2019 tavasz

Bevezetés a számításelméletbe 2

Kidolgozott vizsgatételek

Összeállította: Csia Kitti

Tartalomjegyzék

1. tétel: Kombinatorika, binomiális tétel 2
2. tétel: Gráfelmélet alapja 6
3. tétel: Rajzolhatóság, Euler-formula 11
4. tétel: Euler– és Hamilton-körök 16
5. tétel: Gráfok színezése, páros gráf 20
6. tétel: Gallai, Tutte tétele 24
7. tétel: Javítóutak, Kőnig 28
8. tétel: Vizing, Kőnig élkromatikus szám 31
9. tétel: Hálózati folyam, vágás 34
10. tétel: Menger pontpárok, élösszefüggés 41
11. tétel: BFS, Kruskal algoritmus 46
12. tétel: Dijsktra, Bellman-Ford algoritmus 50
13. tétel: Flyod legrövidebb út, aciklikus gráf 54
14. tétel: DFS algoritmus, erdő 58

Felhasznált irodalom:

Fleiner Tamás - A számítástudomány alapjai

Hegyi Zsolt - Bevezetés a számításelméletbe 2. tételsor

Haraszin Péter – Bevezetés a számításelméletbe 2013/14 őszi vizsgatételek

Easymath: BME VIK Bevezetés a számításelméletbe 2 - https://easymaths.hu/onlinekurzusok/bme/bevezetes_a_szamitaselmeletbe/33/1070

Talált **HIBA** esetén jelzés: nospatium@gmail.com

BACK

1. tétel:
Kombinatorika, binomiális tétel

Tételcím

Kombinatorika leszámlálás alapfeladatok: ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, variáció és kombináció; példák. Összefüggések a binomiális együtthatók között, Pascal-háromszög. Binomiális tétel.

1. Faktoriális

- Definíció
  - az $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ szorzatot n faktoriálisának nevezzük
  - definíció szerint: $0! = 1$
- Jelölés
  - $n!$

2. Ismétlés nélküli permutáció

[N1] megjegyzést írt: Egy elem nem szerepelhet többször.

- Definíció
  - n elem összes lehetséges sorrendjének a száma $n!$
  - permutáció = hozzárendelés
    - $\{1 \ldots N\} \to \{1 \ldots N\}$
- Példa
  - 24 gyerek, hányféle sorrendben kaphatják meg a dolgozatukat?
    - $24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 1 = 24!$
  - Egy hídon 3 őr áll, mindegyik a hozzátartozó jelszót kéri, hányféleképpen adhatjuk meg?
    - $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

3. Ismétléses permutáció

[N2] **megjegyzést írt:** Egy elem többször ismétlődhet.

- Definíció
  - k_1 darab első típusú elem, ..., k_n darab n-edik típusú elem lehetséges sorba rendezésének a száma $k_1+\ldots+k_n$

$$\frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}=\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

- Példa
  - Van 3 Sopronim, 4 Dreherem, 5 Heinekenem, hányféleképpen tudom meginni?

$$\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}=27720$$

4. Ismétlés nélküli variáció

- Definíció
  - n-ből k elem összes lehetséges sorrendben való kiválasztása az n elem k-ad osztályú variációja
  - ezek száma:

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

  - ha $k=n$, akkor ismétlés nélküli permutáció

[N3] **megjegyzést írt:** Tehát itt nem az összes elemet rakjuk sorba, hanem csak valahányat az n-ből.

- Példa
  - Versenyen 50 futó indult, hányféleképpen jöhet ki a 3 dobogós?

$$\frac{50!}{47!}=50\cdot 49\cdot 48=117\,600$$

5. Ismétléses variáció

- Definíció
  - n elemből k tagú sorozatok kiválasztása
  - ezeknek a száma: n^k

[N4] **megjegyzést írt:** n elemből k-t rendezünk sorba.

