Valószínűségszámítás vizsga megoldása
2013. június 19.

1. Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,1$ valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket, és $0,25$ valószínűséggel 13-nál nagyobb értéket. Mennyi a várható értéke és szórása?
Megoldás: $X \in N(m, \sigma)$, ahol m és $\sigma > 0$ értéke meghatározandó. $0,1 = \mathbf{P}(X < 10) = F_X(10) = \Phi\left(\frac{10-m}{\sigma}\right)$, másrészt táblázat alapján $\Phi(-1,28) = 0,1$, vagyis $\frac{10-m}{\sigma} = -1,28$. Hasonlóan $0,25 = \mathbf{P}(X > 13) = 1 - F_X(13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(0,68)$, vagyis $\frac{13-m}{\sigma} = 0,68$. Ezekből kifejezhetjük σ és m értékét, és így megkapjuk, hogy $\sigma \approx 1,53$ és $m \approx 11,96$.

2. Egy dobozban két piros és három fehér golyó van. Visszatevéssel tízszer húzunk a dobozból. Jelölje X a pirosak számát! Adja meg a $Z = (X+1)(X-2)$ várható értékét!
Megoldás: $X \in B(10,\ 0,4)$.$\mathbf{E}X = 4, \mathbf{E}X^2 = 2,4 + 16 = 18,4$. $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X^2 - \mathbf{E}X - 2 = 18,4 - 4 - 2 = 12,4$.

3. Az A paraméter milyen értékénél lesz az $f(x) = Ae^{-3x^2}, x \in \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várhatóérték és a szórásnégyzet?
Megoldás: Ez normális sűrűségfüggvény $m = 0$ és $\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}}$ paraméterekkel. Így $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

4. Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, $Y = \cos(2\pi X)$ és $Z = \sin(2\pi X)$. Számolja ki a $(Y, Z)^T$ pár kovarianciamátrixát!
Megoldás: $\mathbf{E}Y = \int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx = 0, \mathbf{E}Z = \int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = 0, \mathbf{E}YZ = \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(4\pi x)\,dx = 0$. $\mathbf{E}Y^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}, \mathbf{E}Z^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$.
Így a kovariancia mátrix: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5. Egy játékos a következő három lottószelvénnyel játszik: 1, 13, 31, 49, 80 illetve 2, 13, 43, 49, 81 és 13, 45, 67, 69, 90. Jelölje X azt, hogy hány nyertes szelvényünk lesz, Y a nyeretlen szelvények száma. Számolja ki az $\mathrm{R}(X-1, Y+1)$-t!
Megoldás: $\mathrm{R}(X-1, Y+1) = \mathrm{R}(X, Y)$. Mivel $Y = 3 - X$, így $\mathrm{R}(X, Y) = -1$.

6. Mondja ki a nagy számok Csebisev-féle gyenge alakját!
Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlásúak, páronként korrelálat-

lanok, $m = \mathbf{E}X_i, D = \boldsymbol{\sigma}^2 X_i$. Legyen $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}\left(|Y_n - m| \geq \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \longrightarrow \infty$.