Azonos részecskékből álló rendszerek

Azonos részecskék:

minden mérhető fizikai tulajdonságuk azonos (tömeg, elektromos töltés, saját impulzusmomentum (spin), saját mágneses dipólusmomentum, stb.)

Felcserélési szimmetria és a Pauli-féle kizárási elv

Azonos részecskékből álló rendszer (spin-változókat is tartalmazó) állapotfüggvényének szimmetriatulajdonsága bármely két részecske felcserélésére nézve:

feles spinű részecskék: előjelet vált = anti-szimmetrikus

egész spinű részecskék: nem vált előjelet = szimmetrikus

feles spin	$m_s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$	fermionok
egész spin	$m_s = 0, 1, 2, 3, \ldots$	bozonok

Egy részecske pl. elektron állapotának megadása a kvantumszámokkal

$$n, l, m_l, m_s$$

Pl. 2 elektront tartalmazó rendszer

$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \xi_1, \xi_2)$ a rendszer állapotfüggvénye

$\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \xi_2, \xi_1)$ két elektront felcserélünk

$$\left|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \xi_1, \xi_2)\right|^2 = \left|\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \xi_2, \xi_1)\right|^2$$

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \xi_1, \xi_2) = -\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \xi_2, \xi_1)$$ feles spin

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \xi_1, \xi_2) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \xi_2, \xi_1)$$ egész spin

Egy-részecske közelítés

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\xi_1,\xi_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(1)\Psi_2(2) - \Psi_2(1)\Psi_1(2)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\Psi_1(1) & \Psi_1(2)\\ \Psi_2(1) & \Psi_2(2)\end{vmatrix}$$

a determináns hullámfüggvény anti-szimmetrikus

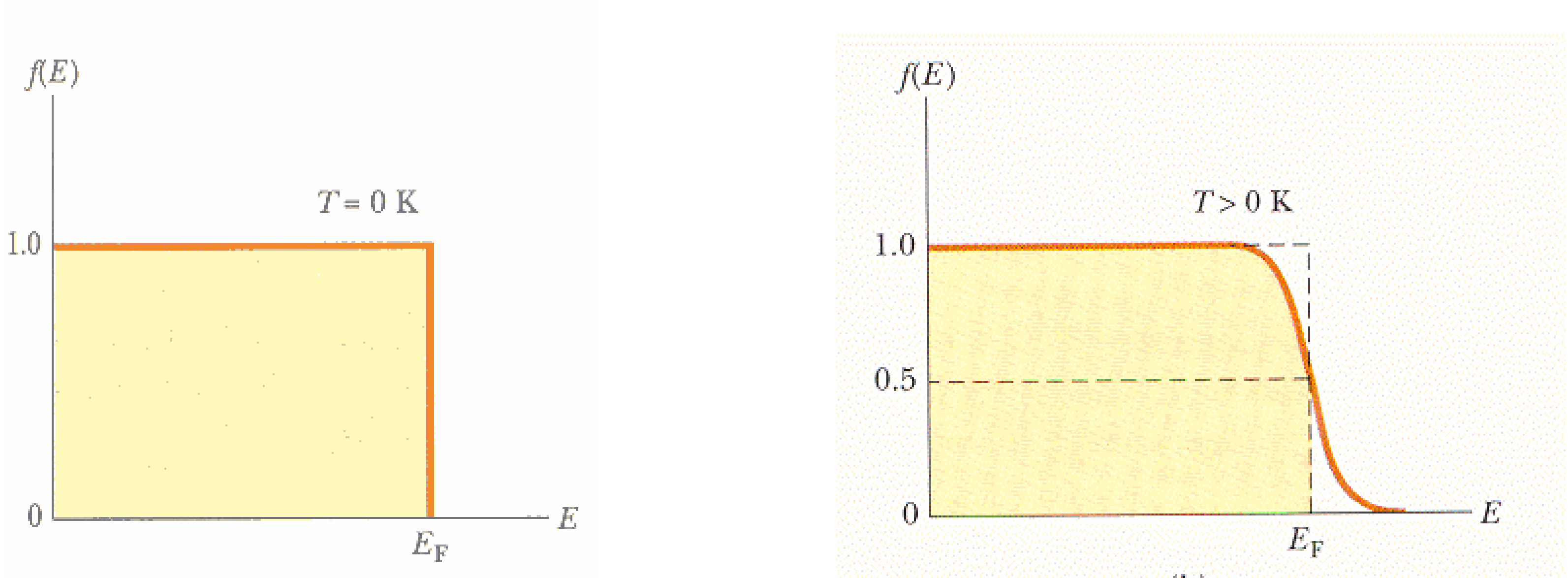
A Pauli-elv szokásos alakja csak egy-részecske közelítésben érvényes (feles spinű részecskékből álló rendszerben nem lehet két részecskének minden kvantumszáma megegyező.)

