszáma

$N(s)$ gyökei: $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ $p_i \neq p_j$
(páronként)

$$N(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)$$

részre

$$X(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \varepsilon(t) [C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}]$$

$$C_k = ?$$

-eggyüttható-
 $p_1: n=2$

$$\frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} = \frac{C_1(s-p_2) + C_2(s-p_1)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{s(C_1+C_2) + \cancel{C_1 p_2} + \cancel{C_2 p_1}}{N(s)}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = b_1 \\ -C_1 p_2 - C_2 p_1 = b_0 \end{cases}$$

$$\frac{s(C_1+C_2) + \cancel{C_1 p_2} + \cancel{C_2 p_1}}{N(s)} = \frac{s b_1 + b_0}{N(s)}$$

- letakarásos módszer

$$(s-p_k) X(s) = (s-p_k) \left(\frac{C_1}{s-p_1} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n} \right)$$

$s \rightarrow p_k \quad \quad \quad \hookrightarrow C_k$

$$\frac{M(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_k)\dots(s-p_n)}$$

$$C_k = \frac{M(s=p_k)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{k-1})(s-p_{k+1})\dots(s-p_n)}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $p_1 \quad p_2 \quad p_{k-1} \quad p_{k+1} \quad p_n$

pl:

$$X(s) = \frac{7s}{3s^2 + 9s + 6} = \frac{7}{3} \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s) = \frac{7}{3} \left[\frac{\frac{-1}{+1}}{s+1} + \frac{\frac{-2}{-1}}{s+2} \right] = \frac{7}{3} \left[\frac{-1}{s+1} + \frac{+2}{s+2} \right]$$

$$x(t) = \mathcal{E}(t) \frac{7}{3} \left[-1e^{-t} + 2e^{-2t} \right]$$

c) $X(s)$ nem valódi tört.

$$X(s) = \frac{G(s)}{N(s)} = A + \frac{M(s)}{N(s)} \text{ - valódi tört}$$

G fokszáma = N fokszáma | M fokszáma < N fokszáma

$$x(t) = A \delta(t) + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M(s)}{N(s)} \right\}}_{\text{már láttuk}}$$

A = ? M(s) = ?

pl: $X(s) = \frac{2s^2 + s + 5}{s^2 + 3s + 1} = 2 + \frac{-5s + 3}{s^2 + 3s + 1}$

$$(2s^2 + s + 5) : (s^2 + 3s + 1) = 2 + \frac{-2s^2 + 6s + 2}{s^2 + 3s + 1}$$

d) "különleges" esetek

e) többszörös gyökök

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{\underbrace{(s-p_1) \dots (s-p_r)}_{r \text{ db } 1\text{-eseres}} \underbrace{(s-p_{r+1})^q \dots (s-p_{r+q})^q}_{q \text{ azonos}}}$$

$$= \frac{C_1}{(s-p_1)} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_r}{s-p_r} + \left(\frac{D_1}{s-p_{r+1}} + \frac{D_2}{(s-p_{r+1})^2} + \dots + \frac{D_q}{(s-p_{r+1})^q} \right)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[C_1 e^{p_1 t} + \dots + C_r e^{p_r t} + \left(D_1 e^{p_{r+1} t} + \right. \right.$$

$$\left. + D_2 t e^{p_{r+1} t} + D_3 \frac{t^2}{2} e^{p_{r+1} t} + \dots + D_q \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} e^{p_{r+1} t} \right]$$

emlékeztető:

$$\int dt \quad \mathcal{L} \{ \mathcal{E}(t) \} = \frac{1}{s}$$

$$\int dt \quad \mathcal{L} \{ t \mathcal{E}(t) \} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^2}{2} \mathcal{E}(t) \right\} = \frac{1}{s^3} \rightarrow \mathcal{L} \{ t^2 \mathcal{E}(t) \} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L} \{ \mathcal{E}(t) \cdot e^{pt} \} = \frac{1}{s-p}$$

$$\mathcal{L} \{ \mathcal{E}(t) \cdot t \cdot e^{pt} \} = \frac{1}{(s-p)^2}$$

$C_n, D_n = ?$

- C_n : letakarásos módszer

- D_n : egyenlítő - ö.k.