- Példa
  - Hányféle 4-jegyű PIN-kód generálható?

$$n = 10$$
$$k = 4$$
$$n^k = 10^4 = 10\,000$$

6. Ismétlés nélküli kombináció

- Definíció
  - n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma
  - sorrend nem számít

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

- Példa
  - 24 gyerek van, ebből 5 mehet versenyre, hányféle lehetőség van?

$$n = 24$$
$$k = 5$$
$$\binom{n}{k} = \binom{24}{5}\frac{24!}{19! \cdot 5!} = 42\,504$$

7. Ismétléses kombináció

- Definíció
  - n elemből k kiválasztása
  - sorrend nem számít
  - számuk:

$$\binom{\boldsymbol{n+k-1}}{\boldsymbol{k}} = \frac{n+k-1}{(n \cdot 1)! \cdot k!}$$

- Példa
  - Van 10-féle fagyi, 4 gombócot eszem, hányféle lehetőség?

$$n = 10$$
$$k = 4$$
$$\frac{13!}{(9! \cdot 4!)} = 715$$

[N5] megjegyzést írt: Van n db elemünk, ki szeretnék választani belőle k db elemet.

[N6] megjegyzést írt: Binomiális együttható.

[N7] megjegyzést írt: $\frac{\textit{ismétlés nélküli variáció}}{\textit{ismétléses permutáció } k\text{-ra}}$

8. Binomiális tétel

- Tétel
  - tetszőleges valós x, y-ra és nemnegatív egész n-re:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y + \ldots + \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k + \ldots + \binom{n}{n} \cdot y^n$$

- Következmény:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$$

[N8] megjegyzést írt: Oszcillál. Ez olyan eset, amikor $a = 1, b = -1$.

9. Pascal háromszög

- Definíció
  - binomiális együtthatók háromszögben
  - ∀ sorának a sorösszege 2^{i-1}
  - ∀ sor összege 2x az előzőnek

[N9] megjegyzést írt: Minden…

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\vdots$$

10. Binomiális összeg

- Tétel
  - ∀ n nemnegatív egész számra:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

BACK

2. tétel:
Gráfelmélet alapja

Tételcím

Gráfelméleti alapfogalmak: gráf, egyszerű gráf, komplementer gráf, izomorfia, részgráf, feszített részgráf, élsorozat, út, kör, összefüggő gráf, (összefüggő) komponens. Fa fogalma, fák egyszerű tulajdonságai. Feszítőfa fogalma, annak létezése.

1. Gráf

- Definíció
  - egy gráf rendezett pár, $G = (V, E)$
    - $\boldsymbol{V}$: nem üres halmaz
      - elemei: pontok/csúcsok
      - csúcsok száma: $v(G)$
      - csúcshalmaz jelölése: $V(G)$
    - $\boldsymbol{E}$: V-ből képezhető párok egy halmaza
      - elemei: élek
      - élek száma: $e(G)$
      - élhalmaz jelölése: $E(G)$

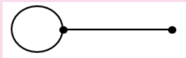
2. Hurok él, többszörös/párhuzamos él

- Definíció
  - ***hurokél:*** ha $e \in E$ a v_1, v_2 párnak felel meg, melynek két végpontja ugyanaz a pont (tehát $v_1 = v_2$)
  - ***párhuzamos él:*** azonos csúcsok között több él is fut

3. Egyszerű gráf

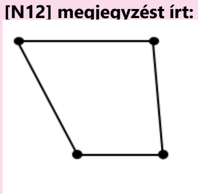
- Definíció
  - azokat a gráfokat, melyek **nem** tartalmaznak hurok és párhuzamos éleket

[N10] megjegyzést írt:
A lilával szedett, dőlt szövegek általában egy addig elő nem fordult fontos szó, definíció vagy tétel neve, melynek ismerete fontos.



