Felsőbb Matematika 1. ZH 2010-11-05 E.I.ABC

1. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix *(a)* szinguláris felbontását, annak redukált változatát, *(b)* pszeudoinverzét, és *(c)* határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = (2, 6, 2)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! *(4 pont)*

Megoldás. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 4\lambda$, sajátértékei 4, 0, sajátvektorai $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Szinguláris értékei 2, 0, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, két további erre merőleges vektor: $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$ és $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$. A felbontás és a redukált felbontás:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A pszeudoinverz és az optimális megoldás:

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1/2] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-alakját, egy hozzá tartozó Jordan-bázisát, és az $e^{\mathbf{B}}$ mátrixot! *(4 pont)*

Megoldás. Az egyetlen sajátérték 3, a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$. Eszerint olyan $\mathbf{x}_3$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1/9)$, és $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = (0, 1/3, 0)$, azaz – 9-cel minegyik vektort beszorozva – a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$. Innen

$$e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^3 & 3e^3 & \frac{9}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & 3e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}$$

3. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg *(a)* a $\mathbf{C}$ mátrix LDU-felbontását (ahol $\mathbf{D}$ diagonális, $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ főátlójában csak egyesek vannak); *(b)* ezt felhasználva állítsuk elő $\mathbf{C}$-t $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ alakban; *(c)* és (pl. ezen felbontás segítségével) írjuk fel az $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot négyzetek összegeként! *(4 pont)*

Megoldás. Az $\mathbf{LU}$, $\mathbf{LDU}$ és $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ alakú felbontások:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ alakú felbontás úgy keletkezett, hogy a $\mathbf{D}$ mátrixot $\operatorname{diag}(1, 2, 3)\operatorname{diag}(1, 2, 3)$ alakú szorzattá alakítottuk, és így kaptuk az $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(1, 2, 3)\mathbf{U}$ mátrixot. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{M}^T\mathbf{x} = (\mathbf{M}^T\mathbf{x})^T(\mathbf{M}^T\mathbf{x})$ egy vektor négyzete, tehát négyzetösszeg, azaz

$$x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 2xy + 2xz + 10yz = (x + y + z)^2 + (2y + 2z)^2 + (3z)^2.$$

4. Melyik normális, melyik unitér, melyik pozitív definit és melyik önadjungált az alábbi mátrixok közül? *(4 pont)*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mivel minden önadjungált és unitér mátrix normális, ezért előbb e két tulajdonságot vizsgáljuk: $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ szimmetrikusak, ezért önadjungáltak, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right]^H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right]$, tehát $\mathbf{M}_3$ is önadjungált, $\mathbf{M}_4$ nem, mivel valós elemű, de nem szimmetrikus.

Az $\mathbf{M}_2$ ortogonális, tehát unitér is, mert oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak. A többi mátrix oszlopai nem merőlegesek egymásra, tehát nem unitérek. Ennek ellenőrzése a komplex elemű $\mathbf{M}_3$ esetén az $\mathbf{u}^H\mathbf{v}$ képlettel számolandó: $(\overline{1}, \overline{-i}) \cdot (i, 1) = (1, i) \cdot (i, 1) = 2i \neq 0$.

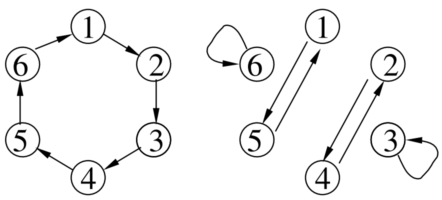
Az $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ normális, mivel önadjungált. Az $\mathbf{M}_4$ is, mivel $\mathbf{M}_4^T\mathbf{M}_4 = \mathbf{M}_4\mathbf{M}_4^T = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Definitséget csak valós szimmetrikus mátrixra definiáltunk, így csak $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ vizsgálandó: mivel $\mathbf{M}_1$ sorai lineárisan összefüggők, determinánsa 0, tehát nem lehet pozitív definit; az $\mathbf{M}_2$ bal fölső 2×2-es főminora 0, így az sem pozitív definit, tehát ilyen mátrix nincs a felsoroltak közt.

5. Melyik irreducibilis az alábbi mátrixok közül? Amelyik nem, azt melyik permutációs mátrix viszi $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{smallmatrix}\right]$ alakba? Amelyik irreducibilis, annak mennyi a spektrálsugara és Perron-vektora? *(4 pont)*

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az irreducibilitás eldönthető a mátrixokhoz rendelt szomszédsági gráfokkal:



$\mathbf{R}_1$ irreducibilis, mert a gráf erősen összefüggő, azaz bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni irányított úton. $\mathbf{R}_2$ reducibilis, hisz például nem indul irányított él a következő halmazokból a komplementerükbe: $\{6\}$, $\{3\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,4\}, \ldots$. Így igen sok olyan $\mathbf{P}$ permutációs mátrix van, amelyik $\mathbf{R}_2$-t a kívánt alakba viszi. Ilyen például a $\mathbf{P} = \mathbf{R}_1^T$ mátrix is, mert az a 6-dik pontot viszi az 1-be (1-et a 2-be, 2-t a 3-ba,...). Valóban:

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_2\mathbf{P}^T = \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az $\mathbf{R}_1$ mátrixnak nyilvánvalóan sajátvektora az $\mathbf{p} = (1,1,1,1,1,1)$ vektor az 1 sajátértékkel. Mivel $\mathbf{R}_1$ nemnegatív és irreducibilis, ezért a Frobenius–Perron-tétel szerint a spektrálsugárhoz, mint sajátértékhez tartozó sajátvektor az egyetlen sajátvektor, mely pozitív elemű. Ebből következik, hogy a spektrálsugár 1.

Másik megoldás a feladat második részére:

$$\det(\mathbf{R}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 1$$

A karakterisztikus polinom gyökei a hatodik egységgyökök, melyek az 1-sugarú körön vannak, tehát 1 a spektrálsugár. A spektrálsugár valóban sajátérték, és a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektor – a Perron-vektor – $\mathbf{p} = (1,1,1,1,1,1)$.