Kvantumstatisztikák

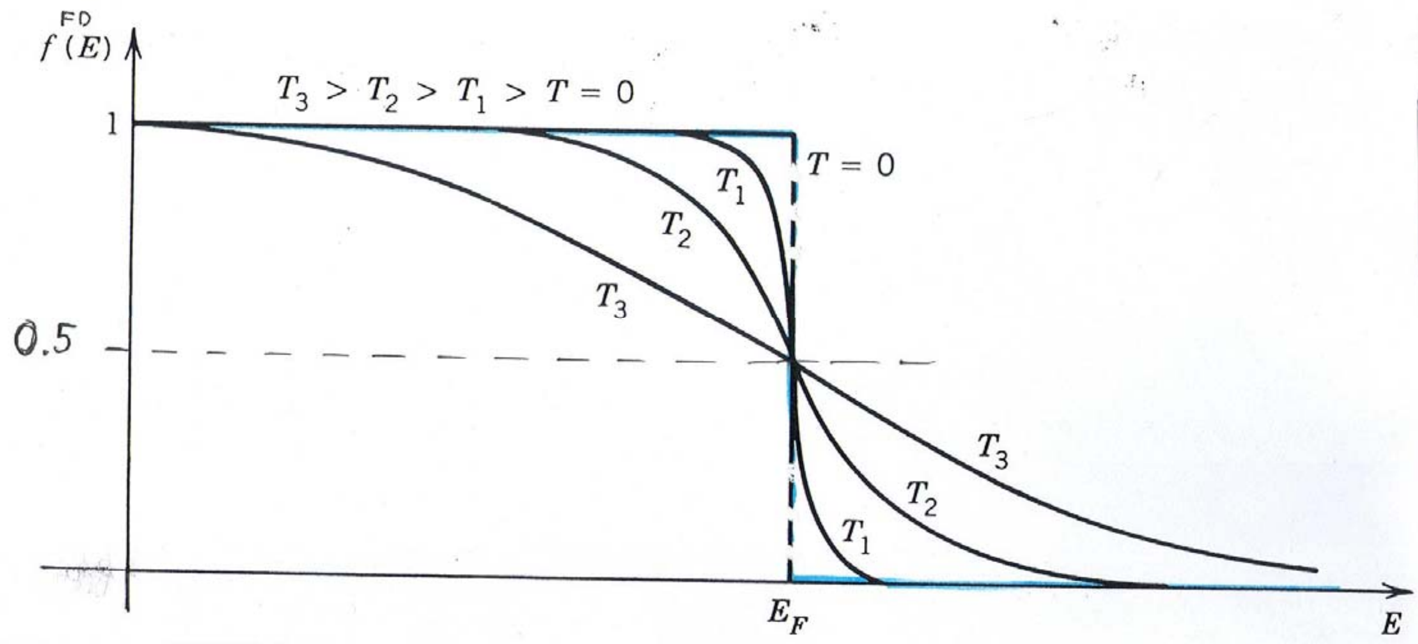
A Fermi-Dirac eloszlásfüggvény

Feles spinű részecskékre érvényes a Pauli elv. Feles spinű, azonos részecskékből álló rendszerre a Fermi-Dirac statisztika vonatkozik. A feles spinű részecskék *egyensúlyi eloszlását* a Fermi-Dirac eloszlásfüggvény határozza meg:

$$f^{FD}(\varepsilon,T)=\frac{1}{\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon-\varepsilon_F}{kT}\right\}+1\right]}$$



(a) (b)



FD
f (E)
T3 > T2 > T1 > T = 0
1
T = 0
T1
T2
T3
0.5
T3
T2
T1
EF
E

Magas energiaszintek esetén a klasszikus statisztikus mechanikában tanult Maxwell-féle eloszláshoz jutunk:

$$\lim_{\varepsilon >> \varepsilon_F} f^{FD}(\varepsilon, T) = \acute{a}lland\acute{o} \cdot \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\} = f^{MB}(\varepsilon, T)$$

azaz az elektronok *kvantumstatisztikája* határesetben visszaadja a klasszikus fizikában tapasztalt eredményt.

