1/1

Matematika 1.

Műveletek vektorokkal: összeadás, kivonás, skaláris és vektoriális szorzás. Ezek definíciója, műveleti tulajdonságai, kiszámítása a vektorok derékszögű koordinátáinak ismeretében. Alkalmazás vetületek, terület, térfogat kiszámítására.

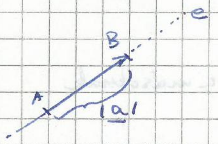
Vektor (def): irányított egyenesszakasz.

jele: $\underline{a}$, $\overrightarrow{AB}$

szabadvektor: szabadon elmozdítható ||-osan önmagával. (homogén erőtér)

részben szabad vektor: hatásvonala mentén eltolható (forgatónyomaték)

kötött vektor: ∅ mozdítható el pl: alakváltozást okozó erő



e - vektor tartója

$|\underline{a}|$ - vektor hossza

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ Ellentett vektorok

Vektor adatai: - Állás → Azonos állás: tartójuk ||-os
- Irány → Ha kezdőpont, induló és végpontjukon átmenő egyenesek fedésbe hozhatók
- Abszolút érték

Def.: - Egységvektor: $|\underline{a}| = 1$ jele: $\underline{a}_e$ $\quad \underline{b}_e = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ $\quad \underline{b} \neq 0$

- Két vektor hajlásszöge: φ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$

Műveletek vektorokkal:

① Vektorok összeadása:

Def.: - $\underline{b}$ - vektort eltoljuk önmagával ||-osan, úgy hogy kezdőpontja $\underline{a}$ végpontja legyen.

- $\underline{a}$ kezdőpontjából $\underline{b}$ végpontjába mutató vektort képezzük $\Rightarrow \underline{a} + \underline{b}$

$\underline{a}$, $\underline{b}$ komponens vektorok, $\underline{a} + \underline{b}$ eredővektor

Kiszámítás: △ módszer, ▱ módszer

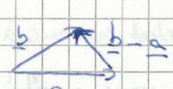
tulajdonságai:

- kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

- asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

② Vektorok kivonása:

Összeadás inverze



Def.: $(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \underline{b}$ $\quad$ $\underline{b}$ és $\underline{a}$ különbsége

Kiszámítás: közös kezdőpontból mér fel ~~…~~ vektorokat. ~~Végpontjaikat összekötő vekto~~

A különbségvektor a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutat.

Def.: $\underline{a}$ nullvektor ha $|\underline{a}| = 0$: tetszőleges állásúnak tekintjük. Bármely vektorral || és $\perp$-es.

③ Vektor szorzása skalárral: λ - valós szám

$|\lambda \underline{a}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$ Ha $\lambda = 0 \rightarrow \lambda \underline{a} = \underline{0}$ állása tetszőleges

Ha $\lambda \neq 0$ állása azonos $\underline{a}$ állásával.

Ha $\lambda > 0$ iránya azonos $\underline{a}$ irányával.

Ha $\lambda < 0$ iránya ellentétes $\underline{a}$ irányával.

Tulajdonságai:

$$(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$$

$$\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda \mu)\underline{a}$$

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

Tétel: Két vektor ‖-os ha legalább az egyikük skalárszorosa a másiknak

Biz:

- Ha $\underline{a} = \underline{b} = \underline{0} \rightarrow$ igaz
- Ha $\cancel{\underline{b}} \neq 0$: $-$ Ha $\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{b} = 0 \cdot \underline{a} \rightarrow$ igaz
  - Ha $\underline{b} \neq \underline{0}$, akkor $\underline{b}_e = \underline{a}_e$ vagy $\underline{b}_e = -\underline{a}_e$

$$\underline{b}_e = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \underline{a}_e = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \Rightarrow \underline{b} = \underbrace{\frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|}}_{\lambda} \cdot \underline{a} \rightarrow \text{igaz}$$

Tétel: Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor tetszőleges $\underline{c}$ esetén $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egysíkúak (koplanárisak)

Biz:

Ha $\underline{c} \parallel \underline{a} \parallel \underline{b} \rightarrow$ igaz

Ha $\underline{c} \nparallel \underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor egyenesei az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ egyenes által meghatározott síkkal ‖-osak.

Def: $\sum_{i=1}^{n} \lambda \underline{a}_i$ $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációja.

Tétel: Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ koplanáris és $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként

Biz:

$\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ 2 felbontás: $\underbrace{\underline{c} = \lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b} \quad \wedge \quad \underline{c} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}}$

$$\lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{a}}_{\|\text{-os } \underline{a}\text{-val}} = \underbrace{(\mu_2 - \mu_1)\underline{b}}_{\|\text{-os } \underline{b} \text{ vel.}}$$

$\Rightarrow$ Csak akkor lehet, ha mindkét oldal $\underline{0} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\mu_1 = \mu_2 \rightarrow$ igaz.

Tétel: Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem egysíkú, akkor bármely $\underline{d}$ egyértelműen felírható $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineáris kombinációjaként.

Biz:

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem egysíkú $\Rightarrow \emptyset$ $\underline{0}$ és ‖-os sem közöttük

a, Ha $\underline{d}$ koplanáris valamelyik kettővel $\Rightarrow$ Előző tétel.

b, Ha nem: $\underline{d} = \underline{e} + \lambda_3 \underline{c}$, ahol $\underline{e}$: egysíkú $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorral $\Rightarrow \underline{e} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}$

$\Rightarrow \underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \rightarrow$ igaz.

Egyértelműség az előzőhöz hasonlóan.

Összegez: 2 nem ‖-os vektor kifeszít egy síkot, 3 nem egysíkú vektor kifeszít egy teret.

1/2 Def: Azok a vektorok lineárisan függetlenek, amelyeknek lineáris kombinációjaként a $\underline{0}$ csak 0 együtthatókkal állítható elő.

Def: Ha $\underline{0}$ előállítható úgy hogy nem minden együttható 0 $\Rightarrow$ lineárisan összefüggőek.

Tétel: két vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem $\parallel$-os

Biz:

Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ $\quad \underline{0} = 0 \cdot \underline{a} + 0 \cdot \underline{b}$

$\underline{a} - c \cdot \underline{b} = 0$

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ $\quad \underline{a} = c \cdot \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} - c \cdot \underline{b} = 0$ $\quad \underline{a}$ együtthatója nem 0

Tétel: 3 vektor akkor és csak akkor lineárisan független ha nem egysíkú

Biz:

Ha nem egysíkúak $\Rightarrow$ tetszőleges vektor előállítható lin. kombinációjukként.

$0 \cdot \underline{a} + 0\,\underline{b} + 0\,\underline{c} = \underline{0}$ és az egyetlen előállítás.

Ha koplanárisak $\Rightarrow$ lin. összefüggők

a, $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ $\quad \underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} \rightarrow \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} - \underline{c} = \underline{0}$

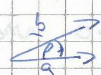
b, $\underline{a} \parallel \underline{b}$ $\quad \underline{a} = \lambda \underline{b}$ $\quad \underline{a} - \lambda \underline{b} + 0\,\underline{c} = \underline{0}$

lin. összefüggők

Skaláris szorzás:

2 vektorhoz egy valós számot rendel.

Def: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$



Tulajdonságai:

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ kommutatív
2. $\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a}(\lambda \underline{b})$
3. $(\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c} \neq \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ általában nem igaz.
4. $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$

disztributivitás

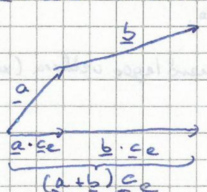
$(\underline{a} - \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} - \underline{b} \cdot \underline{c}$

Biz:

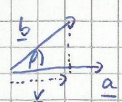
Ha $\underline{c} = \underline{0}$ $\rightarrow$ érvényes

Ha $\underline{c} \neq 0$ $\quad \underline{c} = \underline{c}_e \cdot |\underline{c}|$ $\rightarrow$ behelyettesít + oszt $|\underline{c}|$-vel

$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c}_e = \underline{a} \cdot \underline{c}_e + \underline{b} \cdot \underline{c}_e$ $\rightarrow$ Ezek vektorok merőleges vetületei $\underline{c}_e$-re.



Alkalmazás: szakasz merőleges vetületének kiszámítása



$\cos \varphi = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{b}|} \Rightarrow |\underline{v}| = |\underline{b}| \cos \varphi \Rightarrow |\underline{v}| = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \cdot \underline{b} = \underline{a}_e \cdot \underline{b}$

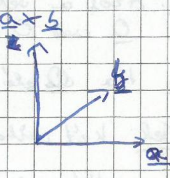
$\underline{v} = |\underline{v}| \cdot \underline{a}_e \Rightarrow \underline{v} = \underline{a}_e(\underline{a}_e \cdot \underline{b})$

Tétel: Két, nullától különböző vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra ha skalár szorzatuk 0 $\quad \underline{a} \perp \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

Biz: Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$-re $\quad \varphi = 90^\circ \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos 90^\circ = 0$

b, Ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ $\quad |\underline{a}| \neq 0, |\underline{b}| \neq 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$

Vektoriális szorzás: két vektorhoz egy vektort rendel



Def: nagysága: $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \varphi$

állása: $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \wedge \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

iránya: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ jobbrendszert alkot

Tulajdonság: 1. $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ $\Rightarrow$ Nem kommutatív

2. $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = \lambda \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \lambda \underline{b}$

3. $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ $\Rightarrow$ Nem asszociatív Pl: $\underline{a} = \underline{b} \neq \underline{0}$, $\underline{c} \not\parallel \underline{a}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$

4. $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ $\Rightarrow$ Disztributív

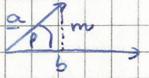
Tétel: $\underline{a} \parallel \underline{b} \Longleftrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ Két nullától különböző vektor akkor és csak akkor $\parallel$-os, ha vektoriális szorzatuk $\underline{0}$

Biz: Ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi = 0$

$\underline{a} \neq 0 \quad \underline{b} \neq 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \quad \varphi = 0° \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$
vagy $180°$

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és $\underline{a} \neq 0$, $\underline{b} \neq 0$ akkor $\underline{a} = \lambda \underline{b} \Rightarrow \lambda \underline{b} \times \underline{b} = \underline{0}$

Alkalmazás: $|\underline{a} \times \underline{b}| = \underline{a} \wedge \underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területe



$$T_p = |\underline{b}| \cdot m = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$$

Tétel: kifejtési tétel: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\underline{c})\underline{a}$

Vegyesszorzás: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ jele: $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

Alkalmazás: Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbrendszert alkotnak, akkor az általuk kifeszített hasáb térfogata: $V_h = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

Biz:

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem egysíkúak $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}| (\underline{a} \times \underline{b})_e \underline{c}$

$|\underline{a} \times \underline{b}| \rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített ▱ területe.

$(\underline{a} \times \underline{b})_e \cdot \underline{c} \rightarrow \underline{c}$ vektor vetülete az $\underline{a}\,\underline{b}$ síkjára merőleges vektorra (magasságra)

Tulajdonságok:

1. $\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$
2. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a}$

$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = -\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c}$

3. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0 \Longleftrightarrow$ 3 vektor egysíkú

Biz: a, b valamelyik $\underline{0} \Rightarrow \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{0}$

Ha egysíkúak: Ha $\underline{a} \parallel \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$

Ha $\underline{a} \not\parallel \underline{b} \Rightarrow \underline{a}\,\underline{b}$ kifeszít síkot $\Rightarrow \underline{c}$ párhuzamos ezzel $\Rightarrow \underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b} \Rightarrow (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = 0$

b, $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$

Skaláris szorzás 0, ha valamelyik tényező $\underline{0} \Rightarrow$ Ha $\underline{c} = \underline{0}$ vagy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow$ Egysíkúak

vagy $\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b} \Rightarrow \underline{c}$ $\parallel$-os $\underline{a}\,\underline{b}$ síkkal

4/3 **Vektor koordinátás alakja:**

- Vektorokat rendezett számhármassal jellemezzük.

Def: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \Rightarrow$ lineárisan független vektorhármas, mellyel $\underline{x}$ előállítható

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

$x_1, x_2, x_3 \Rightarrow$ rendezett szám 3-as $\Rightarrow \underline{x}: \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátái.

Rögzít bázisvektorokat: $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \Rightarrow$ páronként egymásra merőleges + jobbrendszer egységvektorok.