$$X(s) = \frac{5s}{(s+2)(s+3)^2}$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s+2} + \frac{D_1}{s+3} + \frac{D_2}{(s+3)^2} = \frac{C_1(s+3)^2 + D_1(s+3)(s+2) + D_2(s+2)}{(s+2)(s+3)^2}$$

$$C_1 = \frac{-10}{1} = -10$$

$$5s = s^2(\underbrace{C_1 + D_1}_0) + s(\underbrace{6C_1 + 5D_1 + D_2}_5) + \underbrace{9C_1 + 6D_1 + 2D_2}_0$$

$$D_1 = 10$$

$$D_2 = 15$$

$$x(t) = \mathcal{E}(t) \left[-10e^{-2t} + 10e^{-3t} + 15te^{-3t} \right]$$

b) Komplex pólusok

$$X(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_r}{s-p_r} + \frac{C_{r+1}^*}{s-p_{r+1}^*} + \frac{C_{r+1}^*}{s-p_{r+1}^*}$$

$$p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}$$

$$p_{r+1} \in \mathbb{C}$$

$$C_1, \dots, C_r \in \mathbb{R}$$

$$C_{r+1} \in \mathbb{C}$$

$$C_{r+1} = A \cdot e^{j\varphi}$$

$$C_{r+1}^* = A e^{-j\varphi}$$

$$p_{r+1} = a + jb$$

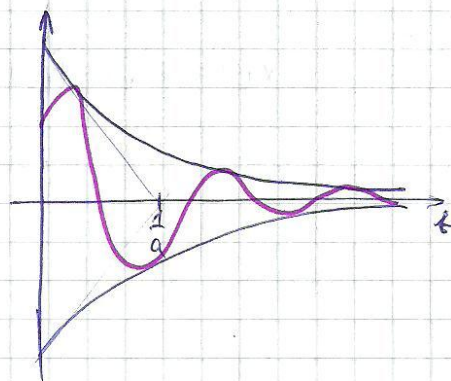
$$p_{r+1}^* = a - jb$$

cél szerinti alak

$$x(t) = \mathcal{E}(t) \left[c_1 \cdot e^{p_1 t} + c_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + c_r \cdot e^{p_r t} + \underbrace{A e^{j\varphi} \cdot e^{(a+jb)t}}_{\text{cél szerinti alak}} + \right.$$

$$\left. + A e^{-j\varphi} \cdot e^{(a-jb)t} \right]$$

$$g(t) = A e^{at} \left(\underbrace{e^{j(bt-\varphi)} + e^{-j(bt+\varphi)}}_{2 \cos(bt+\varphi)} \right)$$



pe: $X(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+4} = \frac{2s+1}{[s-(-1+j\sqrt{3})][s-(-1-j\sqrt{3})]}$

$$= \frac{1,04 \cdot e^{j0,28}}{s-(-1+j\sqrt{3})} + \frac{1,04 \cdot e^{-j0,28}}{s-(-1-j\sqrt{3})}$$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1,04 \cdot e^{j0,28}}{s-(-1+j\sqrt{3})} + \frac{1,04 \cdot e^{-j0,28}}{s-(-1-j\sqrt{3})} \right\}$

e) az időbeli eltolás kezelése

$$X(s) = \underbrace{X_0(s)}_{\text{racionális törtfüggvények}} + \underbrace{X_1(s)}_{\text{racionális törtfüggvények}} e^{-sT_1} + \dots + \underbrace{X_r(s)}_{\text{racionális törtfüggvények}} e^{-sT_r}$$