[N11] megjegyzést írt:

[N12] megjegyzést írt:



4. Komplementer gráf

- Definíció
  - egy G gráf *komplementerén* azt a $\overline{G}$ gráfot értjük, melyet akkor kapunk, ha a G-t a $K_{v(G)}$ részgráfjának tekintjük
    - *$\overline{G}$-ben azok az élek vannak behúzva, amelyek G-ben nincsenek*

5. Izomorfia

- Definíció
  - $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok izomorfak, ha van olyan egyértelmű megfeleltetés (*bijekció*), hogy G-ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha G'-ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak és a szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük

6. Részgráf

- Definíció
  - a $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ részgráfja, ha a $V' \subseteq V, E' \subseteq E$
  - egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha a G-ben is illeszkednek

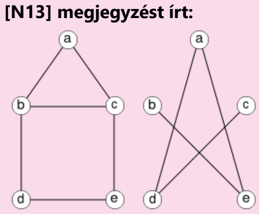
7. Feszítő részgráf

- Definíció
  - a $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ feszítő részgráfja, ha a G' részgráfja G-nek és $V' = V$
    - *tehát G'-ben szerepel G összes csúcsa, de nem az összes éle*

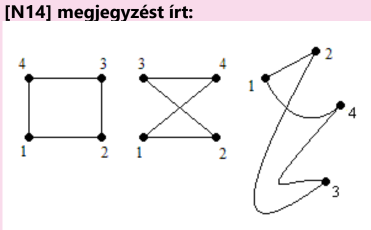
8. Feszített részgráf

- Definíció
  - ha E' pontosan azokból az E-beli élekből áll, amelyeknek két végpontja V'-ben van, és az E' az összes ilyen élet tartalmazza, akkor G' a G gráf V' által feszített részgráfja
    - *tehát G-ből kedvünkre kiválasztunk néhány csúcsot, viszont ezek között az eredeti G-hez hasonlóan behúzzuk az összes élet, amely az eredeti G-ben is benne volt*

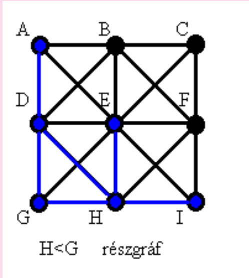
[N13] megjegyzést írt:



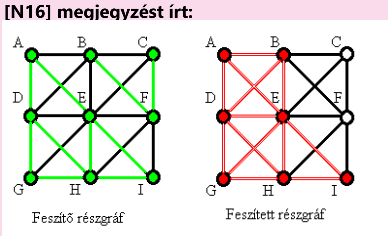
[N14] megjegyzést írt:



[N15] megjegyzést írt: ABCDEFGHI részgráfja az ADGHEI



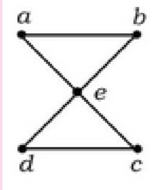
[N16] megjegyzést írt:



9. Élsorozat, út, kör

- Definíció
  - egy $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozat ***élsorozat/út***, ha e_i a v_{i-1}-et és v_i-t összekötő él
    - *akkor lesz ebből kör, ha visszatér a kiindulópontba*
  - ***kör:*** ha $v_0 = v_k$, akkor az élsorozat zárt
    - *egy kör páros, ha a hossza páros, és nincs benne páratlan kör*

[N17] megjegyzést írt:
Két páratlan (hármas) kört tartalmaz



10. Összefüggőség

- Definíció
  - G gráf ***összefüggő***, ha bármely két csúcs között ∃ élsorozat vagy út
  - egy **egyszerű** gráf összefüggő, ha $e \geq n - 1$
    - *ugye a fáknak $e = n - 1$ élük van, így, ha annál kevesebb éle van egy gráfnak, akkor az már nem összefüggő*

[N18] megjegyzést írt: Létezik…

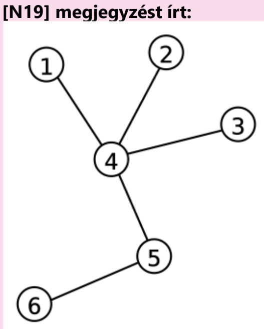
11. Komponens

- Definíció
  - G gráf komponense olyan H feszített részgráfja G-nek, hogy teljesül rá az, hogy H összefüggő, és bárhogy egy további csúcsot hozzáteszünk, már nem lesz összefüggő