$\rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\underline{a} = \underline{b} \iff a_1 = b_1, \; a_2 = b_2 \quad a_3 = b_3$

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

Műveletek koordinátás alakban:

~~[illegible]~~ összeadás - kivonás:

$$\underline{a} \pm \underline{b} = (a_1 \pm b_1)\underline{i} + (a_2 \pm b_2)\underline{j} + (a_3 \pm b_3)\underline{k}$$

szorzás skalárral:

$$k \in \mathbb{R} \quad k \cdot \underline{a} = k a_1 \underline{i} + k a_2 \underline{j} + k a_3 \underline{k}$$

Skaláris szorzás: $\underline{i} \cdot \underline{j} = 0 \quad \underline{i}\,\underline{k} = 0 \quad \underline{j}\,\underline{k} = 0 \quad \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$

$$\underline{a}\,\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Vektoriális szorzás:

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0} \qquad \underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j} \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$

$\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k} \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j} \quad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$$\underline{a} \times \underline{b} = a_1 \cdot b_2\, \underline{k} - a_1 \cdot b_3\, \underline{j} - a_2 b_1 \cdot \underline{k} + a_2 b_3\, \underline{i} + a_3 b_1 \underline{j} - a_3 b_2\, \underline{i}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vegyesszorzat:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$$

2/1

2. A térbeli analitikus geometria elemei: egyenesek és sík egyenlete távolsági és metszési feladatok megoldásának ismertetése

Térvektorokat felhasználhatjuk arra, hogy velük a tér pontjait jellemezzük, és segítségükkel mértani (geometriai) problémákat algebrai úton oldjunk meg.

Adott: Térbeli derékszögű koordinátarendszer
tengelyei: x, y, z jobbrendszer
tengelysíkok: xy, xz, yz
tengelyek közös metszéspontja: origó: O

Definíció: Rögzített O pontból egy tetszőleges P pontba mutató $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ vektort P pont helyvektorának nevezzük.

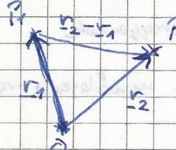
Á.helyt.
Térvektorok és a tér pontjai között kölcsönösen egyértelmű a megfelelés.

Ha 3 bázisvektort (pl: $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) is rögzítünk, akkor a tér pontjai és a rendezett számhármasok között is kölcsönösen egyértelmű relációt létesítünk.

Az $\underline{r}$ helyvektor koordinátáit nevezzük a P pont koordinátáinak.

A Geometriai alakzat egyenlete (egyenletrendszere): olyan egyenlet, amelyet az alakzat minden pontjának koordinátái kielégítenek, de más pontok koordinátái nem.

Tétel: Két pont távolsága: $d_{P_1P_2}$



$$\underline{r}_1 = x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k}$$

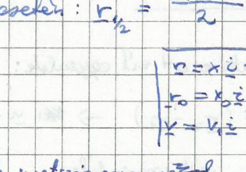
$$\underline{r}_2 = x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 = (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j} + (z_2 - z_1)\underline{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \boxed{d_{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

Szakaszt adott arányban osztó pont helyvektora:

$$|\overrightarrow{P_1Q}| : |\overrightarrow{QP_2}| = m : n$$



$$(\underline{r}_q - \underline{r}_1)\cdot n = (\underline{r}_2 - \underline{r}_q)\, m$$

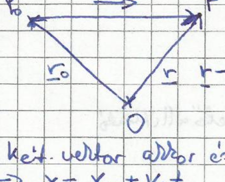
$$\underline{r}_q \cdot n + \underline{r}_q \cdot m = \underline{r}_2 m + \underline{r}_1 n$$

$$\boxed{\underline{r}_q = \frac{\underline{r}_2 m + \underline{r}_1 n}{m+n}}$$ felező pont esetén: $\underline{r}_{1/2} = \dfrac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2}$

Egyenes Egyenlete:

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$
$\underline{r}_0 = x_0\underline{i} + y_0\underline{j} + z_0\underline{k}$
$\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$

- Egyenest megadhatjuk:
  - 2 ponttal
  - 2 nem ||-os sík metszésegyenese
  - 1 pont és az egyenes irányvektora



$\underline{r} - \underline{r}_0 \parallel \underline{v} \Rightarrow \underline{r} - \underline{r}_0 = t\cdot\underline{v} \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{v}}$ Ez az egyenes paraméteres vektoregyenlete

Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátáik =ek $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = x_0 + v_1 t$
$y = y_0 + v_2 t$
$z = z_0 + v_3 t$

Ha irányvektor egyik koordinátája sem 0 t kifejezhető $\Rightarrow$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

$(v_1, v_2, v_3 \neq 0) \Rightarrow$ irányvektor egyik tengelysíkkal sem ||.

Ha $v_2 \wedge v_3 = 0$ ⇒ egyenes az x tengellyel ∥-os

$$x = x_0 + v_1 t \qquad y = y_0 \qquad z = z_0$$

Ha $v_3 = 0$ ⇒ az egyenes ~~...~~ ∥-os az xy síkkal

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} \qquad z = z_0$$

Ha t paraméter a valós számok halmazának csak részhalmazán fut végig, akkor olyan geometriai alakzat egyenletét kapjuk, amely rajta fekszik az illető egyenesen, de nem fedi azt.

- Egyenes egyenlete megadható vektoriális szorzat segítségével is: $(\underline{r}-\underline{r}_0)\times\underline{v}=\underline{0}$

Sík egyenlete:

Síkot megadja:
- 3 pont, ha nem esik egy egyenesbe
- 2 egyenes
- 1 pont és a sík normálvektora (síkra merőleges vektor)

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \underline{n}[n_1, n_2, n_3]$ $\quad P(x, y, z)$

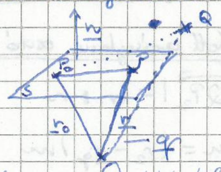
Sík tetszőleges pontjának $\underline{r}$ helyvektora kielégíti a következő egyenletet:

(1) $\boxed{(\underline{r}-\underline{r}_0)\cdot\underline{n}=0}$ mivel $\underline{r}-\underline{r}_0 \perp \underline{n}$ sík vektoregyenlete

Más pontok nem elégítik ki, mert $\underline{q}-\underline{r}_0$ nem merőleges $\underline{n}$-re
(ha nincs rajta S síkon)

$\underline{r} = x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$ $\quad \underline{r}_0 = x_0\underline{i}+y_0\underline{j}+z_0\underline{k}$ $\quad \underline{n}=n_1\underline{i}+n_2\underline{j}+n_3\underline{k}$

$\boxed{(x-x_0)n_1+(y-y_0)n_2+(z-z_0)n_3=0}$ → Koordinátás alakja a sík egyenletének



$D = -(n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0)$ $\quad n_1=A,\ n_2=B,\ n_3=C$

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ sík általános egyenlete

Sík egyenletének Hesse féle normálalakja: Egyenletet $\underline{n}_e$-vel írjuk fel

→ $\boxed{(\underline{r}-\underline{r}_0)\cdot\underline{n}_e=0}$ → igen alkalmas $d(P,S)$ meghatározására.
$\underline{r}-\underline{r}_0$ vektor vetülete $\underline{n}_e$-re pont az előjeles távolság.

3 pont által meghatározott sík egyenlete: P_1, P_2, P_3 nem egy egyenesen fekszik

$\underline{n}=(\underline{r}_3-\underline{r}_1)\times(\underline{r}_2-\underline{r}_1)$ → $\underline{n}$-t beír (1)-be

Sík 2 paraméteres vektoregyenlete:
Adott: $P_0 \in S \to \underline{r}_0$ + S ∥ $\underline{u}$ és $\underline{v}$ $\quad \underline{u} \nparallel \underline{v}$

S sík P pontjának helyvektora: $\underline{r}=\underline{r}_0+\underbrace{t_1\underline{u}+t_2\underline{v}}$

Ezzel S sík bármely vektora előállítható
$\underline{r}-\underline{r}_0$ is.

2/2

a, 2 pont távolsága ✓
b, Pont és sík távolsága
c, Pont és egyenes távolsága
d, két egyenes távolsága

Helyzetgeometriai feladatok: (metszési, illeszkedési ∧ ||-sági feladatok)

alapelv: 1. G_1 geometriai alakzat akkor és csak akkor illeszkedik G_2 g. a-ra, ha G_1 minden pontjának koordinátái kielégítik a G_2 egyenletét.

2. metszet azokból a pontokból áll, amelyek koordinátái mindegyik alakzat egyenletét kielégítik.

2 egyenes kölcsönös helyzete: - egyező állású → egybeeső
→ párhuzamos
- különböző állású → metsző
→ kitérő

~~a és b egyező állású ⟺ a ∥ b~~

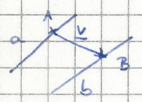
$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{a} = k\underline{b} \quad k \in \mathbb{R}$

egyező állású

egyik egy. koordinátáját behelyettesít másik egyenletbe → kielégíti → egybeeső
→ ∅ elégíti ki → ||-os

különböző állású:

a és b egysíkú, ha $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{v} = 0$
→ metszők



Metszéspont van-e: egyenletrendszert megold: → nincs megoldás → kitérő egyenes
→ van megoldás → metsző egyenes → megoldás metszéspont

2 sík kölcsönös helyzete: - egyező állású (||) → egybeeső
→ párhuzamos
- különböző állású → metsző

S_1 sík → $\underline{n}_1$
S_2 sík → $\underline{n}_2$

$S_1 \parallel S_2 \iff \underline{n}_1 = k\underline{n}_2 \quad k \in \mathbb{R}$

(Ellenkező esetben metsző)

a, $A \in S_1$ → A koordinátáit behelyettesít S_2 egyenletébe → igaz → egybeeső
→ nem igaz → párhuzamos

b, $S_1 \wedge S_2$ egybeeső ha: $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$ és $D_1 = kD_2$

($S_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$)
($S_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$)

párhuzamos ha $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$ de. $D_1 \neq kD_2$!

metsző ha $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$

Metszésvonal meghatározás: ~~2 egyenlet(rendszer) közös pontjai~~
- a síkok normálisainak vektoriális szorzata az egyenes irányvektora
$\underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$
1 pontját egyenletrendszer megoldása adja

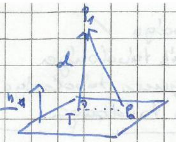
- 3 sík közös pontjainak meghatározása: megoldjuk egyenletrendszert.

- Egyenes és sík helyzete: illeszkedő, párhuzamos, metsző
$S: \underline{n}_1 \quad e: \underline{v} \qquad \underline{v} \perp \underline{n}_1 \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{n}_1 = 0$ → metszéspont, mint 2 egyenesnél

Távolságok:

b, d (pont - sík) $\quad P_1(x_1, y_1, z_1) \quad S: Ax + By + Cz + D = 0$

$\quad\; P_1 \qquad\quad S \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{n}(A, B, C)$



$$d(P_1, S) = |\overrightarrow{TP_1}| = \left| \frac{\overrightarrow{TP_1}}{|\overrightarrow{TP_1}|} \overrightarrow{P_0P_1} \right|$$

Ennek a merőleges vetülete TP_1-re

$$\frac{\overrightarrow{TP_1}}{|\overrightarrow{TP_1}|} = \pm \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \pm \frac{A\underline{i} + B\underline{j} + C\underline{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0)\underline{i} + (y_1 - y_0)\underline{j} + (z_1 - z_0)\underline{k}$$

egyező állású $\underline{n}$-nel

$$d(P_1, S) = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\boxed{d(P_1, S) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

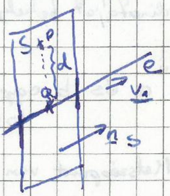
Erre vezethető vissza || síkok távolsága, egyenes + || sík távolsága

c) Pont és egyenes távolsága → pontból egyenesre bocsátott merőleges szakasz

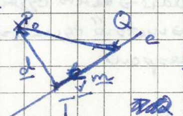
I, (P) $\quad$ (e) $\quad P_0(x_0, y_1, z_0) \quad e: \underline{v}_e$

↳ S sík: $P \in S \ \wedge \ \underline{v} = \underline{n}_S$ → sík normálvektora

↳ keres döféspontot ⇒ nézi PQ távolságot (Q)



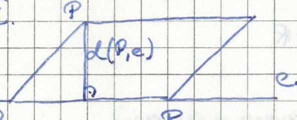
II



$\underline{v}_e = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \qquad m = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \cdot \overrightarrow{QP_0} \qquad \underline{m} = \underline{v}_e \cdot m$

$$\boxed{d(P, e) = |\underline{m} - \overrightarrow{QP_0}|}$$

III.



$$\left.\begin{aligned} T &= |\overrightarrow{QR}| \cdot d(P, e) \\ T &= |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d(P, e) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|}}$$

d, 2 egyenes távolsága:

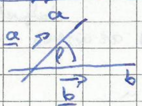
- ||-os egyenesek ⇒ mint, pont - egyenes távolsága
- metsző egyenesek ⇒ 0
- 2 kitérő egyenes távolsága: normáltranszverzálisuk (mind 2 egyenesre merőleges egyenes) hossza. (2 egyenes közé eső szakasza)

↳ a, b egyenes → $\underline{a}$, $\underline{b}$ irányvektoraik A, B pontjaik.

$\underline{c} = \overrightarrow{AB}$

$$\left.\begin{aligned} V &= |\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}| = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}| \\ V &= |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot d(a, b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d(a, b) = \frac{|(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|}{|\underline{a} \times \underline{b}|}}$$

2 egyenes szöge:



$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos \varphi \Rightarrow \boxed{\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}}$$

2 sík szöge: egyenlő normálvektoraik szögével v. annak kiegészítő szögével.

Sík + egyenes szöge: sík normálvektora és az egyenes által bezárt szög pótszöge.