racionális törtfüggvények

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_r$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) + \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)e^{-sT_1}\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{X_r(s)e^{-sT_r}\}$$

$$\mathcal{L}\{x_0(t)\} = X_0(s)$$

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$$

pe: $X(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s(s+a)} = \underbrace{\frac{1}{s(s+a)}}_{F(s)} \cdot e^{-sT} \underbrace{\frac{1}{s(s+a)}}_{F(s)}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = f(t) - \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-sT}\}$$

f) további módszerek

$$p_l: \frac{1}{\sqrt{s}} / e^{a\sqrt{s}}$$

- táblázatok

- numerikus módszerek

3. Laplace-transzformáció alkalmazása

Előny: diff egyenlet $\rightarrow$ algebrai egyenlet

Kötöttség: kauzális rendszer
 belépő a gerjesztés (vagy $t = -\infty$ -beli
 kiindulási értékek ismertek)

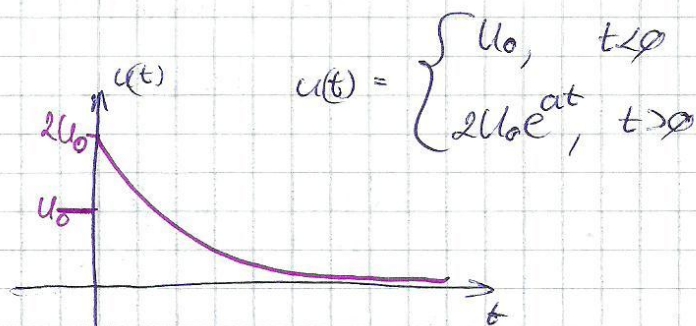
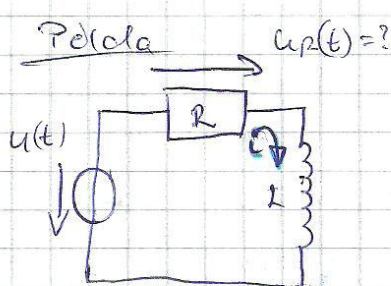
a) általános eljárás

(1) hálózati egyenletek (pl: állapot vált. leírás)

(2) $\mathcal{L}\{\}$: időtart $\rightarrow$ s-tartomány

(3) Az algebrai egyenletek megoldása (s-tartomány)

(4) $\mathcal{L}^{-1}\{\}$: s-tartományból $\rightarrow$ t-tartományba



(1) I: $u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \dot{i}(t)$
 II: $u_R(t) = R \cdot i(t)$

(2) $\mathcal{L}\{\}$:

I: $U(s) = R \mathcal{L}\{i(t)\} + L(s \mathcal{L}\{i(t)\} - i(-\infty))$
 II: $U_R(s) = R \mathcal{L}\{i(t)\}$

$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$
 $U_R(s) = \mathcal{L}\{u_R(t)\}$
 $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$

Kiindulási érték:

$i(-\infty) = \frac{u_0}{R}$ (rezisztencia hálózataból)

$U(s) = 2u_0 \cdot \frac{1}{s-a}$

③ $U_R(s)$ kifejezése:

$$I. \rightarrow I(s) = U_0 \frac{\frac{L}{R}(s-a) - 2}{(R+sL)(s-a)}$$

$$II \rightarrow U_R(s) = R I(s) = \dots = \frac{U_0}{a + \frac{R}{L}} \left[\frac{\frac{3R}{L} + a}{s + \frac{R}{L}} - \frac{\frac{2R}{L}}{s-a} \right]$$

$$U_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_R(s)\} = \mathcal{E}(t) \cdot \frac{U_0}{a + \frac{R}{L}} \cdot \left[\left(\frac{3R}{L} + a\right) e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{2R}{L} e^{at} \right]$$

