1. Adjuk meg a megoldásokat az $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ paraméter függvényében : $(ax+1)^2 + (ax+1)\cdot(ax-1) = 4$ (12 pont)

$$(ax+1)^2 + (ax+1)\cdot(ax-1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2x^2 + 2ax + 1) + (a^2x^2 - 1) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^2 + ax - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2\cdot(-2)}}{2a^2} = \frac{-a \pm a\cdot\sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2a^2} = \frac{-1 \pm 3}{2a} ,$$ tehát a gyökök : $\boxed{x_1 = \frac{1}{a}, \quad x_2 = -\frac{2}{a},}$.

2. Számítsuk ki $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ pontos értékét, ha tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = 2$! (13 pont)

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha + 2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \frac{1+2^2+2\cdot 2}{2^2-1} \quad \boxed{=3} \quad .$$

Más megoldás pl. :

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha - \cos\alpha)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1} = \frac{2+1}{2-1}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert : (12 pont)

$$\left.\begin{aligned} 2^{\log_2 x} + 3^{\log_9 (4y^2)} &= 8 \\ \lg x - \lg 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + \sqrt{4y^2} &= 8 \\ \lg x &= \lg 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad (\ y>0 \ \ !!!\ ) \quad \left.\begin{aligned} x+2y &= 8 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=4 \\ y&=2 \end{aligned}}$$

4. Adott egy (a_n) mértani sorozat. Tudjuk, hogy $a_2 = 3$ és $a_5 = 24$.

Adjuk meg a_1 , q és S_7 értékét ! (13 pont)

$$a_5 = a_2\cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{24}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 2\ , \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3}{2}\ , \quad S_7 = \sum_{k=1}^{7} a_k = a_1\cdot\frac{q^7-1}{q-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2^7-1}{2-1} = \frac{3\cdot 127}{2} = 190.5} \ .$$

1. Adjuk meg a megoldásokat a $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ paraméter függvényében: $(\frac{c}{2}\cdot x+1)^2 + (\frac{c}{2}\cdot x+1)\cdot(\frac{c}{2}\cdot x-1)=4$ (12 pont)

$$(\frac{c}{2}\cdot x+1)^2 + (\frac{c}{2}\cdot x+1)\cdot(\frac{c}{2}\cdot x-1)=4 \quad\Leftrightarrow\quad (c^2x^2+4cx+4)+(c^2x^2-4)-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad c^2x^2+2cx-8=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2c\pm\sqrt{4c^2-4c^2\cdot(-8)}}{2c^2} = \frac{-2c\pm 2c\cdot\sqrt{1-(-8)}}{2c^2} = \frac{-1\pm 3}{c},$$ tehát a gyökök: $\boxed{x_1=\frac{2}{c}, \quad x_2=-\frac{4}{c},}$.

2. Számítsuk ki $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha + 1}$ pontos értékét, ha tudjuk, hogy $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$! $(\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=2)$ (13 pont)

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha + 1} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\cdot\operatorname{tg}\alpha + 1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-2^2}{2\cdot 2+1+2^2} \boxed{=-\frac{1}{3}} .$$

Más megoldás pl.:

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha+1} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-2}{1+2}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert: (12 pont)

$$\left.\begin{aligned} 3^{\log_3 y} + 2^{\log_4(4x^2)} &= 3\cdot\log_2 16 \\ \lg y - \lg 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y+\sqrt{4x^2} &= 3\cdot 4 \\ \lg y &= \lg 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\ x>0 \ \ !!!\ ) \ \left.\begin{aligned} y+2x &= 12 \\ y &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=3 \\ y&=6 \end{aligned}}$$

4. Adott egy (a_n) mértani sorozat. Tudjuk, hogy $a_5=8$ és $a_8=64$.

Adjuk meg a_1, q és S_8 értékét ! (13 pont)

$$a_8=a_5\cdot q^3 \Rightarrow q^3=\frac{64}{8} \Rightarrow \boxed{q=2, \quad a_1=\frac{a_5}{q^4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}, \quad S_8=\sum_{k=1}^{8}a_k=a_1\cdot\frac{q^8-1}{q-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^8-1}{2-1}=\frac{255}{2}=127.5} .$$