3/1 3. Műveletek mátrixok körében. Az inverz mátrix fogalma, létezésének szükséges és elégséges feltétele, meghatározásának módja. A mátrix rangjának fogalma.

$\boxed{\text{Mátrix}}$: - számok téglalap alakú elrendezése
- Az m sorba és n oszlopba rendezett m·n elemű sorozatokat m×n típusú mátrixoknak nevezzük.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{2d} & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ a_{mn} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. index: sorindex
2. index: oszlopindex

$\underline{\underline{A}} = a_{ij}$; $i = 1 \dots m$ $j = 1 \dots n$

Speciális mátrixok:
- Ha $m = n \Rightarrow$ n-ed rendű négyzetes (kvadratikus) mátrix
- Ha $n = 1 \Rightarrow$ oszlop mátrix jele: $\underline{b}$ v. $\underline{b}$
- Ha $m = 1 \Rightarrow$ sor mátrix jele: $\underline{b}^T$ v $\underline{b}^T$
- Ha $m = n \wedge \forall i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0 \Rightarrow$ diagonál mátrix
- Ha $m = n \wedge \forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \wedge \forall i = j \Rightarrow a_{ij} = 1 \rightarrow$ Egységmátrix jele: $\underline{\underline{E}}$
- Δ mátrix: főátló feletti v. alatti elemek 0-ák.

Def: A sorok és oszlopok felcserélésével nyert mátrixot az eredeti mátrix transzponáltjának nevezzük jele: $\underline{\underline{A}}^T$ /Tükrözés főátlóra/

Def: - Ha $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \Rightarrow$ szimmetrikus mátrix
- Ha $\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T \Rightarrow$ antiszimmetrikus mátrix

Def. Főátló: azokból az elemekből áll, melyeknek sor és oszlopindexük egyenlő
$a_{11}, a_{22} \dots a_{rr}$ $r = m$ v. n közül a kisebbel.
Mellékátló: azokból az elemekből áll, melyeknek a sor és oszlopindex összege $n+1$

Műveletek mátrixokkal:

Def: 2 mátrix egyenlősége: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$ ha azonos méretűek ($\underline{\underline{A}}_{ij}, \underline{\underline{B}}_{ij}$) $\wedge$ $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ i-re

Összeadás: Azonos méretű mátrixok között definiáljuk

Azonos m×n típusú $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrix $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegén az a szintén m×n típusú mátrixot értjük, amelynek i-edik sora az $\underline{\underline{A}}$ i-edik sorának és a $\underline{\underline{B}}$ i-edik sorának összege.

Jelöléssel: $\underline{\underline{A}}_{ij} = (a_{ij})$ $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ összegén az azonos méretű: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ mátrixot értjük amelynek elemei: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

tulajdonságai:

$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \Rightarrow$ kommutatív

$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \Rightarrow$ asszociatív

$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{O}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}$-val azonos méretű, csupa 0 elemből áll $\Rightarrow$ nullmátrix

invertálható: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{X}}$: $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{A}}$ mátrix különbsége.

$\underline{\underline{X}}$: i-edik sorát úgy kapjuk, hogy a $\underline{\underline{B}}$ mátrix i-edik sorából kivonjuk a $\underline{\underline{A}}$ i-edik sorát.

Szorzás számmal: $c \cdot \underline{\underline{A}} = (c \cdot a_{ij})$

tulajdonságai: $c_1(c_2 \underline{\underline{A}}) = (c_1 c_2)\underline{\underline{A}}$ → asszociatív

$(c_1 + c_2)\underline{\underline{A}} = c_1\underline{\underline{A}} + c_2\underline{\underline{A}}$
$c(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = c\underline{\underline{A}} + c\underline{\underline{B}}$ } disztributív

kivonás ~~úmásúb~~ értelmezése: $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} + (-1)\cdot\underline{\underline{B}}$

$$* \; x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & \vdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{A}}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{A}}} \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n n-1} & b_n \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{A}}}$$

Mátrix szorzata oszlop(vektorral)mátrixszal:

$\underline{\underline{A}} = (a_{mn}) \quad \underline{b} = (b_n) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{b} = (c_{i}); \; i = 1 \dots m$

$c_i = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + \dots + a_{in} b_n$

A szorzás csak akkor végezhető el, ha oszlopmátrix sorainak száma megegyezik az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlopainak számával.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Két mátrix szorzata:

Def: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ mátrixszal való szorzását oly módon értelmezzük, hogy a szorzat mátrix oszlopait az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ oszlopaival való szorzatai adják ⇒

$\Rightarrow a_{mn} \cdot b_{nk} \longrightarrow c_{mk}$

$\underline{\underline{A}} = (a_{mn}) \quad \underline{\underline{B}} = (b_{nk}) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \quad \boxed{c_{mk} = a_{m1}\cdot b_{1k} + a_{m2}\cdot b_{2k} + \dots + a_{mn} b_{nk}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdot & c_{mk} \end{pmatrix}$$

Tulajdonságai:

- $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}$ ⇒ nem kommutatív (Tényezőket felcserélve a szorzás többnyire el sem végezhető)
- $(\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}})\cdot\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}})$ ⇒ Szorzás asszociatív
- $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}$ ⇒ disztributív

Feltétel: szorzások elvégezhetőek legyenek

- Ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot megszorozzuk egy megfelelő $\underline{\underline{E}} = (e_{ij})$ kvadratikus mátrixszal, akkor $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

def: Egységmátrix, olyan kvadratikus mátrix melynek elemei: e_{ij}

def: $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha van olyan $\underline{\underline{X}}$ mátrix amely az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ egyenletet kielégíti ($\underline{\underline{X}}$-el balról v. jobbról szorozva)

Az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot $\underline{\underline{A}}$ inverzének nevezzük. jele: $\underline{\underline{A}}^{-1}$

tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$-nak van inverze, akkor az egyértelmű

Biz: $\underline{\underline{X}}_1 \wedge \underline{\underline{X}}_2$ $\underline{\underline{A}}$ inverze, ekkor: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{E}} \quad /\cdot\underline{\underline{X}}_2$ (balról)

$\underline{\underline{X}}_2(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_1) = \underline{\underline{X}}_2 \Rightarrow$ asszociatív: $\underbrace{(\underline{\underline{X}}_2\underline{\underline{A}})}_{\underline{\underline{E}}}\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2$

$\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2$

Cramer-szabály:

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{b} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} |A_{11}| & \dots & (-1)^{1+n}|A_{n1}| \\ \vdots & & \\ (-1)^{1+n}|A_{1n}| & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

*

$$x_1 = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}\cdot|A_{11}|b_1 - |A_{21}|b_2 + \dots + (-1)^{1+n}|A_{n1}|b_n$$

3/2

Mátrixok elemi transzformációi:

1. 2 sor ill. oszlop felcserélése
2. vmelyik sor ill. oszlop szorzása egy számmal.
3. vmelyik sorának ill. oszlopának számszorosának a mátrix egy másik sorához ill. oszlopához való hozzáadása

Mátrix rangja:

A mátrix lineárisan független sorainak a számát a mátrix sorrangjának, lineárisan független oszlopainak a számát a mátrix oszloprangjának nevezzük.
Bizonyítható, hogy a kettő megegyezik ⇒ mátrix rangja
Rang megállapítása: elemi sor- és oszlopműveletekkel + lineáris függetlenség vizsgálatával

* (vektor → sor, oszlop; vektorrendszer → mátrix)

1. Ha $\underline{0}$ van a vektorrendszerben, akkor az lineárisan összefüggő
2. Ha egy vektor és annak skalárszorosa is szerepel a vektorrendszerben, akkor az lineárisan összefüggő
3. lineárisan összefüggő vektorrendszer tetszőleges vektorral kiegészítve, marad összefüggő; lineárisan független vektorrendszerből elhagyva tetszőleges vektorokat, marad független
4. Ha a vektorrendszer vmely vektorának skalárszorosát hozzáadjuk a rendszer egy másik vektorához, a rendszer lineáris függetlenség szempontjából nem változik

Determináns:

A harmadrendű kvadratikus mátrixokhoz a vektorok vegyesszorzatánál hozzárendeltünk az elemekből egyértelműen meghatározott számot, azaz értelmeztük a harmadrendű determináns fogalmát. ⇒ általánosít kvadratikus mátrixokra

Def: n-edrendű determinánsnak azt a fo-t nevezzük, amely az n-edrendű kvadratikus mátrixhoz rendel számot a következő módon:

I. $\det \underline{E} = 1$

II. $\det(\underline{a}_1 \dots c\underline{a}_i \dots \underline{a}_n) = c\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \dots \underline{a}_n)$

A mátrix vmely sorát megszorozva egy c számmal, értéke c-vel szorzódjék

III. $\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i + \underline{b} \dots \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{b} \dots \underline{a}_n)$

IV. ~~...~~ $\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i\ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0$ ha $\underline{a}_i = \underline{a}_{i+1}$

Ha a mátrix 2 sora megegyezik, akkor a determináns értéke legyen 0

Azt a számot, amelyet a determináns a kvadratikus $\underline{A}$ mátrixhoz rendel, az $\underline{A}$ mátrix determinánsának nevezzük, jele: $\det \underline{A}$, $|\underline{A}|$, $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$

⇒ A 4 axióma egyértelműen meghatározza tetszőleges kvadratikus mátrix determinánsát

Tételek:

1. Ha $\underline{A}$ egyik sora csupa nulla elemből áll ⇒ $\det \underline{A} = 0$

Biz: II. axióma $c \neq 0$ $c\det\underline{A} = \det\underline{A}$ (Ha c-vel a 0 sort szorozzuk) ⇒ $\det \underline{A} = 0$

2. Ha 2 sorát felcseréljük, a determináns (-1)-gyel szorzódik: $\det \underline{A}_1 = -\det \underline{A}$

Biz: 2 oszlop felcserélése mindig páratlan számú szomszédos sor cserével oldható meg ⇒ elég azt be-látni.

$\underline{\underline{A}}$-t módosít: i és $i+1$ oszlopába $\underline{a}_i+\underline{a}_{i+1}$-et írunk $\Rightarrow$ 4. axióma miatt $\det \underline{\underline{A}}_M = 0$

3. axióma miatt felírható: $\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \ \underline{a}_i+\underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1} \ \underline{a}_i+\underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0$

ismét 3. axiómát használ: $\underbrace{\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \ \underline{a}_i \dots \underline{a}_n)}_{\text{4. ax. miatt } = 0} + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1} \ \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) +$
$\underbrace{\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1} \ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n)}_{\text{4. ax. miatt } = 0} = 0 \Rightarrow \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = -\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1} \ \underline{a}_i \dots \underline{a}_n)$

$\boxed{3.}$ Mátrix melyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának konstansszorosát, determináns nem változik.

Def: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minormátrixának azokat a mátrixokat nevezzük, amelyek az $\underline{\underline{A}}$ mátrix bizonyos sorainak és oszlopainak törlésével keletkeznek.

jelölés: i,j törlésével $\Rightarrow \underline{\underline{A}}_{ij}$

Determináns kiszámítása:

- Elemi sorműveletekkel a mátrix egységmátrixá v. nullasorvektort tartalmazó mátrixá alakítható.
- Fenti tételekkel segítségével
- Kifejtési tétel segítségével: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \underbrace{\underline{\underline{A}}_{ij}}$ $\Rightarrow$ (i,j törlésével előállított minormátrix)

$\Rightarrow$ $n \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsának i-edik sor szerinti kifejtése.

Tehát: $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa előállítható úgy, hogy tetszőleges ~~oszl~~ sorának minden elemét rendre megszorozzuk a hozzá tartozó minormátrix megfelelő előjellel ellátott determinánsával és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Tétel: $\boxed{4}$ $\triangle$ mátrix determinánsa a főátló elemeinek szorzata

$\boxed{5}$ $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow$ Sorokra kimondott tételek oszlopokra is igazak.

Mátrix és Transzponáltjának determinánsa $=$

$\boxed{6}$ $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$

$\boxed{7}$ Ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható, akkor $\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$ $\Rightarrow$ Invertálható mátrix determinánsa nem lehet 0.

Biz: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$ $\Rightarrow$ 6. tételből $\Rightarrow \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{A}}^{-1} = 1$

Determináns – rang kapcsolat: egy mátrix det.-a akkor és csak akkor 0, ha oszlop ill. sorvektorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = (a_{nn}) \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = 0 \Longleftrightarrow \text{rang } \underline{\underline{A}} < n$

A k sorból és n oszlopból álló $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja egyenlő $\underline{\underline{A}}$ legnagyobb méretű nullától különböző determinánsú kvadratikus minormátrixának sor ill. oszlopszámával.