Ellenőrzés:

$$t=0: U_R(0) = U_0 \quad \checkmark$$

$$t \rightarrow \infty: U_R(\infty) = 0 \quad \checkmark$$

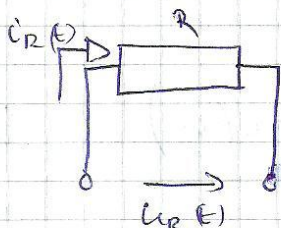
$\frac{R}{L} \rightarrow 0$ és $a < 0 \Rightarrow$ fényleg lecseng

b) hátsóati egyenletek közvetlenül az s-tartományban

• összekapcsolási törvényszerek (Kirchhoff-törvények)

$$\sum_{\text{hurok}} U_k(s) = 0, \quad \sum_{\text{csomópont}} I_k(s) = 0$$

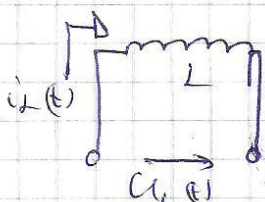
• komponensek karakterisztikái



$$U_R(t) = R I(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U_R(s) = R I_R(s)$$

$$\frac{U_R(s)}{I_R(s)} = R = Z_R(s)$$

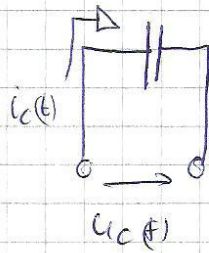
operátoros impedancia



$$U_L = L \cdot \dot{I}_L(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U_L(s) = L(s I_L(s) - I_L(0))$$

ha $I_L(0) = 0$ (0-ban a tekercs energiamentes)

$$\frac{U_L(s)}{I_L(s)} = sL = Z_L(s)$$

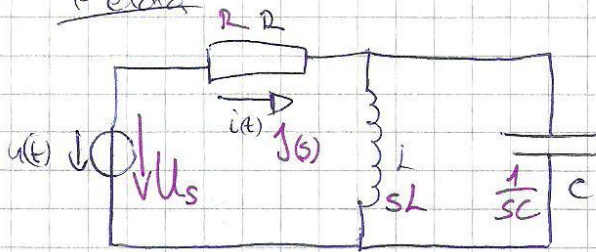


$$i_C(t) = C \cdot \dot{u}_C(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} I_C(s) = C(sU_C(s) - u_C(0))$$

ha $u_C(0) = 0$ (ha a kondenzátor energiamentes)

$$\frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} = Z_C(s)$$

Példa

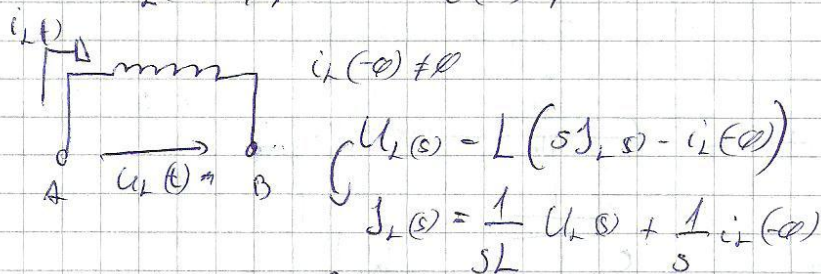


$u(t)$ beépítve, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$
 energiamentes udl. $t=0$ -ban
 használhatók az op. impedanciák!

