Indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.
1. *(12 pont)* Adja meg az $xy' = y + 1$ egyenlet összes megoldását!
2. *(12 pont)* Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = xe^x$ differenciálegyenletet!
3. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x, y, z) = (-y^2, y^2, z)$ vektorfüggvény görbementi integrálját a $[0, 2i, 2j, 0]$ töröttvonalra (azaz a $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ csúcsokkal rendelkező háromszög pozitívan irányított határára)!
4. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x, y, z) = (3x + \sin y, x^2 + 2y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját a $(0, 0, 3)$ csúcspontú, $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$ feltételekkel adott alaplapú egyenes kúp kifelé irányított palástjára!
5. *(3+3+3+3 pont)* **(a1)** Melyik az a függvény, aminek a Laplace-transzformáltja $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+3)(s^2+4)}$?
(a2) Számítsa ki a $v : (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}^3, r \mapsto |r|^3 r$ vektorfüggvény divergenciáját!
(b) Igazak-e az alábbi állítások? (Válaszát indokolja!)
(b1) $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, r \mapsto r$ felületi integrálja az origó középpontú egységsugarú gömb kifelé irányított felszínére nulla.
(b2) Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.
iMSc feladat. *(10 pont)* Tudjuk, hogy $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ olyan folytonosan differenciálható vektorfüggvény, amire $\nabla \times v = 0$ teljesül, és legyen $a \in \mathbf{R}^3$ konstans vektor. Írja fel deriválásokat nem tartalmazó alakban a $w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : r \mapsto \nabla \cdot ((r \times a) \times v(r))$ vektorfüggvényt!

—

1. MO. Szeparábilis. $y \equiv -1$ szinguláris megoldás. $y' = x(y+1) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{1}{x} dx \rightsquigarrow \ln|y+1| = \ln|x| + C$ $(y = cx - 1)$.
2. MO. A homogén megoldása: $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$. Az inhomogén egy parikuláris megoldását $y_p = (Ax+B)e^x$ alakban érdemes keresni: $y_p' = e^x(Ax + A + B)$, $y_p'' = e^x(Ax + 2A + B)$. Innen $3e^x(3Ax + 2A + 3B) = xe^x \rightsquigarrow A = \frac{1}{9}, B = -\frac{2}{27}$.
3. MO. Stokes-szal. Legyen a háromszög határa ∂H. rot $v(x, y, z) = (0, 0, 2y)$. Ekkor

$$\int_{\partial H} v dr = \int_H \operatorname{rot} v df = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{2-x} 2y dy dx = \int_0^2 [y^2]_0^{2-x} dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

4. MO. A kúp csúcsa $(0, 0, 3)$, alapja a $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$ feltételekkel adott körlap. A körlapon a vektormezőnek nincs z irányú komponense, ezért erre a felületi integrál nulla. Gauss-szal. Lezárva a nulla járulékú alaplappal, a kúp ∂K felszínére az integrál ugyanaz, mint a P palástra. $\operatorname{div}(3x + \sin y, x^2 + 2y, z) = 6$.

$$\int_P v df = \int_{\partial K} v df = \int_K \operatorname{div}\ v\ dV = \int_K 6\ dV = 6|K| = 54\pi$$

5. MO. **(a1)**

$$\frac{1}{(s^2+3)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+3} - \frac{1}{s^2+4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{s^2+3} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{1}{2} \sin(2t).$$

(a2) $\operatorname{div} |r|^3 r = \operatorname{grad}(|r|^3) r + |r|^3 \operatorname{div} r = 3|r|^2 \frac{r}{|r|} r + 3|r|^3 = 6|r|^3$.
(b1) Hamis, Gauss-tételből: $\int_{\partial V} r\ df = \int_V \operatorname{div}\ r\, dV = 3|V| \neq 0$.
(b2) Tétel volt.
iMSc. MO.

$$\nabla \cdot (r \times a) \times v(r) = (\nabla \times (r \times a)) v(r) - (r \times a) \nabla \times v(r) = 2av(r)$$

Mivel rot $v = 0$ és rot $r \times a = 2a$. Közben felhasználtuk a

$$\operatorname{div}\ (s \times t) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i \varepsilon_{ijk} s_j t_k = \varepsilon_{ijk} t_k \partial_i s_j + \varepsilon_{ijk} s_j \partial_i t_k = t_k \varepsilon_{kij} \partial_i s_j - s_j \varepsilon_{jik} \partial_i t_k \overset{\text{EK}}{=} (\operatorname{rot} s)\, t - s \operatorname{rot} t.$$