Inverz mátrix létezésének szükséges és elégséges feltétele és meghatározásának módja:

Tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{A}}_b^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$, akkor $\underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_b^{-1}$

Biz: $\underbrace{(\underline{\underline{A}}_b^{-1} \cdot \underline{\underline{A}})}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_j^{-1}$ $\Rightarrow$ asszociativitás miatt: $\underline{\underline{A}}_b^{-1} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}_j^{-1})}_{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_b^{-1}$

Tétel: $n \times n$-es kvadratikus mátrix akkor és csak akkor van inverze, ha $\underline{\underline{A}}$ sorai mind lineárisan függetlenek (rend = rang) és akkor $\underline{\underline{A}}^{-1}$ inverzmátrixa egyértelműen létezik.

Meghat. módja: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$ egyenlet felírható: $\underline{\underline{A}}(\underline{x}_1, \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n) = \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_n$ alakban. $\Rightarrow$ Felfogható úgy, hogy n db lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát vizsgáljuk + megoldást keressük. Megoldás van, ha $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja megegyezik $\underline{\underline{A}}\,\underline{e}_i$ kibővített mátrix rangjával. $\Rightarrow$ Megoldás Gauss-módszer: $\underline{\underline{A}}$ után írt $\underline{\underline{E}}$ mátrixot $\Rightarrow$ sorműveletekkel ameddig $\underline{\underline{E}}$ mátrixot csinálunk $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Egységmátrix [illegible] kapo inverz mátrixot.

4/1

④. Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^n$-ben. Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága, a megoldások száma. A megoldás módjai

$\mathbb{R}^n$ – n dimenziós Euklideszi vektortér.

$\mathbb{R}^n$-vektortér: rendezett valós szám n-esek halmaza, melyek elemei között az összeadást, a valós számmal szorzást és a skaláris szorzást úgy értelmezzük, mintha a térvektorok $\underline{b}$-ü koordináta rendszerbeli alakjával számolnánk.

Def: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

összeadás: $\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ tulajdonságok:
- kommutatív $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
- asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
- $\exists\, \underline{0}$ (nullelem) $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
- $\exists\, -\underline{a}$ (additív inverz) $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$ ⇒ Segítségével értelmezhető a kivonás

számmal szorzás: $c \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ \vdots \\ c \cdot a_n \end{pmatrix}$ tulajdonságok:
- asszociatív: $(c_1 \cdot c_2)\underline{a} = c_1 (c_2 \underline{a})$
- disztributív: $c(\underline{a} + \underline{b}) = c\underline{a} + c\underline{b}$
- $(c_1 + c_2)\underline{a} = c_1\underline{a} + c_2\underline{a}$
- Eggyel szorozva vektor értéke nem változik ($1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$)

skaláris szorzás: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{pmatrix}$ tulajdonságai:
- kommutatív: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- disztributív: $(\underline{a} + \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\underline{c} + \underline{b}\underline{c}$

Következmények:

① 1 nullelement van.

Biz: $\underline{0}_1 + \underline{0}_2 = \underline{0}_1$ mert $\underline{0}_2$ nullelem
$\underline{0}_2 + \underline{0}_1 = \underline{0}_2$ mert $\underline{0}_1$ nullelem } kommutativitás felhasználva $\underline{0}_1 = \underline{0}_2$

② $\underline{0}$ és 0 (nulla skalár) tulajdonság: $c \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$0 \cdot \underline{a} = \underline{0}$

③ Additív inverz egyértelmű

Lineáris kombináció: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \underline{a}_k$
↳ $\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{a}_i$ $c_i \in \mathbb{R}$

Definíció: $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ $\mathbb{R}^n$-beli elemek lineárisan összefüggőek, ha vannak olyan $c_1 \ldots c_n$ számok, amelyek nem mind 0-k és $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{a}_i = \underline{0}$

Ha nullvektort az $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ vektoroknak csak a $c_i = 0$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációja állítja elő ("triviális előállítás") akkor $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek

Tételek:

① Ha az $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ vektorok között van $\underline{0}$ ⇒ lineárisan összefüggő
Mert $\underline{0}$-hoz tartozó c tetszőleges értéket felvehet

②
a, Ha az $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ vektorok között van 2 egyenlő ⇒ lineárisan összefüggő
$\underline{a}_i = \underline{a}_j \to c_i = -c_j \to$ bármely szám jó.

b, Ha az $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$ vektorok között bármely vektor számszorosa egy másiknak → lin. összefüggő
$\underline{a}_i = d \cdot \underline{a}_j \to c_i = -c_j \cdot d \to$ bármely szám jó

(3) Ha $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor a vektortér bármely vektorát hozzávéve $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}$ ⇒ lin összefüggő marad.

Biz: Ha $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{a}_i = \underline{0}$ ∧ nem minden $c=0$, akkor $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \underline{a}_i = \underline{0}$ ha $c_{n+1} = 0$

(4) lineárisan független $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorrendszerből tetszőleges vektort elhagyva, a rendszer független marad Biz → előzőre visszavezetve

(5) Az $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan vektor, amely a többiek lineáris kombinációjaként előállítható.

Biz: a) Ha $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{a}_i = \underline{0}$ úgy hogy van 0-tól különböző együttható, ~~akkor~~ (pl: $c_j \neq 0$), akkor az $\underline{a}_j$ vektor kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként

b) Ha valamelyik vektor (pl: i) kifejezhető a többivel:

$\underline{a}_i = \underbrace{c_1 \underline{a}_1 \dots + c_n \underline{a}_n}_{x}$, akkor nullvektor előállítható: $\underline{x} - \underline{a}_i = \underline{0}$

együtthatója -1 ⇒ összefüggő rendszer.

(6) Ha az $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ lineárisan független (függő) vektorrendszer bármely vektorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik vektorához, az új vektorrendszer marad változatlanul lineárisan független (függő).

Biz: a) $\underset{(1)}{\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n} \to \underset{(2)}{\underline{a}_1, \underline{a}_2 + c\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n}$ lin. független ~~marad~~ volt

(2) $c_1 \underline{a}_1 + c_2(\underline{a}_2 + c\underline{a}_1) + c_3 \underline{a}_3 + \dots + c_n \underline{a}_n = \underline{0}$ → átrendez

$(c_1 + c_2 c)\underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 + \dots + c_n \underline{a}_n = \underline{0}$

Ha lineárisan függetlenek akkor $c_2, \dots, c_n = 0$ ∧ $c_1 + c_2 c = 0$

⇒ $c_1 = 0$ ⇒ (2) lineárisan független maradt.

b) Ha (1) lineárisan összefüggő, (2)-es nem lehet független, mivel (2)-ből az (1)-est olyan átalakítással nyerjük ($-c\underline{a}_1$-et adunk a második taghoz), amely megtartja a függetlenséget.

Def: $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorrendszert ($a_i \in \mathbb{R}^n$) az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\boxed{\text{bázisának}}$ nevezzük, ha a vektorrendszer lineárisan független és $\mathbb{R}^n$ minden vektorát lineáris kombinációként előállítja.

$\mathbb{R}^n$ ∀ bázisa n elemű, ∀ lineárisan független n elemű vektorrendszer jó bázisnak

Def: A vektortér bázis vektorainak a számát a vektortér dimenziójának nevezzük.

Tétel: Ha a vektortér egy bázisához a vektortér bármely elemét hozzávesszük, összefüggő vektorrendszert kapunk.

Biz: $\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n$ → bázis $\underline{v} \in V$ (vektortérnek) $\underline{v} = \sum^n v_i \underline{b}_i$ ⇒ $\sum^n v_i \underline{b}_i - \underline{v} = \underline{0}$ ⇒ lin összefügg.

Altér: $H \subset \mathbb{R}^n$ H zárt az összeadásra és számmal szorzásra, akkor H-t $\mathbb{R}^n$ alterének nevezzük

Lineáris egyenletrendszerek.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}\right\} x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots x_n \underline{a}_n = \underline{b}$$ vektor egyenlet alak

↑ n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer

együtthatók $k \times n$ méretű mátrixa és a $\underline{b}$ oszlopvektor segítségével az egyenletrendszer a következő alakban is felírható: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ⇒ ~~Megoldhatóság~~ ~~kérdése~~

412

Egyenletrendszer kibővített mátrixa: $\underline{A}$ mátrixhoz n+1 oszlopként hozzávesszük a $\underline{b}$ vektort.

Megoldhatóság kérdése másként: k dimenziós oszlopvektortér $\underline{b}$ vektora előállítható-e a vektortér $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ vektorainak lineáris kombinációjaként?

A lineáris egyenletrendszer megoldhatósága:

Az $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása $\underline{x} = \underline{0}$ mindig kielégíti

Ha $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n$ lin. független akkor csak triviális megoldás van: $\underline{x} = \underline{0}$

Ha lineárisan összefüggők ⇒ végtelen sok megoldás van.

Az $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$ egyenletrendszernek nem biztos, hogy van megoldása.

Tétel: $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$, akkor és csak akkor oldható meg ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n$ és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots \underline{a}_n, \underline{b}$ vektorrendszerekben azonos számú lineárisan független vektor van.

Más formában: megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy az együttható mátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezzen. ⇒

⇒ Homogénnek mindig van

Megoldás módja:

① Gauss eljárás

elemi sorműveletekkel a mátrix egyszerűbb alakra hozható, miközben a rangja nem változik. Egyszerűbb alakból könnyebben meghatározható mátrix rangja.

Elemi sorműveleteket kibővített mátrixon hajtjuk végre ⇒ a lineáris egyenletrendszeren ekvivalens átalakításokat végzünk ⇒ egyszerűbb alakból megoldások kiolvashatók

Megoldások száma:

homogén egyenletrendszer: $x_1\underline{a}_1 + \dots x_n\underline{a}_n = \underline{0}$

akkor van egyetlen megoldás, ha együttható mátrix oszlopai lineárisan függetlenek vagyis ha a mátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. (rang $\underline{A} = n$)

Ha rang $\underline{A} < n$ → végtelen sok megoldás van.

dim (megoldástér) = n − rang $\underline{A}$ (↳ megadja hány paraméter marad megoldásban)

↳ lineárisan független megoldások száma → ezek kombinációjából minden megoldás előállítható

Inhomogén egyenletrendszer: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ ($\underline{b} \neq \underline{0}$)

bármely $\underline{x}_i$ megoldása előállítható az inhomogén egyenletrendszer egy tetszőleges $\underline{x}_p$ (partikuláris megoldásának) és az $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer egy $\underline{x}_h$ megoldásának összegeként.

Biz: Megmutat: $\underline{x}_i - \underline{x}_p$ megoldása az $\underline{A}\,\underline{x} = 0$ egyenletnek

Behelyettesítéssel: $\underline{A}\,(\underline{x}_i - \underline{x}_p) = \underbrace{\underline{A}\,\underline{x}_i}_{=\underline{b}} - \underbrace{\underline{A}\,\underline{x}_p}_{=\underline{b}} = \underline{0} = \underline{A}\,(\underbrace{\underline{x}_i - \underline{x}_p}_{\underline{x}_h})$ ⇒ $\boxed{\underline{x}_i - \underline{x}_p = \underline{x}_h}$ $\boxed{\underline{x}_i = \underline{x}_h + \underline{x}_p}$

Következmény: Ha az $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ megoldható, akkor megoldásainak száma megegyezik az $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenlet megoldásainak számával

$$\underline{x} = \underline{x}_p + \underbrace{c_1\underline{x}_{1h} + c_2\underline{x}_{2h} + \dots + c_r\underline{x}_{r,h}}_{\text{homogén egyenletrendszer}}$$ lineárisan független megoldásrendszere.

② Lineáris egyenletrendszer megoldható bázicsarével is.
bővített együttható mátrix oszlopvektorait lecseréljük az oszlopvektorokra

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ \vdots \\ e_{mi} \end{pmatrix} \qquad e_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq i \\ 1 & \text{ha } j = i \end{cases}$$

egységvektorokból álló lineárisan független első k darab oszlopvektorból álló alakú lesz.
Kiolvasás: $\Rightarrow \underline{x}_{ip} = \underline{b}_1$ + homogén egyenletrendszerek megoldásainak kiolvasása $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{x}_{ip} + c_1 \underline{x}_{k+1} + c_2 \underline{x}_{k+2} + \ldots + c_{n-k} \underline{x}_n$$

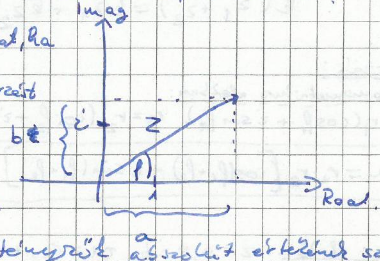
5/1.

5. A komplex számtest: a komplex számok algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakja. Műveletek a komplex számok körében

vektorműveletek sík vektorok halmazán => szorzás nem rendelkezik a valós számoknál megszokott műveleti tulajdonságokkal.

=> úgy definiáljuk műveleteket, hogy a szorzás invertálható legyen.

=> Síkvektorok ezekkel a műveletekkel testet alkotnak => komplex számtest



Def: Komplex számnak nevezzük a síkvektorokat, ha közöttük az összeadást és a valós számmal szorzást úgy értelmezzük, ahogy a vektoralgebrában definiáltuk, a szorzást pedig úgy, hogy a szorzat abszolút értéke legyen egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával, argumentuma pedig a tényezők argumentumainak összegével.