$$I(s) = \frac{U(s)}{R + (sL \times \frac{1}{sC})}$$

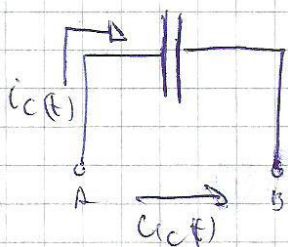
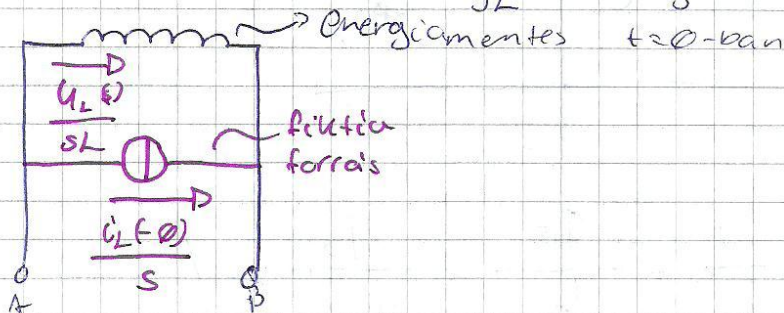
ha nem beépítési jelenség:

$$i_L(-0) \neq 0 \quad u_C(-0) \neq 0$$



$$U_L(s) = L(sI_L(s) - i_L(-0))$$

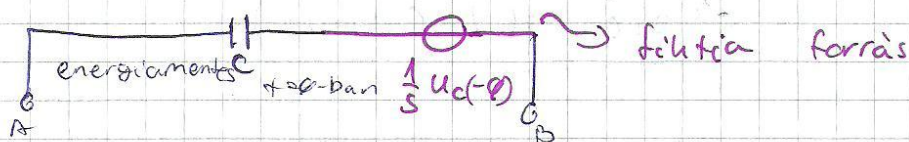
$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(-0)$$



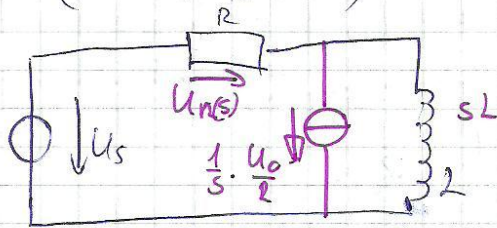
$t=0$ -ban nem energiamentes

$$I_C(s) = C(sU_C(s) - u_C(-0))$$

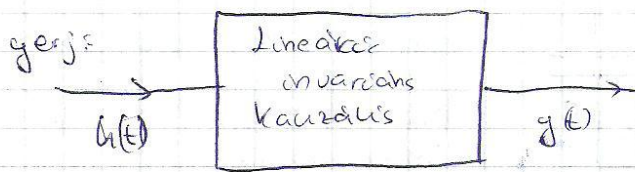
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_C(-0)$$



Pé: (az ω pontból)



c) átviteli függvény $H(s)$



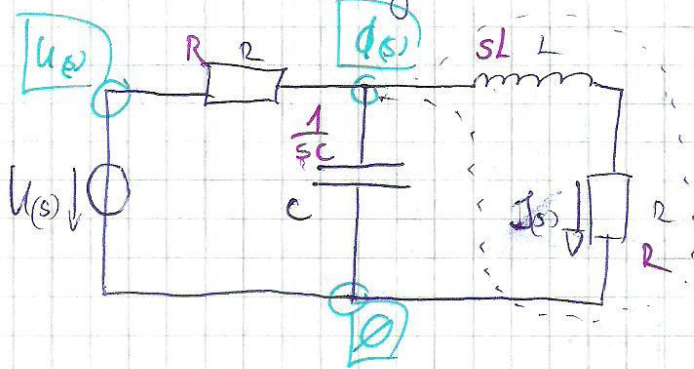
beleptő gerjesztés
kauszális rendszer

$$H(s) \triangleq \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

↑
racionális törtfüggvény

minden beleptő gerjesztés esetén

Példa $H(s)$ meghatározása



$$H(s) = ?$$

$$H(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$$

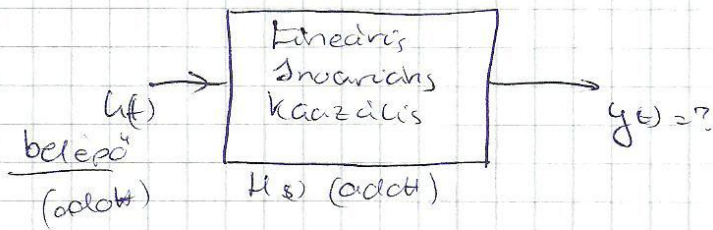
$$\frac{\Phi(s) - U(s)}{R} + \frac{\Phi(s)}{1/sc} + \frac{\Phi(s)}{sL + R} = 0$$