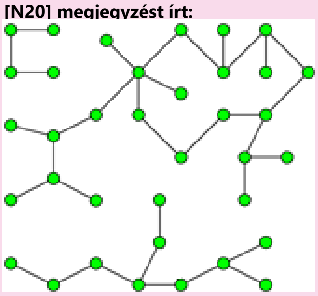
12. Fa, erdő

- Definíció
  - , ∀ ***fa gráf:***
    - összefüggő
    - körmentes
    - páros gráf, mert nem tartalmaz páratlan kört, és megadható jó 2 színnel való színezés
    - síkbarjazolhatóak, mert nem tartalmaznak K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot
  - ***erdő:*** ha a gráf nem összefüggő (több fából áll)

[N19] megjegyzést írt:



[N20] megjegyzést írt:



13. Fa fokszáma

- Tétel
  - ∀ legalább 2 pontú fában van legalább 2 egy fokszámú pont
- Bizonyítás
  - ! $(v_1, \ldots, v_k)$ a leghosszabb út a fában
  - ekkor beláthatjuk, hogy v_1, v_k végpontok egyfokúak lesznek
  - TFH. v_k nem egy fokszámú
  - az út többi pontjába nem vezethet, mivel a fa körmentes
  - új pontba se vezethet → hosszabb utat kapnánk, így ellentmondás lenne

[N21] megjegyzést írt: Legyen…

[N22] megjegyzést írt: Tegyük fel, hogy…

14. Fa éleinek száma

- Tétel
  - n pontú fa éleinek száma $n - 1$
- Bizonyítás
  - *(Teljes indukcióval bizonyítjuk)*
  - $n = 2$-re triviálisan teljesül
  - TFH. állítás igaz ∀ $n < n_0$-ra
  - *Fa fokszáma tétel szerint* ∀ n_0 fában van egy fokszámú pont, ezt hagyjuk el
  - ha elhagyjuk ezt a pontot és a hozzá tartozó élet, akkor mivel a maradék $n_0 - 1$ fára már igaz, így n_0 pontú fának $n_0 - 1$ éle van

15. Feszítőfa

- Definíció
  - F gráf a G gráf feszítőfája, ha F fa, és részgráfja G-nek
    - *tehát egy gráf feszítőfája a gráf ∀ csúcsát tartalmazó fa részgráf*
    - *∀ gráfnak van feszítő erdője*
      - *feszítő erdő: feszítőfa komponensekből álló részgráf*

16. Feszítőfa létezése

- **Tétel**
  - $\forall$ összefüggő G gráf tartalmaz feszítőfát
- **Bizonyítás**
  - ha G-ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élét
  - ha még mindig van, akkor megint hagyjunk el, amíg körmentes nem lesz
  - az összefüggőség nem sérül, mivel a körök $1-1$ élét hagyjuk el
  - pontot/csúcsot nem hagyunk el, tehát megkaptuk G gráf tartalmaz feszítőfáját

BACK

3. tétel:
Rajzolhatóság, Euler-formula

Tételcím

Síkbarajzolt és síkbarajzolható gráf fogalma. A síkbarajzolhatóság kapcsolata a gömbre rajzolhatósággal, Euler-tétel, becslés az élek számára egyszerű és egyszerű háromszögmentes gráfban. Kuratowski tétele (bizonyítás csak a könnyebbik irányban). Síkgráf duálisának fogalma.