$|z \cdot u| = |z| \cdot |u|$

$\arc(z \cdot u) = \arc z + \arc u$

komplex szám: z -> ~~...~~ rögzített derékszögű koordináta rendszer

bázisvektorok: 1 és i
(egységvektorok)
↓ valós tengely ↓ képzetes tengely egységvektora

z komplex szám egyértelműen felírható kombinációjaként: $z = a \cdot 1 + b i$

röviden: $\boxed{z = a + bi}$ algebrai v. kanonikus alak
(a: valós szám, bi: tisztán képzetes szám)

$\arc z$ -> z-nek az x tengely (+) félegyenesével bezárt szöge.

(valós, képzetes rész és abszolút értéke egyértelműen meghatározott, DE $\arc z$ NEM (többértékű))

$\arc z = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad z = 0$-nak nincs egyértelműen meghatározott arcusa.

trigonometrikus alak: $\left.\begin{array}{l} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{array}\right\}$ polár koordináta rendszer

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ $\quad \varphi = \arc z, \; r = |z|$

* 2 vektor egyenlősége
*² vektor abszolút értéke

Műveletek:

1. Összeadás:
$z = a + ib \quad u = c + id$ -> vektoralgebra alapján $\boxed{z + u = (a+c) + i(b+d)}$

tulajdonságai: $z + u = u + z$ kommutatív

$(z+u)+v = z+(u+v)$ asszociatív

2, Kivonás:
$z - u = (a-c) + i(b-d)$

3. szorzás skalárral (valós számmal): $z = a + ib$ $k \in \mathbb{R}$

$$kz = ka + ikb$$

tulajdonságai: $k_1(k_2 z) = (k_1 k_2) z$

$$(k_1 + k_2) z = k_1 z + k_2 z$$

$$k(z_1 + z_2) = k z_1 + k z_2$$

*Tétel: $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

$z_1 = a_1 + b_1 i$

$z_2 = a_2 + b_2 i$

4. Szorzás:

trigonometrikus alakban:

$z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $u = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$\boxed{z \cdot u = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]}$ ⇐ definíció

*² z – hosszával egyenlő

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Tétel: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

algebrai alakban: $z = a_1 + ib_1$ $u = a_2 + ib_2$

$z \cdot u = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + i^2 b_1 b_2 =$

$= \boxed{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$.

$i \cdot i = 1 \cdot 1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -1$

tulajdonságai: kommutatív: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ asszociatív

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ disztributív

+ ~~Realkató~~ Tétel: $z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0$ v. $z_2 = 0$

5. osztás: → szorzás inverze

Def: $\left(\frac{z}{u}\right) \cdot u = z$ ha $u \neq 0$

szorzás definíciójából $\Rightarrow \arc\frac{z}{u} + \arc u = \arc z \Rightarrow$

$\Rightarrow \arc\frac{z}{u} = \arc z - \arc u$

$\left|\frac{z}{u}\right| \cdot |u| = |z| \Rightarrow \left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}$

komplex szám konjugáltja: $\bar{z}$

Def: $|\bar{z}| = |z|$ $\arc\bar{z} = -\arc z$

$z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} \to z$ tükörképe valós tengelyre

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

trigonometrikus alak:

$\boxed{z/u = \frac{r_z}{r_u}\left[\cos(\varphi_z - \varphi_u) + i\sin(\varphi_z - \varphi_u)\right]}$

$i^2 = -1$

algebrai alakban: $\frac{z}{u} = \frac{z \cdot \bar{u}}{u \cdot \bar{u}} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - i^2 b_1 b_2}{a_2^2 - i^2 b_2^2} =$

$\boxed{= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}}$

6. Hatványozás: → szorzás definíciójából következően

$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots z}_{n} = \boxed{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$ $n \in \mathbb{N}$

Ha $z \neq 0$ definiálható: $z^{-n} \Rightarrow z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

5|2. 7. Gyökvonás: → Hatványozás inverze

z komplex szám n-dik gyöke $\{\sqrt[n]{z}\}$, amelyre fennáll: $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$

Tétel: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számnak n darab különböző gyöke van,

(1) $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1}$

Biz: a, megmutat (1) n-dik hatványa bármely egész k-ra z

$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = r\left[\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)\right] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$

b, k helyébe: 0 → n-1 behelyettesít abszolut érték =, de arcusaik különböznek

arcusok: $\frac{\varphi}{n} \ldots \frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}$

c, megmutat csak ezek a számok gyök

- szorzás def. miatt csak (1)-es alakúak lehetnek a gyökök.
- abszolut érték =
- arcust kell vizsgálni: $k_1 \geq n \to k_1 = hn + m$ h, m egész $\wedge$ $0 \leq m \leq n$

$$\operatorname{arc} z_1 = \frac{\varphi}{n} + 2h\pi + \frac{2m\pi}{n} = \frac{\varphi + 2m\pi}{n}$$

- Megjegyzés: - z komplex szám n-edik gyökei az $\sqrt[n]{|z|}$ sugarú körbe írt szabályos n-szöget határozzák meg. (arcusok között a különbség $\frac{2\pi}{k}$)
- gyökvonás korlátlanul elvégezhető.

Egységgyökök: Def: $\sqrt[n]{1}$ $n \in \mathbb{N}$ értékeit n-edik egységgyököknek nevezzük

$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ + egységgyökök között az 1 mindig szerepel
+ minden nem valós ~~gyök~~ egységgyök konjugáltja is egységgyök

Komplex szám exponenciális alakja:

Euler formula: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{i\alpha_1 + i\alpha_2} = e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} = \cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)$

$e^{i\alpha_1 + i\alpha_2} = e^{i\alpha_1} \cdot e^{i\alpha_2}$

Definíció: z komplex szám exponenciális alapja: $\boxed{|z|\, e^{i \operatorname{arc} z}}$

Szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás egyszerűen végezhetők exponenciális alakban.

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $\quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ $\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\quad z^n = r^n e^{in\varphi}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ (ha $z_2 \neq 0$) $\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}$ $(k = 0, \ldots n-1)$

Tétel: Egységgyökök összege mindig nulla

Biz: $z_1 = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ $\quad \sum_{k=0}^{n-1} z = \underbrace{z_1^0 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}}_{\text{geometriai sorozat összege}} = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = 0$

$z_k = z_1^k$ $\quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \neq 1$

$z^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

Algebra alaptétele:

$P_n(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ $\quad a_i$-k valósak

n-ed fokú polinóm

Komplex számok körében n db gyöke van

$P_n(z) = 0 \Rightarrow z$ gyöke a polinómnak

konjugált

$z = a + bi \rightarrow a - bi = \overline{z}$

$P_n(\overline{z}) = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \ldots + a_n \overline{z}^n$

$z^2 : (a+bi)^2 \qquad (a-bi)^2 = (\overline{z})^2$

$\overline{P_n(z)} = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{(z^2)} + \ldots + a_n \overline{z^n} = 0$

$z^2 : a^2 - b^2 + 2iab \qquad a^2 - b^2 - 2iab = (\overline{z})^2$

$\overline{(z^2)}\ a^2 - b^2 - 2iab$

$a_2 \overline{z}^2 \qquad a_n \overline{z}^n$

$\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z}) \Rightarrow P_n(\overline{z}) = 0$

$\overline{(z^2)} = (\overline{z})^2$

Ha van komplex gyöke, akkor a konjugáltja is gyöke

$\Downarrow$

Páratlan fokszámú polinomnak mindig van valós gyöke is.
(mert akkor valamelyik komplexnek nem lenne párja)

6. Valós számsorozatok: konvergencia, divergencia fogalma és vizsgálata. A határérték létezésének elégséges feltétele. Konvergens sorozatok összegének, szorzatának hányadosának határértékéről szóló tételek

Def: Sorozaton olyan fv-t értünk, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza vagy annak valamely végtelen részhalmaza. A sorozatban az n nemnegatív számhoz rendelt elemet a sorozat n-edik elemének nevezzük.

Ha a sorozat minden eleme valós szám ⇒ valós számsorozat

véges sorozat: r elemű sorozat ért. tar. - a $\{1, 2 \dots r\}$

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \dots$

Megadás:
- képlettel: $a_n = \frac{1}{n}$
- ~~[illegible]~~ képzési utasítással $a_n = \begin{cases} \text{ha } n \text{ páros: } 1 \\ \text{ha } n \text{ páratlan: } -1 \end{cases}$
- grafikonnal
- rekurzív definícióval. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ a_1, a_2 meg kell adni

A sorozatok tulajdonságai:

(1) Korlátosság:

- Ha van olyan K szám, hogy $a_n \le K$ fennáll a számsorozat minden elemére, akkor a sorozatot felülről korlátosnak nevezzük. K → Felső korlát
- Ha van olyan k szám, hogy $a_n \ge k$ minden elemre, akkor a sorozatot alulról korlátosnak nevezzük. k ⇒ alsó korlát
- Ha egy sorozat alulról és felülről is korlátos, vagyis minden eleme hozzátartozik egy véges zárt intervallumhoz, akkor korlátosnak nevezzük

Kitüntetett szerep:
- legnagyobb k → a sorozat infinuma-a
- legkisebb K → a sorozat supremum-a

Pl:
- $a_n = n$ alulról korlátos inf: 1
- $a_n = \frac{1}{n}$ → korlátos sup: 1 (tagja is a sorozatnak)
  inf: 0 (nem tagja a sorozatnak)

(2) Monotonitás:

- Ha $a_n \le a_{n+1}$ fennáll minden n-re, akkor a sorozat monoton "növekedő" pl: $a_n = n$
- Ha $a_n \ge a_{n+1}$ fennáll minden n-re, akkor a sorozat monoton "csökkenő" pl: $a_n = \frac{1}{2^n}$

(3) Konvergencia:

Def: Ha létezik olyan A valós szám amelynek tetszőleges környezetében a sorozat minden eleme benne van véges sok kivétellel, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat <u>konvergens</u> és <u>határértéke</u> A szám.

szimbólumokkal: Ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz található olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, amennyiben $n > N(\varepsilon)$, akkor $\lim_{n \to \infty} a_n = A$

Ha a sorozatnak van véges határértéke ⇒ sorozat konvergens

Ha nincs ⇒ divergens

Pl: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$a_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 2k+1 \\ -1 & \text{ha } n = 2k \end{cases}$ ⇒ sorozat korlátos, de nincs határértéke ⇒ divergens.

Tételek: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ $c \in \mathbb{R}$

① $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

② $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ → Be kell látni: $|a_n + b_n - (A+B)|$ → tetszőlegesen kicsi

$$|a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

△ egyenlőtlenség $< \frac{\varepsilon}{2}$ ha $n > N_1$, $< \frac{\varepsilon}{2}$ ha $n > N_2$

Nagyobbikat kiválasztva, arra mindkettő igaz.

③ $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ → Be kell látni: $|a_n b_n - AB|$ → tetszőlegesen kicsi

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - A b_n + A b_n - AB| = |(a_n - A) b_n + A(b_n - B)|$$

$$|b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \leq |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|$$

Ha van határértéke, akkor a sorozat korlátos ⇒ szükséges feltétel ⇒ $|b_n| < K$

$$K\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < \varepsilon$$

tetszőlegesen kicsi

④ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ Ha $b_n \neq 0$, $B \neq 0$

Konvergencia és divergencia megállapítását segítő tételek:

- A konvergencia szükséges feltétele a korlátosság
- Ha egy sorozat monoton növekvő (fogyó) és felülről (alulról) korlátos, akkor konvergens (elégséges feltétel)
- Rendőrelv: $a_n \to A$, $b_n \to A$ $a_n \leq c_n \leq b_n$, akkor $c_n \to A$
- (Azonos fokszámú nevezővel és számlálóval rendelkező polinómok határértéke mindig megállapítható)

Példák: 1. c^n, ha $|c| < 1$ ⇒ konvergens határértéke: 0

2. $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n \quad |)^n$

$n = (1 + x_n)^n$ → Binomiális tétel, csak másodfokú tagot tart meg ⇒ jobb oldal több lesz

$$n \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$\frac{2n}{n(n-1)} \geq x_n^2$$

$$\underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\text{tart } \infty\text{-hez}} \geq x_n^2$$ → nullához tart ⇒ $1 + x_n \to 1$

3. $\sqrt[n]{a} \to 1$ (2)-es alapján: $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ (ha $n > a$) rendőrelv.

4. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ → monoton nő, felülről korlátos ($K=3$) ⇒ konvergens Határértéke: e

Divergens sorozatok:

① Korlátos divergens sorozatok:

A nem konvergens sorozatokat divergensnek nevezzük.

Ha egy sorozatnak a részsorozatai nem ugyanahhoz a számhoz konvergálnak, akkor a sorozat divergens. (Több "sűrűsödési értéke" van.)