$$I(s) = \frac{\Phi(s)}{sL + R}$$

$$I(s) = \frac{U(s) \cdot 1}{s^2 RLC + s(L + CR^2) + 2R} \quad H(s)$$

d) a válasz számítása
használatával

$H(s)$



$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) U(s)\}$$

Példa

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad u(t) = \varepsilon(t), \quad y(t) = ?$$

$$U(s) = \frac{1}{s+5}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \left(\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \right) \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-1/3}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \frac{-2/3}{s+5} \right\}$$

$$y(t) = \varepsilon(t) \left[\underbrace{-\frac{1}{3} e^{-2t} + 1 e^{-3t}}_{y_f(t)} \underbrace{-\frac{2}{3} e^{-5t}}_{y_g(t)} \right]$$

IV Rendszerjellemező függvények

rendszer: Gerjesztés - Válasz kapcsolat

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) d\tau$$

$\uparrow$ válasz $\uparrow$ gerjesztés

A rendszerjellemező függvény olyan függvény melynek ismeretében tetszőleges $u(t)$ esetén $y(t)$ számítható.

Szempontok: - enyhe feltételek mellett alkalmazható (G-V stab, kauzális...)

- egyszerűen alkalmazható

- mérhető az objektumon

- ábrázolható

- a hálózattól könnyen felírható

1) Impulzusválasz ($h(t)$) / időtartományban értelmezett /

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

- Lineáris, invariáns hálózatra lehet ezt használni

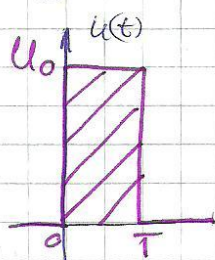
- a kauzalitás és a G-V stabilitás nem feltétel

• Alkalmazás:

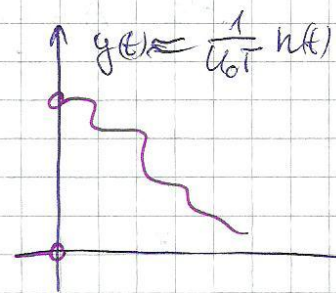
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

- konvolúció

• mérhető:



→



• ábrázolható

• G-V stabilitás

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

- konvergencia

3. Átviteli karakterisztika ($H(j\omega)$) / frekvencia tartományban

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad \swarrow \text{Fourier-transzformáció}$$

- Feltétel: A vizsgált rendszer G-V stabilitása

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \equiv U(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

- Mèrhètő: szinuszos állandósult állapot, ω változtatására
- Ábrázolás: Nyquist, Bode

3. Átviteli függvény ($H(s)$) / komplex frekvencia tartományban

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \swarrow \text{Laplace-transzformáció}$$

- Feltétel: - $u(t)$ belépő
- kauzális rendszer

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \Rightarrow H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