Alapállapotban ($T = 0$) a Fermi-Dirac eloszlásfüggvény $f^{FD}(\varepsilon, T = 0)$ egy lépcsőfüggvény

$$\lim_{T \to 0} f^{FD}(\varepsilon, T) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}\right\} + 1\right]} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{F}} \\ 0 & \text{ha} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_{\mathrm{F}} \end{cases}$$

Állapotsűrűség $g(\varepsilon)$

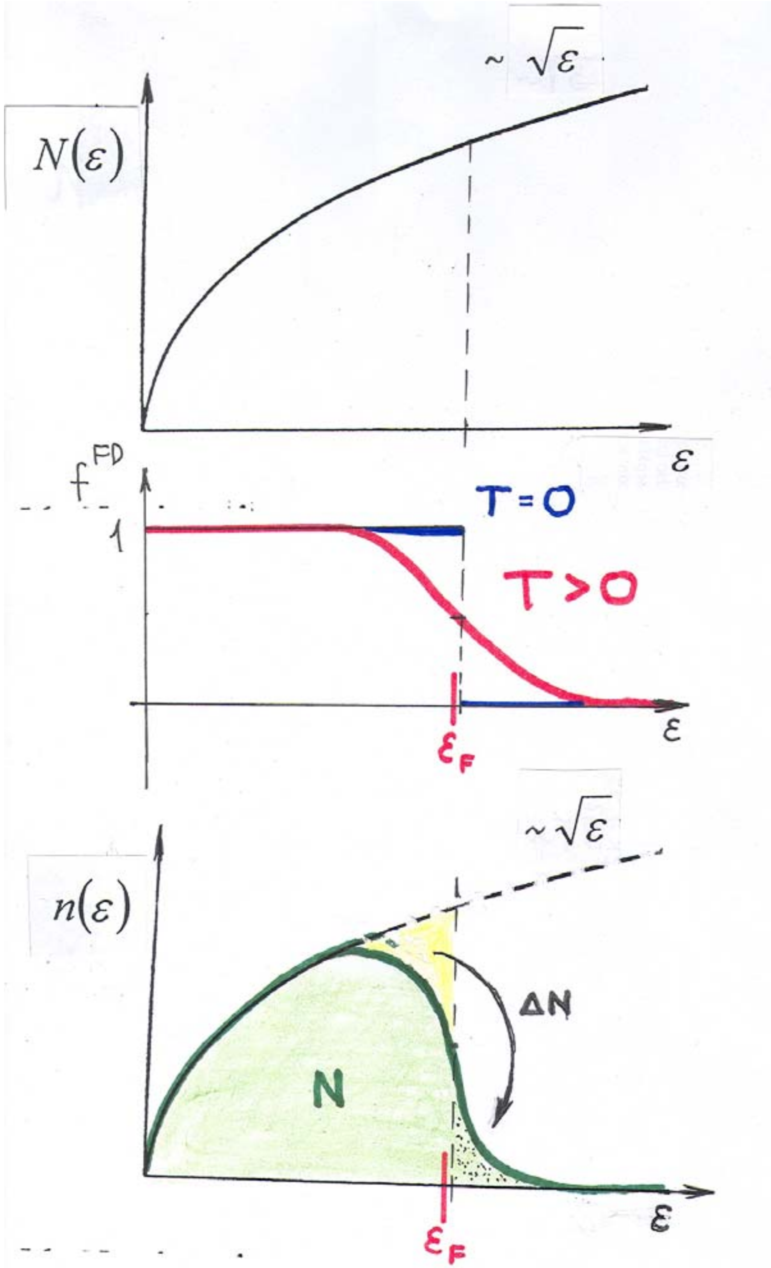
$g(\varepsilon)d\varepsilon$ azon (elektron)állapotok száma, amelyek az energiája az $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ tartományba esik