② Nem korlátos sorozatok

konvergens ⇒ korlátos nem korlátos ⇒ divergens

Def: a_n sorozat a $+\infty$-hez divergál ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), ha $\forall K$ (>0) számhoz $\exists N(K)$, hogy $a_n > K$, ha $n > N(K)$ Pl: $a_n = n^2$

6/2

Def: a_n sorozat $-\infty$-hez divergál ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), ha $\forall k$ számhoz $\exists N(k)$, hogy $a_n < k$, ha $n > N(k)$ Pl: $a_n = 1 - n$

Tétel: Ha egy sorozat monoton növő és felülről nem korlátos, akkor $+\infty$-hez divergál, ha monoton fogyó és alulról nem korlátos, akkor $-\infty$-hez divergál.

Néhány következtetés:

- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$-ból $\not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$

Különbségnél sorozat viselkedésére nem vonható le következtetés

- A nem korlátos sorozatnak is lehet sűrűsödési értéke: az $a_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$ sorozat páros indexű elemei 0-hoz konvergálnak, de van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez divergáló részsorozata is.

~~Geo~~ (Véges) geometriai sorozat összege:

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^k = S_k \quad (1)$$
$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{k+1} = S_k \cdot q \quad (2)$$
$(2)-(1)$: $q^{k+1} - 1 = S_k(q-1)$

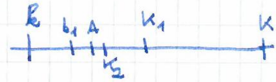
$$\boxed{S_k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} q^n$ $\Rightarrow$ Ha $q > 1 \Rightarrow$ Divergálnak nem lehet meghatározni

$\Rightarrow$ Ha $q < 1 \Rightarrow$ Csökken meghatározható

Tétel:

$\forall$ korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.



$k, K \Rightarrow$ végtelen sok elem van $\Rightarrow$ megfelezem

k, K_1 vagy $K_1, K \Rightarrow$ végtelen sok elem van $\Rightarrow$ folytatható tovább is:

1. $k - K$
2. $\frac{k-K}{2}$

$\vdots$

n. $\frac{k-K}{2^{n-1}} \Rightarrow 0$-hoz tart

Végül 1 olyan pontot kap, amely minden intervallumban benne van $\Rightarrow A$

$\rightarrow$ választ minden intervallumban 1 elemet: $a_1, a_2 \ldots a_n \Rightarrow$ Ez konvergál A-hoz

Ha az eredeti sorozat konvergens volt $\Rightarrow$ 1 db A van

Ha a sorozat divergens, akkor több A lehet.

7/1 (I.) Egyváltozós valós fv-ek határértéke: fogalom, tételek, nevezetes határértékek

x DE nem szükséges!!

függvény: egyértelmű hozzárendelés

Egyváltozós valós fv: Olyan fv. amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmazának valamely részhalmaza.

Egyrétű fv: minden elemhez másik elemet rendelünk (ha szig. mon. az elégséges feltétel)ˣ

Inverz fv: Az értékkészlet elemeit rendeljük hozzá az értelmezési tartomány elemeihez.

(f^{-1}) Ha f egyrétű fv $\Rightarrow f^{-1}$ fv. inverz fv.

Ha f nem egyrétű fv $\Rightarrow f^{-1}$ reláció, de nem fv.

Tulajdonságok: $x \in D$ (ért. tart) $f(x) \in \mathbb{R}$ (ért. készlet)

- ~~f~~ páros: $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ y tengelyre tükrös
- f páratlan $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ origóra tükrös
- monoton növő: ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$ [Ha $\neq$ szig. mon. növ.]
- monoton fogyó: ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$ [Ha $\neq$ szig mon. csök.]
- periodikus: $f(x+T) = f(x)$ T $\to$ periódus
- Korlátos: $f(x) < K$ felülről korlátos

  $f(x) > k$ alulról korlátos

  $k < f(x) < K$ korlátos

Műveletek:

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $\quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad D_{fg} = D_f \cap D_g$

$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{f/g} = D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0$

Összetett fv: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ha g értelmezett egy H halmazon és azt leképezi egy K számhalmazra, amelyen értelmezett az f függvény, és leképezi K halmazt egy L halmazra $\Rightarrow f \circ g$

$D_{f \circ g}: H$

$R_{f \circ g}: L$

① Ha f monoton nő $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

g monoton nő $\quad f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$

$\Downarrow$

$f \circ g$ monoton nő

② $\left.\begin{array}{l}\text{f monoton csökken} \\ \text{g monoton csökken}\end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g$ monoton nő

③ egyik nő, másik csökken $\Rightarrow f \circ g$ monoton csökken.

- Polinom fv: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
- trigonometrikus fv-ek: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, $\Rightarrow$ általában nem invertálhatók, csak bizonyos tartományokban: arc...
- racionális tört fv-ek.

!

Határérték: Véges helyen vett véges határérték:

Az f függvény határértéke az x_0 helyen A $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right)$, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta$, vagyis van olyan A szám, hogy az függvény értékei tetszőlegesen közel vannak A-hoz, ha a független változók megfelelően közel vannak x_0-hoz.

Tétel: I. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ $\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$ / Ezek érvényesek a végtelen helyen vett véges határértékekre és ...

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$
3. $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$ ha $B \neq 0$
4. $k \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to x_0}(k\cdot f(x)) = k\cdot A$
5. Rac. kitevőjű hatványozás: r, s relatív prímek, $s \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\frac{r}{s}} = L^{r/s}$$

II. $\lim_{x\to x_1}(f\circ g) = \lim_{x\to x_0} f(g(x))$ ha $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$ és $\exists \lim_{u\to g_0} f(u) = A$

Ha létezik határérték, akkor az biztosan A. De lehet, hogy $\not\exists$ határérték.

III. Átviteli elv:

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n \in D_f$ és $x_i \neq x_0$ ← itt fv. nem biztos, hogy értelmezve van.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$f(x_1) \dots f(x_n) \Rightarrow A$

Fordítottja is igaz: Ha talál 2 sorozatot, amelyre a fv 2 különböző határértéket ad $\Rightarrow$ Akkor fv-nek nincs határértéke.

A határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele:

$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n),\ x_n \in D_f,\ x_n \to a\right.$ független változó sorozat esetén, $\left.\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)$

IV. Szendvics tétel: $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

V. Ha $f(x) \leq g(x) \wedge$ mindkettőnek van határértéke, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

~~Jobb és baloldali határérték:~~

~~- Ha az f függvény értelmezve van a (c, b) intervallumon (ahol $c < b$), akkor az L számot a fv jobboldali határértékének nevezzük, ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közelítik L-t amennyiben a megadott intervallumbeli x-ek megfelelően közel esnek c-hez. $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$~~

~~- Egyváltozós valós fv fv-nél, akkor mondjuk, hogy az x_0 helyen van bal oldali határértéke és az a bal oldali határérték b, ha~~

~~(a) az f értelmezve van az x_0 valamely B baloldali környezetében, és az x_0-hoz konvergáló minden B-beli $[x_n]$ sorozatra $\lim f(x_n) = b$~~

712

Jobb és baloldali határérték:

- f fv-nek jobb oldali határértéke az x_0 helyen L szám ($\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$), ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re: $x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
- f fv baloldali határértéke az x_0 helyen az L szám ($\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$), ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re: $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Tétel: Egyváltozós valós fv-nek valamely helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha ezen a helyen bal és jobb oldali határértéke is létezik, és ez a két egyoldali határérték egyenlő.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=b$$

Határérték fogalom általánosítása:

- Véges helyen vett végtelen határérték (végtelenhez divergál): 1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, ha minden $P\in\mathbb{R}$-hez $\exists\delta(P)$, hogy $f(x)>P$, amennyiben $0<|x-x_0|<\delta$
  2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, ha minden $p\in\mathbb{R}$-hez $\exists\delta(p)$, hogy $f(x)<p$, amennyiben $0<|x-x_0|<\delta$
- Végtelenben vett véges határérték: I. $\lim_{x\to\infty}$ → A (1), → ∞ (2), → $-\infty$ (3), → nem létezik

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x>N(\varepsilon)$

pl: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, ha $\forall P\in\mathbb{R}$-hez létezik $N(P)$, hogy $f(x)>P$, ha $x>N(P)$

pl: $\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$

(3) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, ha $\forall p\in\mathbb{R}$-hez $\exists N(p)$, hogy $f(x)<p$ ha $x>N(p)$

pl: $\lim_{x\to\infty} -x^2=-\infty$

II. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ → A (1), → ∞ (2), → $-\infty$ (3), → nem létezik

(1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x<N(\varepsilon)$

pl: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, ha $\forall P\in\mathbb{R}$-hez $\exists N(P)$, hogy $f(x)>P$, ha $x<N(P)$

pl: $\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty$

(3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, ha $\forall p\in\mathbb{R}$-hez $\exists N(p)$, hogy $f(x)<p$, ha $x<N(p)$

pl: $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

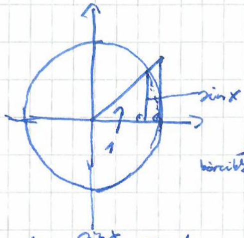
~~Nevezetes határértékek:~~

Vízszintes aszimptota: Az $y=b$ egyenletű egyenest az $y=f(x)$ függvénygrafikon vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ v. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

Függőleges aszimptota: Az $x=a$ egyenletű egyenes az $y=f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ v. $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

Nevezetes határértékek:

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



$T_1 = \frac{\sin x \cos x}{2}$

$T_2 = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$

körcikk $\Rightarrow T_3 = \frac{1 \cdot 1 \cdot x}{2}$

$T_4 = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$

$T_2 < T_3 < T_4$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

rendőrelv: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Mivel fv páros $\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② e^x fv. tulajdonságai:

def: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

↳ sorozat monoton növekvő

$\lim_{h\to 0} e^{x+h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot e^h = e^x \lim_{h\to 0} e^h$

$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n$ sorozat $-1 < h < 1$ esetén már az első tagtól kezdve növekedő

$\left(1+\frac{h}{n} > 0 \Rightarrow n+h > 0 \Rightarrow h > -n\right)$

$1+h \le e^h$

$1-h \le e^{-h} \Rightarrow e^h \le \frac{1}{1-h}$

$\Big\} \Rightarrow 1+h \le e^h \le \frac{1}{1-h} \quad (h \in (-1,1))$

$1+h \xrightarrow{h\to 0} 1$, $\frac{1}{1-h} \xrightarrow{h\to 0} 1$

rendőrelv $\Rightarrow \lim_{h\to 0} e^h = 1 = e^0 \Rightarrow$ fv 0-nál folyamatos

$\lim_{h\to 0} e^{x+h} = e^x \lim_{h\to 0} e^h = e^x \Rightarrow$ mindenhol folyamatos.

1. e^x $\forall x \in \mathbb{R}$-re folyamatos
2. $e^x > 0$
3. $1+h \le e^h \le \frac{1}{1-h}$

   $h > 0$ $h \ne 0$

   (ha $h < 0 \Rightarrow$ fordul relációjel)

   $1 \le \frac{e^h - 1}{h} \le \left(\frac{1}{1-h} - 1\right) \cdot \frac{1}{h}$

   ↳ $\frac{1-1+h}{1-h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h}{1-h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{1-h}$

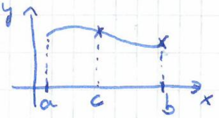
   $1 \le \frac{e^h - 1}{h} \le \frac{1}{1-h}$

   ↳ $h \to 0 \Rightarrow 1$

   rendőrelv: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$
4. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ $\quad$ (Mert: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge \underbrace{1+x}_{\text{ez tart } \infty\text{-hez}}$)
5. $\lim_{x\to -\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
6. szig. mon. nő
7. $e^x e^y = e^{x+y}$
8.

B11. 8. Folytonosság fogalma. Az alapműveletek folytonossága. Zárt intervallumon folytonos fv-ek tulajdonságai

Def: Az f fv. az $x=c$ helyen folytonos, ha:
1. $f(c)$ létezik, vagyis $c \in D_f$
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ létezik
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$



Def: Adott pontban folytonos fv.
Belső pont: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
Végpont: bal oldali a ill. jobb oldali b végpontban folytonos ha
$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ill. $\lim_{x\to b^-} f(x) - f(b)$

f folytonos egy intervallumban, ha minden pontjában folytonos
↳ f (a,b)-ban folyt, ha $\forall x \in (a,b)$ folyt.
$f[a,b]$-ban —— " —————— + végpontokban is folytonos

Tétel: Ha a valós értékű f fv a P_0 pontban folytonos és $f(P_0) \neq 0$, akkor P_0-nak van olyan környezete, amelyben minden $f(P)$ függvényérték előjele az $f(P_0)$ előjelével egyező.