- Közvetlenül nem mérhető

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}, \quad n \geq m$$

$$H(s) = A \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

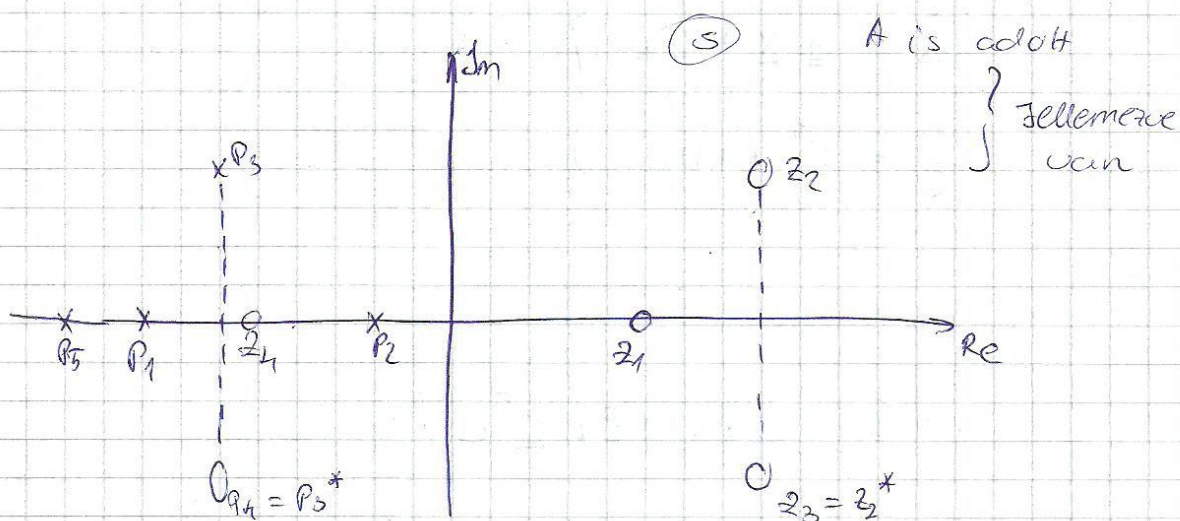
$(n+m+1)$ db szám jellemzi $H(s)$

z_i : zérusok, $i=1,2,\dots,m$

p_i : pólusok, $i=1,2,\dots,n$

ha $z_i \neq p_i$

• Ábrázolás: pólus-zérus elrendezés



$$H(s) = D + \frac{b_1}{s-p_1} + \frac{b_2}{s-p_2} + \dots + \frac{b_n}{s-p_n}$$

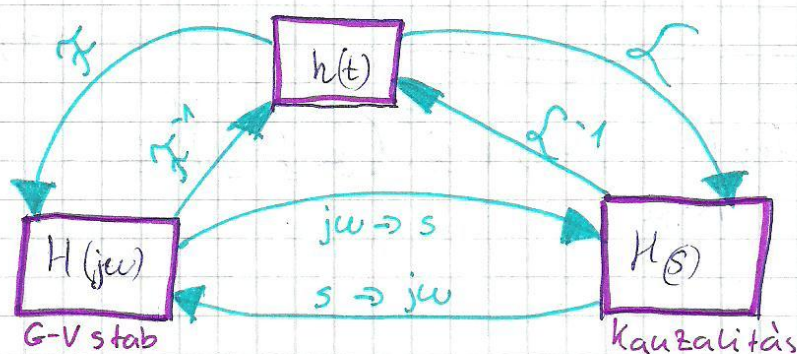
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = D\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[b_1 e^{p_1 t} + \dots + b_n e^{p_n t}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \iff \forall \operatorname{Re}\{p_i\} < 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

G-V stabilitás

Minden pólus a bal félsíkban van!

4. A rendszerjellemező fű-ek kapcsolata



- Mind a három csak LINEÁRIS és INVARIÁNS rse-re létezik
- előleg ekvivalensek
- kétféle szempontok döntenek

5.) Kapcsolat az állapotváltozás leírással

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B}u \\ y &= \underline{C}^T \cdot \underline{x} + Du \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Állapotváltozás} \\ \text{leírás normál} \\ \text{alakja} \end{array}$$

a) impulzusválasz

$$h(t) = D \delta(t) + \varepsilon(t) \underline{C}^T e^{\underline{A}t} \underline{B}$$

b) átviteli fu. (feltesszük $x(0) = 0$)