1. Síkbarajzolhatóság

- Definíció
  - G síkbarajzolható gráf, ha lerajzolható úgy (a síkban), hogy az élei a csúcsokon kívül sehol máshol ne keresztezzék egymást
    - *Síkbarajzolhatóság vizsgálat lépései:*
      - *Van-e benne 5 db legalább 4 fokú csúcs? (K_5 lehet)*
      - *Van-e benne 6 db legalább 3 fokú csúcs? ($K_{3,3}$ lehet)*
      - *Ha mind a kettőre nem a válasz, akkor nagy valószínűséggel síkba lehet rajzolni, és ezt be is kell bizonyítani azzal, hogy megpróbáljuk síkba rajzolni*
      - *Ha volt igen válasz próbáld meg síkba rajzolni*
        - » *ha sikerült, akkor megvagy, mert síkba tudtad rajzolni*
        - » *ha nem, akkor keresd meg, hogy lehet-e benne $K_{3,3}$, ha nem, akkor K_5 lehet benne*
        - » *(K_5 nehezebb találni, érdemes mindig $K_{3,3}$ kezdeni)*

2. Tartomány

- Definíció
  - G síkbarajzolt gráf területei, melyeket közrefognak az élek
  - csak síkbarajzolt gráfoknál

3. Gömbre rajzolhatóság

- **Tétel**
  - G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható
- **Bizonyítás**
  - síkban levő gráf leképezhető gömbfelületre
  - gömbfelület valamelyik pontjával a síkra helyezzük → *déli pólus*
  - ezzel szemben: *északi pólus*
    - ebből egyeneseket húzunk a gráf pontjaiba
    - az itteni vonalak metszéspontja a kívánt vetítés → ***sztereografikus projekció***
  - visszafele is lehet

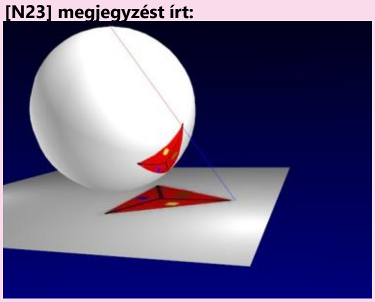
4. Euler-formula (Euler-féle poliéder tétel)

- **Tétel**
  - ha egy összefüggő síkbeli gráfnak
    - csúcsa: n
    - éle: e
    - tartománya: t (*külső tartomány is*)
  - eleget tesz az Euler-formulának:

$$n + t = e + 2$$

- **Bizonyítás**
  - ! C: egy gráf köre
  - ! a: egy gráf éle
  - a C kör a síkot 2 részre osztja
    - egyéb élek további tartományokra oszthatja
    - de mindkét részben van olyan tartomány, amelynek a a határa
  - a-t elhagyva a tartományok egyesülnek, számuk eggyel csökken, csúcsok száma nem változik
  - addig folytatjuk, amíg nem marad kör → csak feszítőfa marad

[N23] megjegyzést írt:



- állítás belátása erre triviális
  - $t = 1$
  - $e = n - 1$

5. Becslés az élek számára (1)

- Tétel
  - ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3, akkor:

$$e \leq 3n - 6$$

- Bizonyítás
  - vegyük G tetszőleges síkbarajzolását
  - ! $c_1, \ldots, c_t$ egyes tartományokat határoló élek
  - mivel egyszerű, így ∀ tartomány legalább 3 él határolja, $c_i \geq 3$
  - egy élhez legfeljebb 2 tartomány tartozik $\rightarrow \leq 2e$

$$3t \leq c_1 + \ldots + c_t = \sum_{i=1}^{t} c_i \leq 2e$$

  - Euler – formulát felhasználva:

$$(e - n + 2) \leq 2e$$

[N24] megjegyzést írt: Átrendezve megkapjuk az eredményt.

6. Becslés az élek számára (2)

- Tétel
  - ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf és ∀ köre legalább 4 hosszú, valamit legalább 4 pontja van, akkor:

$$e \leq 2n - 4$$

- Bizonyítás
  - ∀ tartományt legalább 4 él határol
  - előző bizonyítás gondolatmenete alapján: $4t \leq 2e$

7. Becslés minimális fokszámra

- **Tétel**
  - ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor a minimális fokszám legfeljebb 5:

$$\delta = \min d(v) \leq 5$$

- **Bizonyítás**
  - TFH. gráf pontjainak a száma legalább 3
  - TFH. $\delta \geq 6$
  - a fokszámok összege = az élszámok $2x, 6n < 2e$
  - élszám-becslés alapján azonban $2e \leq 6n - 12 \rightarrow$ ellentmondás