Ha f fv P_0 pontban folytonos ⇒ P_0 az f fv folytonossági helye.
- Ha P_0-ban nem folytonos, de környezetében az ⇒ P_0 szakadási hely
- hézagpont: $\lim_{P\to P_0} f(P)$ létezik, de $f(P_0)$ nincs értelmezve
- megszüntethető szakadás: $\lim_{P\to P_0} f(P)$ létezik és $f(P_0)$ értelmezve van, de nem egyenlők
- lényeges szingularitása van, ha $\lim_{P\to P_0} f(P)$ nem létezik
  ↳ spec eset: $\lim_{P\to P_0} |f(P)| = \infty$ ⇒ f fv-nek pólusa van

Tétel: f és g folytonos $x=c$ helyen, akkor a következő fv is azok:
1. $f+g$ 2. $f-g$ 3. $f\cdot g$ 4. $k\cdot f$ $(k\in\mathbb{R})$ 5. f/g (ha $g(c)\neq 0$)
6. $f^{r/s}$ (r, s relatív prím egészek, $s\neq 0$, ha s páros ⇒ $f(c)>0$)

Tétel: Ha g folytonos a c, f pedig a $g(c)$ pontban, akkor $f\circ g$ összetett fv folytonos a c pontban.

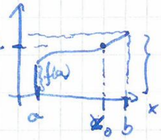
Példák:
1, x^n $n>0$ mindenhol folytonos
2, $\frac{1}{x^2}$ folytonos, ha $x\neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $x=0$ nem folytonos
3, $\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ 2 folytos fv. hányadosa ⇒ mindenhol folytonos, ahol a nevező nem nulla.
$x=-2$ ⇒ szakadása van, de határértéke van: $\frac{x+2}{x+2}(x+3) \Rightarrow 1$
4. $\sin x$ és $\cos x$ mindenütt folytonosak ⇒ $\operatorname{tg} x$ folytonos, ha $\cos x \neq 0$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Zárt intervallumban folytonos fv-ek tulajdonságai:
$x \in [a,b]$ $a \le x \le b$ folytonos (a,b)-ban + végpontokon is folytonos.
1, Bolzano-tétel
2, Weierstrass tétel

1, Bolzano-tétel:

Ha f folytonos $[a,b]$-n $\exists$, akkor $\forall\, c \in (f(a), f(b))$-hez $\exists\, x_0 \in (a,b)$, hogy $f(x_0) = c$

baloldali végpontjának fv. értéke — jobb oldali végpontjának fv. értéke.



Következmény: $\Rightarrow$ gyökkeresés

Ha f folytonos $[a,b]$-n, $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek van gyöke az intervallumban.

2, Weierstrass tétel:

a, Ha $f[a,b]$ folytonos akkor korlátos ott

b, és $\exists\, x_m \in [a,b]$ $f(x_m) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ és $\exists\, x_M \in [a,b]$ $f(x_M) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

(van legnagyobb és legkisebb értéke az intervallumon.)

(Megjegyzés: ~~Ha~~ Egy fv nyílt intervallumbeli folytonosságából még nem következik a korlátosság pl: $\frac{1}{x}$)

Bizonyítás:

a, Indirekt bizonyítás

Belátjuk, hogy f felülről korlátos $\Rightarrow$ indirekt: tegyük fel, hogy felülről nem korlátos

$x_1 \quad f(x_1) > 1$

$x_2 \quad f(x_2) > 2$

$\vdots$

$x_n \quad f(x_n) > n$

$x_1 \dots x_n \in [a,b] \Rightarrow$ tehát korlátos a sorozat $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozata: $x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in} \to x_0 \in [a,b] \Rightarrow$ (határérték)

$\Rightarrow f(x_{i1}), f(x_{i2}) \dots f(x_{in}) \to f(x_0) \to$ konkrét szám

$f(x_{i1}) > i_1,\ f(x_{i2}) > i_2 \dots f(x_{in}) > i_n$ — végtelenhez tart — $\nLeftrightarrow$ — Ellentmondás $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Indirekt feltevés volt helytelen $\Rightarrow$ van felső korlát

Hasonlóan bizonyít alulról is

$\Big\} \Rightarrow$ korlátos

b, Mivel $f[a,b]$ felülről korlátos $\exists$ a fv értékeinek supremuma.

$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = S$ $\quad \exists\, x_n$, hogy $S - \frac{1}{n} < f(x_n)\ \forall\, n$-re

$S \ge f(x_1) > S - 1$

$S \ge f(x_2) > S - \frac{1}{2}$

$\vdots$

$S \ge f(x_n) > S - \frac{1}{n}$

$x_1 - x_n$ korlátos $\Rightarrow$ van konvergens részsorozata $(x_{i1}, \dots x_{in})$

$(x_{in}) \to x_M \in [a,b] \to$ határértéke. (konvergens)

$f(x_{in}) \to f(x_M) \to$ határértéke.

$S \ge f(x_{i1}) \ge S - \frac{1}{i_1}$

$S \ge f(x_{i2}) \ge S - \frac{1}{i_2}$

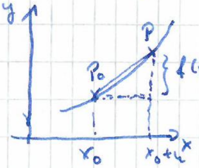
$\vdots$

$S \ge f(x_{in}) \ge S - \frac{1}{i_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{in}) = f(x_M) \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{in}) = S$

9|1 9. A differenciálhatóság fogalma. A differenciál. Az elemi függvények deriváltjai. Differenciálási szabályok.

Def: Legyen az f fv. értelmezett az x_0 hely környezetében.
Az $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ törtet az f fv x_0 és x_0+h helyekhez tartozó differenciahányadosának nevezzük.
Az $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ határértéket az f fv. x_0 helyhez tartozó differenciálhányadosának nevezzük. Jele: $f'(x_0)$
Azt a függvényt, amely minden olyan x_0-hoz, ahol f differenciálható hozzárendeli az $f'(x_0)$ számot f derivált fv-ének nevezzük: jele: f'
differenciálhányadosnak véges értéknek kell lennie, de nevező 0-hoz tart ⇒
⇒ számlálónak is 0-hoz kell tartania ⇒ $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0) \Rightarrow$
⇒ vagyis szükséges feltétel, hogy a fv. folytonos legyen.
$y=f(x)$ → görbe (De nem elégséges! → pl: $|x|$ → $x=0$-ban)



$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=tg\,\alpha$ P_0P → szelő
határhelyzete: P_0 érintője
$f'(x_0)$ ⇒ x_0 pont érintőjének iránytangense

Differenciál: Legyen f differenciálható az x_0 helyen.
Ekkor fv megváltozása következő alakban is felírható: $f(x_0+h)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\text{főrész}}+\underbrace{\varepsilon(h)}_{\text{hibarész}}$,
ahol $\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0$
főrész = differenciál jele: df
Ha f differenciálható az x_0 helyen, akkor annak környezetében lévő x_0+h helyeken a függvény jól közelíthető egy h változójú lineáris fv-nyel:
$f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h$ ⇒ fv görbéjét az érintő egyenessel közelítem

(fv nem diff.ható ha: - nem folytonos
- megtörik → jobb és bal oldali derivált nem egyenlő pl: $|x|$
- csúcsos → szelők egyik oldalon $-\infty$-hez másikon $+\infty$ hez tartanak
- érintője függőleges pl: $\sqrt{x}$)

Differenciálási szabályok:

1) Konstans fv. deriváltja: 0 $f(x)=c \rightarrow f'(x)=0$
Biz: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$

2) Differenciálható fv. konstansszorosa szintén diff.-ható és deriváltja az eredeti fv. deriváltjának és a konstansnak szorzata. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
Biz: $\left(\frac{d(cf)}{dx}\right)_{x=x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x_0+h)-c\cdot f(x_0)}{h}=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=c\cdot f'(x_0)$

3) Diff.ható fv-ek összege és különbsége is diff.ható, és deriváltja a tagok deriváltjának összege illetve különbsége. $(f\pm g)'=f'\pm g'$
Biz:

$$\left(\frac{d(f\pm g)}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{h\to0}\frac{[f(x_0+h)\pm g(x_0+h)]-[f(x_0)\pm g(x_0)]}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \pm \lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} =$$

$$= f' \pm g'$$

(4) Diffható fv-ek szorzata is diffható. Az n tényezős szorzat fv-ek deriváltját n tagú összegként kapjuk, úgy hogy minden egyes tényező deriváltját megszorozzuk a többi tényezővel, és az így nyert szorzatokat összeadjuk. $(fg)'=f'g+fg'$; $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$

Biz:

$$(f\cdot g)' = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]\cdot g(x_0+h) + f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h} = f'g+f\cdot g'$$

$g(x_0+h)\to g(x_0)$ ha $h\to0$

(5) Diffható fv-ek hányadosa minden olyan pontban diffható, ahol a nevező nem zérus. A deriváltja: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$

Biz:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+h)} = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h\, g(x_0)\cdot g(x_0+h)} -$$

$$- \frac{f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h\, g(x_0)\cdot g(x_0+h)} = \lim_{h\to0}\frac{g(x_0)[f(x_0+h)-f(x_0)]-f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h\, g(x_0)\, g(x_0+h)} = \frac{g f' - f g'}{g^2}$$

(6) Diffható fv reciproka minden olyan helyen diffható, ahol ~~a~~ fv értéke nem zérus $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

Biz: $f(x)=1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g\cdot0-g'\cdot1}{g^2} = \frac{-g'}{g^2}$

(7). Diffható fv. bármely egészkitevős hatványa is diffható (kivéve ha $n<0$ esetén az f zérushelyeit) $(f^n)'=nf^{n-1}\cdot f'$

Biz: Ha $n>0 \Rightarrow n$ tényezős szorzat: $(\underbrace{f\cdot f\cdots f}_{n})' = n(\underbrace{f\cdots f}_{n-1})\cdot f'$

Ha $n=0 \Rightarrow f^n$ konstans $\Rightarrow 0$

Ha $n<0$ $m=-n$ $f^n=f^{-m}$ és $m>0$ $(f^n)' = \left(\frac{1}{f^m}\right)' = \frac{-(f^m)'}{f^{2m}} = \frac{-mf^{m-1}\cdot f'}{f^{2m}} = -mf^{-m-1}f' =$

$= n\cdot f^{n-1}f'$

(8) Láncszabály $\Rightarrow$ összetett fv. deriválása $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

Ha g diff.ható az x helyen és f a $g(x)$ helyen, akkor $f\circ g$ diffható az x helyen és $(f\circ g)'(x) = [f(g(x))]' = \boxed{f'(g(x))\cdot g'(x)}$

Biz:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to0}\left[\underbrace{\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\right] = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

(9) Fv. inverzének deriváltja: $(f^{-1})'(x) = ?$

f^{-1} diffható az x helyen ha f diffható az $f^{-1}(x)$ helyen és a $f'(f^{-1}(x))\neq0$, akkor $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Biz:

$$(f^{-1})'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{x+h-x} \overset{\text{osztunk számlálóval}}{=} \lim_{h\to0}\frac{1}{\frac{x+h-x}{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}} = \lim_{h\to0}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x+h))-f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

9/2 Elemi fv-ek deriváltjai:

1, $(x^n)' \underset{\text{sz}}{=} (\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{n})' \underset{\text{szorzat szabály}}{=} n \cdot x^{n-1} \cdot x' = n \cdot x^{n-1} \cdot 1 = \underline{\underline{n x^{n-1}}}$

Ha $h \to 0$, akkor 1-hez tart

2, $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{-\sin x \cdot 2\sin^2\frac{h}{2}}{h}}_{} + \cos x = \underline{\underline{\cos x}}$

0-hoz tart, mert a számláló gyorsabban tart nullához mint a nevező

3, $(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{0} - \lim_{h\to 0} \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} = \underline{\underline{-\sin x}}$

4, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \underset{\text{hányados deriválása}}{=} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \underline{\underline{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = \underline{\underline{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}}$ ha $x \neq k\pi$

6, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$ Ha: $\sin y = x \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D: $[-1, 1]$

R: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

7, $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

8, $(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2+1}}}$

D: $(-\infty, \infty)$

R: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

9, $(\operatorname{arcctg})'(x) = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2+1}}}$

10, $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \underline{\underline{e^x}}$ $\frac{e^h-1}{h} \to 1$, ha $h \to 0$

11, $\ln'(x) \underset{\text{inverz fv.}}{=} \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ ha $x > 0$

$\ln'(-x) = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}$ ha $x < 0$

12, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \underline{\underline{\operatorname{ch} x}}$

13, $(\operatorname{ch} x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \underline{\underline{\operatorname{sh} x}}$

14, $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \underline{\underline{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}}$, $\operatorname{cth} x = \underline{\underline{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}}$

15, $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Tétel: Bolzano-tétel általánosítása:

a, f folyamatos $\mathbb{R}$-en és $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Állítás: Legyen c tetszőleges valós szám, és van olyan változó melynél az f értéke c

$\exists$ b, hogy $f(b) > c$ $\Rightarrow$ $+\infty$ hez divergálás miatt

$\exists$ a, hogy $f(a) < c$ $\Rightarrow$ $-\infty$-hez divergálás miatt

$\Rightarrow$ f mindenütt folytonos $\Rightarrow$ a és b között és $\Rightarrow$ $f(a) < c < f(b)$ $\Rightarrow$ Bolzano tétel alapján felveszi valahol a c-t is.

b, f folytonos $\mathbb{R}$-en $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = B$

Áll: A, B között $\forall$ értéket felvesz

10/1 **10. A deriváltból levonható következtetések a fv-ek lokális viselkedésére. A differenciálszámítás középérték-tételei. A fv intervallumbeli viselkedésének és a fv deriváltjának kapcsolata.**

Tulajdonságok, melyek a deriváltakból vonhatók le:

1, Ha $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$, hogy az x_0 helyen a fv. "növekedő", vagyis x_0-nak van olyan környezete, hogy x_0 bal oldalán kisebbek, jobb oldalán nagyobbak a fv. értékek.