Az ε és ε+*d*ε energia-intervallumba eső elektronok száma:

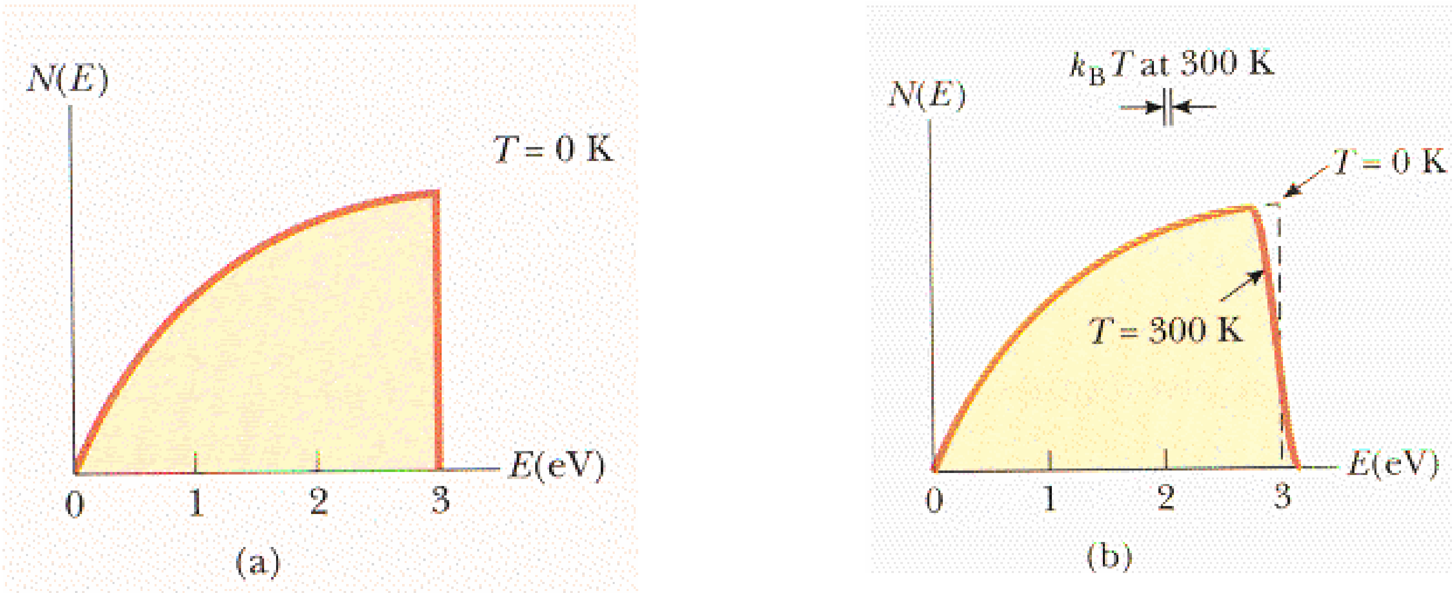
$$n(\varepsilon)d\varepsilon = g(\varepsilon)\cdot f^{FD}(\varepsilon, T)d\varepsilon$$

T = 0 hőmérsékleten a Fermi-Dirac eloszlásfüggvény lépcsőfüggvény; az elektronok az ε_F energiaszintig minden állapotot betöltenek, azon felül pedig minden állapot üres lesz.

Ez az energiaszint a *Fermi-szint* vagy *Fermi- energia*.



$T > 0$ hőmérsékleten, az elektronok egy része az alacsonyabb energiájú állapotokból magasabb energiájú állapotokba jut. A *Fermi-energia* most az az energiaszint, amelynél az eloszlásfüggvény 1/2 értéket vesz fel.