8. Kuratowski-gráfok

- **Tétel**
  - ha a gráf $K_{3,3}$ vagy K_5, akkor NEM síkbarajzolható

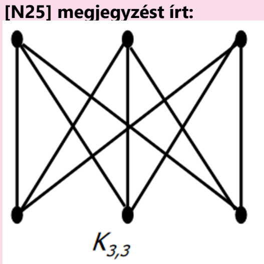
9. Topologikus izomorfia (homeomorfia)

- Definíció
  - G, H gráfok topologikusan izomorfak, ha az alábbi transzformációk izomorf gráfokba transzformálhatóak
    - ha egy él helyett 2-fokú csúcsot helyettesítünk
    - 2-fokú csúcsot egy éllel

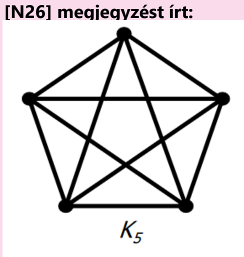
10. Kuratowski-tétel

- **Tétel**
  - egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot
- **Bizonyítás**
  - ha K_5 síkbarajzolható volna, akkor teljesülne rá az élbecslés tétel
  - K_5 pontjainak száma 5, éleinek száma 10
    - 10 nem $\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9 \rightarrow K_5$ nem síkbarajzolható
  - $K_{3,3}$ $\forall$ körének hossza legalább 4
  - ha volna 3 hosszú kör, legalább 2 „kút" vagy „ház" között kellene annak mennie, ami nem lehetséges

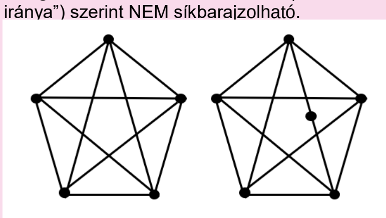
[N25] megjegyzést írt:



[N26] megjegyzést írt:



[N27] megjegyzést írt:
A jobb oldali gráf tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (és annak „könnyű iránya") szerint NEM síkbarajzolható.

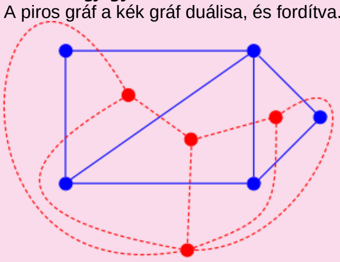


- 2. élbecslés alkalmazható
- $K_{3,3}$ pontjainak a száma 6, éleinek száma 9
  - 9 nem $\leq 2 \cdot 6 - 4 = 8 \rightarrow K_{3,3}$ nem síkbarajzolható

11. Síkgráf duálisa

- Definíció
  - G tartományaihoz rendelünk pontokat (G^* pontjai)
  - G^*-ban akkor kötünk össze két pontot, ha a megfelelő G-beli tartományoknak van közös határvonala
  - duális gráfban tehát $n^* = t$, $t^* = n$ és $e^* = e$
  - párhuzamos élekből → *soros él*
  - hurokél → *elvágó él*

[N28] megjegyzést írt:
A piros gráf a kék gráf duálisa, és fordítva.



BACK

4. tétel:

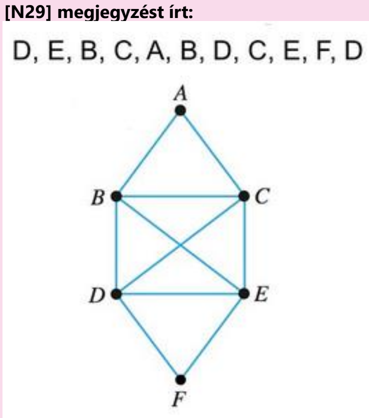
Euler- és Hamilton-körök

Tételcím

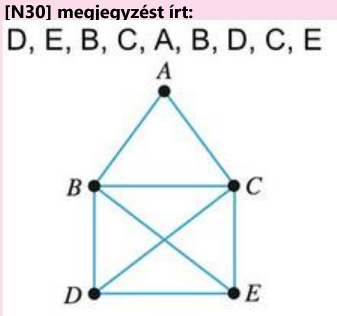
Hamilton-körök és -utak. Szükséges feltétel Hamilton-kör/út létezésére. Elégséges feltételek: Dirac és Ore tétele. Euler-körök és -utak, ezek létezésének szükséges és elégséges feltétele.