$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \Rightarrow$ Ha $h > 0 \Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$

Ha $h < 0 \Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0+h) < f(x_0)$

$\Rightarrow$ f az x_0 helyen lokálisan nő.

2, Ha $f'(x) < 0 \Rightarrow$, hogy az x_0 helyen a függvény "lokálisan fogyó. ~~Ha egy fv értékei egy x_0 hely valamely környezetében nagyobbak~~

3, Ha egy függvény értékei egy x hely valamely környezetében nagyobbak (kisebbek), mint f(x) akkor azt mondjuk, hogy a függvénynek lokális minimuma (maximuma) van az x helyen. Közös néven lokális szélsőérték

ⓐ f-nek lok. minimuma van az x_0 helyen. Ha $\exists\, \delta > 0$, hogy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$-ban $f(x) > f(x_0)$ ha $x \neq x_0$

ⓑ f-nek lok. max van x_0 helyen. Ha $\exists\, \delta > 0$, hogy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$-ban $f(x) < f(x_0)$, ha $x \neq x_0$

ⓒ ~~Tétel~~ Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban és $\exists\, f'(x_0)$ akkor $f'(x_0) = 0$

/ $f'(x) = 0$ szükséges, DE nem elégséges feltétele a lok. szélsőértéknek x^3: $f'(x)_{x_0} = 0$ /

A differenciálszámítás középértéktételei:

I. Rolle-féle középértéktétel: Ha az egyváltozós valós f függvény

1. folyamatos az $[a, b]$ zárt intervallumon
2. differenciálható az (a, b) nyílt intervallumban
3. $f(a) = f(b)$,

akkor az (a, b) intervallumban van legalább egy olyan c hely, ahol a fv. deriváltja zérus.

Biz: Mivel f folyamatos $\Rightarrow \exists$ max és min $[a, b]$-ben

a, Ha a végpontokon veszi fel azokat $\Rightarrow$ konstans fv $\Rightarrow f'(x) = 0$ mindenhol.

b, Ha $f(x) \neq$ constans $\max f(x)$ v. $\min f(x)$ belül van $\Rightarrow$ azaz lokális szélsőértéke van $\Rightarrow$ ott $\boxed{f'(c) = 0}$

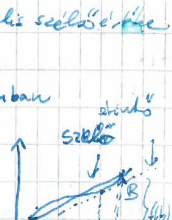
Geometriai jelentés: $\Rightarrow$ A függvény görbéjének van vízszintes érintője az intervallumban

II. Lagrange-féle középértéktétel: Ha az egyváltozós valós f függvény

1. folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon
2. differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon,

akkor az (a, b) nyílt intervallumban van legalább egy olyan c hely, hogy

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Geometriai jelentés: Az intervallumban van olyan hely, amelyhez tartozó görbepontban az érintő ‖-os a végpontokhoz tartozó szelővel.

III. Cauchy-féle középértéktétel: Ha az egyváltozós valós f és g függvény

1. folyamatos az $[a, b]$ zárt intervallumon
2. differenciálható az (a, b) intervallumon

3. a g függvény deriváltja az (a,b) nyílt intervallumon sehol sem zérus
(Rolle-tétel miatt $g(b)-g(a)=0$-t is kizárja)
akkor az (a,b) nyílt intervallumban van legalább egy olyan c hely, hogy
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
Lagrange alapján mindkettőt elosztjuk $b-a$-val $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$
$\Rightarrow$ elgondolható, hogy $c_1 \neq c_2$-vel

L'Hospital tétel:

a) Legyen f és g két olyan egyváltozós valós fv, amely az x_0 valamely E környezetében értelmezve van és differenciálható ($g'(x)\neq 0$ ha $x\in E$)
Ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ továbbá $L'=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik,

akkor $L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, mégpedig $L=L'$
(Tétel alkalmazható jobb és baloldali határérték kiszámítására is)
Biz: Cauchy tétellel: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

b) Legyen f és g két olyan egyváltozós valós fv, amely az x_0 valamely E környezetében értelmezve van és diffható ($g'(x)\neq 0$, ha $x\in E$)
Ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty \wedge L'=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor az $L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik $\wedge$ $L=L'$

c) Legyen f és g két olyan egyváltozós valós fv, amely a $\pm\infty$ valamely E környezetében értelmezve van és diffható ($g'(x)\neq 0$, ha $x\in E$)
Ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ vagy $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\infty$ $\wedge$ $L'=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik
akkor $L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik $\wedge$ $L=L'$

A fv intervallumbeli viselkedésének és a függvény deriváltjának kapcsolata:

- A (a,b) intervallumban diffható valós fv-nek a következő monotonitási tulajdonságai vannak:

1) Ha f deriváltja pozitív (a,b) intervallumon, akkor ott f szig. mon. nő.
~~Biz:~~ (Ha $f'>0$ ~~akkor~~ $x_2>x_1$ akkor $f(x_2)>f(x_1)$)
Biz: Lagrange alapján: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{\text{pozitív}}}=f'(c)>0$ $c\in(x_1,x_2)$
diffható; pozitív $\Rightarrow$ számlálónak is annak kell lennie $\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$
- Ha f függvény monoton növekvik (a,b)-n, akkor $f'(x)\geq 0$, az intervallum minden pontjában.

2) Ha $f'<0$ (a,b)-n, akkor f szig. mon. fogy.

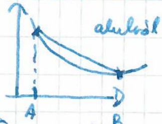
3) Ha az egyváltozós valós f függvénynek az (a,b) nyílt intervallum minden pontjában 0 értékű differenciálhányadosa van, akkor az f függvény konstans az (a,b) intervallumon.

4) Lokális szélsőérték elégséges feltétele:
Ha $f'(s)=0$ és s-nek van olyan környezete, hogy a bal és jobboldali környezetben f' előjele különböző, akkor f-nek szélsőértéke van az s helyen. Ha az előjel előbb negatív (f fogy) azután pozitív (f nő), akkor lokális minimum, ellenkező esetben lokális maximum van.

10/2

Ha diff.ható fv legnagyobb vagy legkisebb értékét keressük egy zárt intervallumon, akkor figyelembe kell vennünk, hogy ez a lokális szélsőérték-helyeken kívül, az intervallum végpontjaiban is lehet.

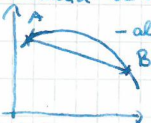
(5) Ha $f'' > 0$ egy (a,b) intervallumon, akkor a függvény görbéje (a,b) bármely részintervallumán az annak végpontjaihoz tartozó húr alatt halad (alulról konvex)



alulról konvex $\exists f' \Rightarrow f'$ nő

Ha $f'' > 0 \Rightarrow f'$ szig. mon. nő $\Rightarrow f$ alulról konvex

(6) Ha $f'' < 0$ egy (a,b) intervallumon, akkor a fv görbéje (a,b) bármely részintervallumán az annak végpontjaihoz tartozó húr fölött halad (alulról konkáv)



– alulról konkáv

Ha $f'' < 0 \Rightarrow f'$ szig. mon. csökken $\Rightarrow f$ alulról konkáv.

(7) Inflexió: Ha fv. konkávból – konvexre vált (vagy fordítva)

É ↳ Ha f-nek inflexiós helye x_0, akkor $f''(x_0)=0$

Ha $f''(x_0)=0$ és f'' előjelet vált, $\Rightarrow$ f-nek inflexiós pontja van ott.

↘ $(f'''(x_0)\neq 0)$

Lok. szélsőérték elégséges feltétel:

Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)\neq 0$, akkor lokális szélsőérték van.

Ha $f''(x_0) > 0$, akkor lok. min.

Ha $f''(x_0) < 0$, akkor lok. max.

Aszimptota: (Egyenes)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$ $\quad g(x) = ax+b \Rightarrow$ Ha egyenest keresünk

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax-b]=0$ → kiemel x-et

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$ $\Rightarrow x\to\pm\infty \Rightarrow$ szorzat csak akkor lehet 0, ha zárójel 0-hoz tart.

→ 0-hoz tart.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

Ezután vizsgál: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b$-t

11/1 11. Gyökközelítési módszerek: húrmódszer, érintő módszer, kombinált módszer, iteráció

$f(x)=0$ egyenlet.

- Ha f n-edfokú polinom, akkor az egyenletet n-edfokú algebrai egyenletnek nevezzük.
- Ha f a független változóból és állandókból az alapműveletek és gyökvonások segítségével állt elő, akkor az egyenletet irracionális egyenletnek nevezzük, egyéb esetekben transzcendens egyenlet

$f(x)=0$ megoldása = megkeresni azokat az x értékeket (ha ilyenek léteznek), melyekre $f(x)=0$. Az ilyen x értékek az egyenlet megoldásai vagy gyökei

Első és másodfokú algebrai egyenletek megoldása ⇒ képletek segítségével.
(Hasonló 3-ad és 4-ed fokúakra is van, de konyolultabb)
Magasabb fokúakra ∅ ⇒ Megoldásait általában csak közelítő pontossággal tudjuk előállítani.

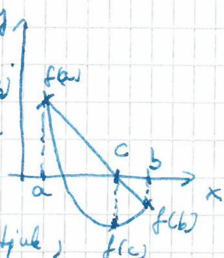
Húrmódszer:

Feltételek: $f(x)=0$, f folytonos $[a;b]$-n és a, b különböző előjelű ($f(a)\cdot f(b)<0$), akkor biztos van gyök.

Ha $f(a) f(b) < 0$ és f' jeltartó (a,b)-ben $\Rightarrow \exists!$ gyök
van és csak egy

Ha $f(a)\cdot f(b)<0$ és f'' jeltartó $\Rightarrow \exists!$ gyök

Húrmódszer:



a_1, b_1 két olyan érték ahol $f(a)\cdot f(b)<0$
Ekkor az a, b pontokhoz tartozó húrja (az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokon áthaladó egyenes) az x tengelyt olyan pontban metszi, amely az egyenlet gyökéhez közel fekszik.
Eljárásunkat úgy folytatjuk, hogy az $(c, f(c))$ pontot az a és b abszcisszájú pontok közül azzal párosítjuk, melyben az f fv értéke az $f(c)$ értékétől előjelben különböznek.
Általában: $(x_n; f(x_n))$; $(x_{n+1}; f(x_{n+1}))$ pontokon áthaladó húr egyenlete.

$$y = f(x_n) + \underbrace{\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}}_{m \text{ - meredekség}}(x - x_n)$$

A húr x tengellyel való metszéspontja: $x = x_{n+2} = x_n - \frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1})-f(x_n)}\cdot f(x_n) \Rightarrow$
⇒ konvergál a gyökhöz.

Érintő módszer (Newton-módszer)

Gyökének egy közelítő x_1 értékéből indulunk ki és egy további közelítő értéket f görbéjéhez az x_1 abszcisszájú pontban húzott: $y = f(x_1) + \underset{\text{meredekség}}{f'(x_1)}(x - x_1)$ egyenletű érintő x tengellyel való metszéspontja $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ szolgáltat. $f' \neq 0$ esetben alkalmazható

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \text{konvergál a gyökhöz}$$

Kérdés: Mekkora a hiba?
⇒ Megoldás: 2 módszer kombinációja, mert: mindkét módon egyre közelítő gyök sora-

zat monoton módon konvergál a gyökhöz, de monotonitásuk ellentétes irányú.

3. Kombinált módszer:

1 húr – 1 érintő felváltva alkalmaz => közrefogják a gyököt =>

=> egyben becsüli és a hibát.

4. Iteráció:

$x = f(x)$ alakban megadott egyenletek gyökeinek közelítő megoldására alkalmazható.
(Feltétel: $(a;b)$ -ben $\exists$ egy gyök.)

x_1 közelítő gyökből kiindulva: $x_2 = g(x_1) \ldots$ $x_{n+1} = g(x_n)$

$|f'(x)| \leq q < 1$ => Függvénynek nem szabad nagyon nőnie.

A közelítőgyök és a valódi gyök eltérésének becslése.

$$|x_n - x| \underset{\text{az alapfeltétel miatt } [x = f(x)]}{=} |f(x_{n-1}) - f(x)| \underset{\text{Lagrange tétel alapján } f'(\xi) \leq q}{\leq} q\,|x_{n-1} - x| = q\,|f(x_{n-2}) - f(x)| \leq q^2 |x_{n-2} - x|$$

$$\ldots \leq \underbrace{q^{n-1}}_{\text{nullához tart}} |x_1 - x| \implies |x_n - x| \text{ is nullához tart.} \Rightarrow \text{Eljárás konvergens.}$$

Hiba becslése: $\boxed{|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_2|}$