$\mathcal{L}\{\}$:

$$s \underline{X}(s) = \underline{A} \underline{X}(s) + \underline{B} U(s)$$

$$Y(s) = \underline{C}^T \underline{X}(s) + D U(s)$$

$$\downarrow \quad s \underline{X}(s) - \underline{A} \underline{X}(s) = \underline{B} U(s)$$

$$(s \underline{I} - \underline{A}) \underline{X}(s) = \underline{B} U(s)$$

$$\underline{X}(s) = (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} U(s) \quad \swarrow \text{skalár szám!}$$

$$Y(s) = U(s) \cdot \underbrace{\left(\underline{C}^T (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D \right)}_{H(s)}$$

c) átviteli karakterisztika ha G-V stab.: $s \rightarrow j\omega$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = D + \underline{C}^T (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$$

6. Speciális rendszerek

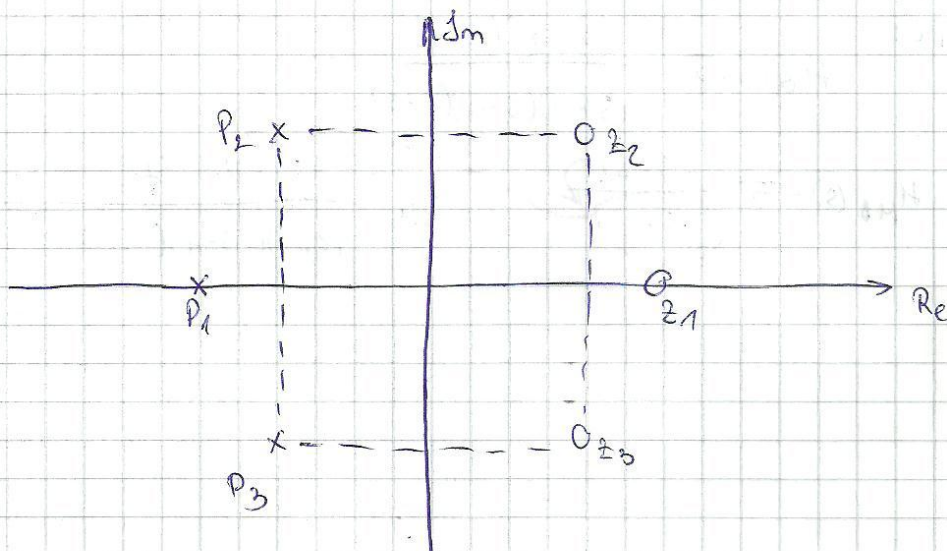
a) Minden áteresztő (MI) rendszerek

Lineáris, G-V stabilis rendszer

$$K(\omega) = |H(j\omega)| \equiv K_0$$

$$H(s) = K_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$\left| \frac{j\omega - z_i}{j\omega - p_i} \right| \stackrel{\Delta}{=} 1 \Rightarrow \boxed{z_i = -p_i^*}$$



Pl: memóriamentes mindenáteresztő rsz.

$$H(j\omega) = K_0$$

más alak:

$$H(s) = K_0 \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

b) minimál fázisú rendszer lin., G-V stab!

Azonos amplitúdó karakterisztika ($K(\omega)$)

→ minimál fázisú a legkisebb a fázis-karakterisztika $\varphi(\omega)$

$$\forall z_i : \operatorname{Re} \{z_i\} \leq 0$$

$$\forall p_i : \operatorname{Re} \{p_i\} < 0$$

szigorúan minimál (fázisú) ha

$$\operatorname{Re} \{z_i\} < 0, \quad \operatorname{Re} \{p_i\} < 0$$

$$K(\omega) \rightarrow \varphi(\omega)$$

c) felbonthatóság: $\forall H(s)$:

$$H(s) = H_{MH}(s) H_{MF}(s)$$

pl:

$$H(s) = 5 \cdot \frac{(s+2)(s-3)}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

$$H_{MH}(s) = 5 \cdot \frac{(s-3)}{(s+3)} \quad , \quad H_{MF} = \frac{(s+3)(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$