1. **Euler-kör/körséta és -út/séta**
   - Definíció
     - ***Euler-kör/körséta:*** G gráfban egy zárt élsorozat, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza G összes élét
     - ***Euler-út/séta:*** ha az élsorozat nem zárt
2. **Euler-kör/körséta létezése**
   - **Tétel**
     - G összefüggő gráfban akkor és csak akkor ∃ Euler-kör, ha G ∀ pontjának fokszáma páros
   - **Bizonyítás**
     - *(szükségesség bizonyítása)*
     - lássuk be, hogy van a gráfban Euler-kör, akkor ∀ pont foka páros
     - elindulunk a gráf tetszőleges pontjából és körbejárjuk Euler-kör mentén
     - ∀ pontba ugyanannyiszor mentünk be, mint ahányszor ki
     - ki-bemenések száma a pont fokszáma → biztosan páros
     - *(elégségesség bizonyítása)*
     - $! v \in V$ a gráf egy tetszőleges pontja
     - P egy v-ből induló élismétlés nélküli séta, addig megy, ameddig el nem akad
     - mivel ∀ pont foka páros ezért:
       - P v-ben akad el
       - v-nek ∀ élét használja

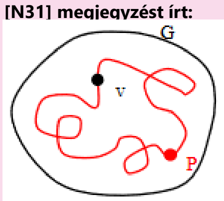
[N29] megjegyzést írt:



[N30] megjegyzést írt:



[N31] megjegyzést írt:



- $\forall$ csúcsból páros sok élet használt

Euler-út/séta létezése

- Tétel
  - G összefüggő gráfban akkor és csak akkor $\exists$ Euler-út, ha G páratlan fokszámú pontok száma 0 vagy 2
- Bizonyítás
  - *(szükségesség bizonyítása)*
  - az előbbihez hasonlóan belátható, hogyha G-ben $\exists$ Euler-út, akkor az Euler-út két végpontjának a kivételével $\forall$ pont foka páros
  - *(elégségesség bizonyítása)*
  - ha $\forall$ pont foka páros $\rightarrow$ Euler-kör ✔
  - ha van két páratlan fokú pont: u, v
  - húzunk élet közéjük
  - így $\forall$ pont foka páros lesz $\rightarrow$ lesz Euler-kör
  - ha elhagyjuk u, v-t, akkor Euler-út lesz

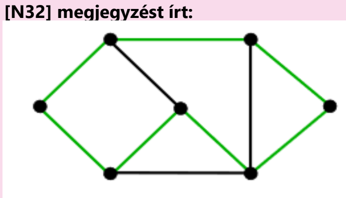
3. Hamilton-kör/körséta és -út/séta

- Definíció
  - ***Hamilton-kör/körséta:*** G gráfban egy H kör, ha G $\forall$ pontját pontosan egyszer tartalmazza, és ugyanoda tér vissza
  - ***Hamilton-út/séta:*** egy út, ha G $\forall$ pontját pontosan egyszer tartalmazza

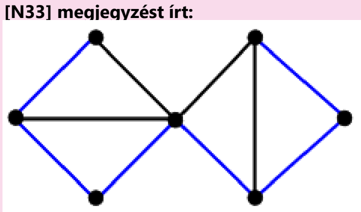
4. Szükséges feltétel a H-kör/körséta létezéséhez