N(E)
T = 0 K
E(eV)
0
1
2
3
(a)
k_B T at 300 K
N(E)
T = 0 K
T = 300 K
E(eV)
0
1
2
3
(b)

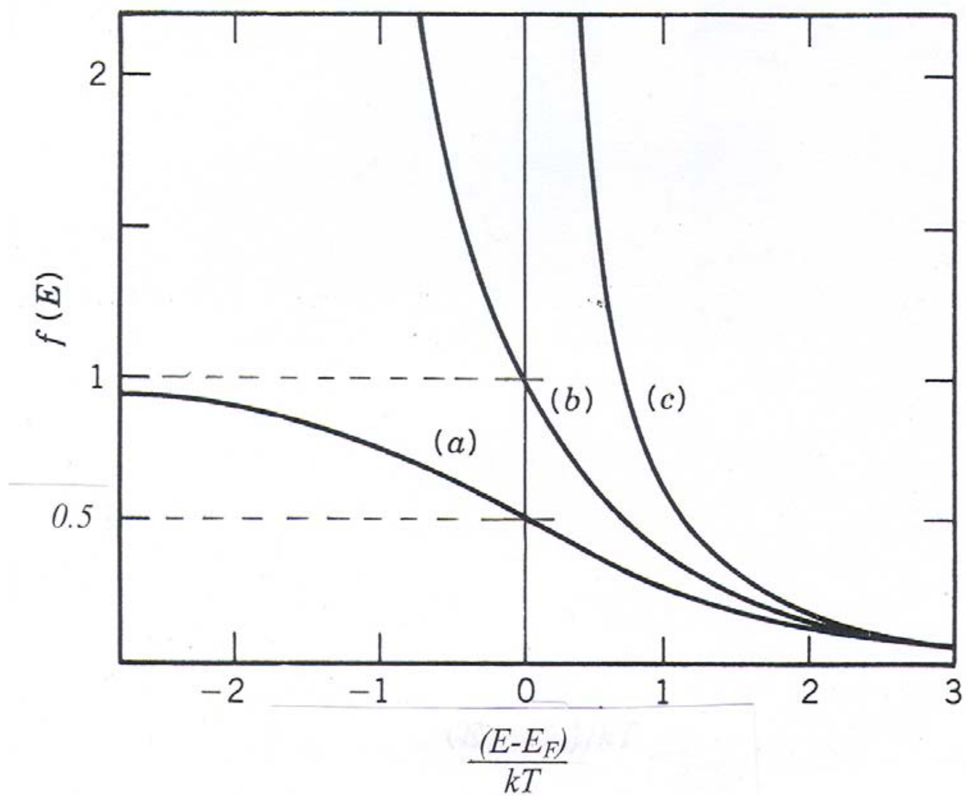
A Bose-Einstein eloszlásfüggvény

Egész spinű, azonos részecskékből álló rendszerre vonatkozik a Bose-Einstein statisztika. Az egész spinű részecskék (pl. a fotonok, fononok, Cooper párok, stb.) *egyensúlyi eloszlását* a Bose-Einstein eloszlásfüggvény határozza meg:

$$f^{BE}(\varepsilon,T)=\frac{1}{\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon-\varepsilon_F}{kT}\right\}-1\right]} \qquad f(\varepsilon,T)^{BE}>0$$

Fotonokra

$$f^{foton}(\varepsilon,T)=\frac{1}{\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon}{kT}\right\}-1\right]} \qquad \varepsilon=hf$$



A (c) görbe a Bose-Einstein, az (a) görbe a Fermi-Dirac, a (b) görbe pedig a Maxwell-Boltzmann féle eloszlásfüggvény

Magas energiaszintek esetén a klasszikus statisztikus mechanikában tanult Maxwell-Boltzmann eloszláshoz jutunk:

$$\lim_{\varepsilon>>\varepsilon_F} f^{BE}(\varepsilon, T) = \acute{a}lland\acute{o} \cdot \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\} = f^{MB}(\varepsilon, T)$$

azaz egész spinű részecskék *kvantumstatisztikája* határesetben visszaadja a klasszikus fizikában tapasztalt eredményt.

Az ε és ε+dε energia-intervallumba eső fotonok száma:

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = g\left(\varepsilon\right)\cdot f^{\,foton}\left(\varepsilon,T\right)d\varepsilon$$

ahol g(ε) az állapotsűrűség.

$$\varepsilon = hf > 0 \qquad\qquad f\left(\varepsilon,T\right)^{foton} > 0$$

Egy adott „foton állapotban” (módusban) több foton is lehet. Az egész spinű részecskékre, így pl. a fotonokra **nem érvényes a Pauli elv**.