*** 1. feladat (15 pont)**
Integráljuk az $f(x,y,z) := \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, z \in \mathbb{R})$ függvényt a

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0, z \le 0\}$$

halmazon.

Mo. Gömbi koordinátákkal **(2p)** $(H = \underline{S}\langle[1,2]\times[\frac{\pi}{2},\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]\rangle)$:

$$\int_H f \overset{\mathbf{(3p)}}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)\right)\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{\mathbf{(2p)}}{=}$$

$$= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos(\varphi)\sin(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{\mathbf{(3p)}}{=}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^2 r\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{2}\cdot[\sin(\varphi)]_{r=0}^{\frac{\pi}{2}} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{3\pi}{4}.$$

*** 2. feladat (6+6+5=17 pont)**
Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x+\pi & \text{, ha } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{, ha } x \in [0,\pi[\,. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.
b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.
c) Számítsuk ki az $a_3(f)$ Fourier-együtthatót.

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy $[-\pi,\pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos **(2p)** . Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens **(2p)** , és

$$\left(\Phi(f)\right)(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad \mathbf{(2p)}.$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(1p)** , ezért

$$\Phi(0) \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{1}, \qquad \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\mathbf{(2p)}}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

\+ rajz **(3p)** .

c)

$$a_3(f) \overset{\mathbf{(2p)}}{=} a_3\left(f-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}\right)\cos(3x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{(1p)}}{=} 0$$

ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert az integrandus véges sok pont kivételével páratlan **(1p)** .

---

3. feladat (6+12=18 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be az iránymenti deriváltak kiszámításáról szóló tételt.

Mo. *Tétel:* Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ pontban **(2p)**, akkor minden $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ és $\|\underline{e}\| = 1$ esetén f az $\underline{e}$ irány mentén deriválható az $\underline{a}$ pontban **(2p)**, és

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \quad \textbf{(2p)}$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény, amely (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ pontban, valamint legyen $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, amelyre $\|\underline{e}\| = 1$ teljesül, illetve $\varepsilon > 0$ tetszőleges **(1p)**. Ekkor az f függvény $\underline{a}$ pontbeli totális differenciálhatóságából adódóan létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ és $\underline{x} \neq \underline{a}$ esetén

$$\left| \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} \right| < \varepsilon. \quad \textbf{(4p)}$$

Legyen $0 < t < \delta$. Az előbbi egyenlőtlenség $\underline{x} := \underline{a} + t.\underline{e}$ esetén is teljesül, hiszen $\|\underline{a} + t.\underline{e} - \underline{a}\| = |t| < \delta$, tehát

$$\left| \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a}) - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), t.\underline{e} \rangle}{t} \right| = \left| \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \right| < \varepsilon. \quad \textbf{(4p)}$$

Ez pedig a pontbeli határérték és az iránymenti derivált definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle. \quad \textbf{(3p)}$$

(Alternatív bizonyítás: átviteli elv segítségével...)

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény és $a < b$ valós számok, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq (b - a)^2.$$

(*Segítség: Szorozzuk a fenti egyenlőtlenséget* 2*-vel, a bal oldalt alakítsuk át kettős integrállá kétféleléppen, majd összevonás után becsüljünk alulról.*)

Mo. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor a Fubini-tétel és a Riemann-integrál monotinitása alapján

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_a^b \int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_a^b \int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_{[a,b]\times[a,b]} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}(x, y) \overset{\textbf{(2p)}}{\geq}$$

$$\geq \int_{[a,b]\times[a,b]} 2\,\mathrm{d}(x, y) \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2(b - a)^2,$$

amiből már adódik a feladat állítása.