- Tétel
  - ha G gráfban $\exists$ k olyan pont, melyeket elhagyva a gráf több mint k komponensre esik $\rightarrow$ ekkor nem $\exists$ a gráfban H-kör
  - ha több mint $k+1$ komponensre esik, akkor nem $\exists$ a gráfban H-út se
- Bizonyítás
  - TFI. van a gráfban H-kör
  - $!\,(v_1, \dots, v_n)$ és $!\,(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ az a k pont, amelyet elhagyva a gráf több mint k komponensre esik

[N32] megjegyzést írt:



[N33] megjegyzést írt:



[N34] megjegyzést írt:
Mikor van egy gráfban Hamilton-kör vagy -út?
Erre nincs egyszerű válasz. Valószínűleg nincs gyorsan ellenőrizhető feltétel, amely eldöntené, hogy egy gráfban van-e H-kör vagy -út. Ha mégis lenne ilyen eljárás, akkor a ma elterjed titkosítási eljárások mind haszontalanná válnának. Gyors Hamilton-körkereséssel gyorsan fel lehetne őket törni.

[N35] megjegyzést írt: Hamilton-kör.

[N36] megjegyzést írt: Tegyük fel indirekten, hogy…

- az elhagyott pontok közötti „ívek" biztosan összefüggő komponenseket alkotnak
- pl. $\left(v_{i_1+1}, v_{i_2+2} \dots, v_{i_k-1}\right)$ is összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti H-kör éle fut
- épp k ilyen ívet kapunk, ezért nem lehet több komponens k-nál
- ugyanezt bizonyítjuk útra is
  - ha egy H-útból elhagyunk k pontot, legfeljebb $k+1$ komponens keletkezhet

[N37] megjegyzést írt: Kevesebb lehet, mivel különböző ívek közt futhatnak élek.

5. Elégséges feltétel – Ore tétel

- Tétel
  - ha az n pontú G gráfban ∀ olyan $x, y \in V(G)$ pontpárra, amelyre $x, y \notin E(G)$ (nem szomszédosak), teljesül az, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van H-kör
    - *tehát úgy kérdezünk rá erre egy feladatban, hogy bármely két összeköthetetlen csúcs fokszámösszege nagyobb vagy egyenlő, mint a csúcsok száma?*
- Bizonyítás
  - TFI. a gráf kielégíti a feltételt, de nincs benne H-kör
  - vegyük hozzá éleket úgy, hogy ne legyen kör
  - addig csináljuk, amíg már nem tudunk úgy hozzávenni, hogy ne lenne H-kör benne
  - így kapott G' gráfra továbbra is teljesül a feltétel, hiszen az új élek behúzásával „rossz pontpárt" nem lehet létrehozni
  - biztosan van két olyan pont, hogy $x, y \notin E(G'')$
  - ennek a behúzásával már lesz $G'' + x, y$-ban H-kör → G-ben van H-út
  - ! ez az út $P = z_1, \dots, z_n$, ahol $z_1 = x$ és $z_n = y$
  - ha x szomszédos a P út valamely z_k pontjával, akkor y nem lehet összekötve z_{k-1}-gyel, mert akkor az egy H-kört adna
  - így y nem lehet összekötve legalább $d(x)$ ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

    - ez viszont ellentmondás, mert $x, y \notin E(G)$

6. Elégséges feltétel – Dirac tétel

- **Tétel**
  - ha egy n pontú G egyszerű gráfban ∀ pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráfban ∃ H-kör
- **Bizonyítás**
  - az előző tételből következik, hiszen, ha ∀ pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor teljesül az Ore-tétel feltétele, mivel bármely pontpárra:

$$d(x) + d(y) \geq n$$

BACK

5. tétel:
Gráfok színezése, páros gráf

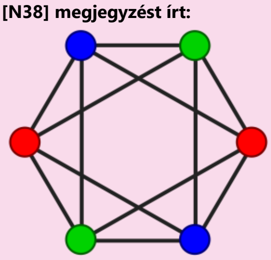
Tételcím

Gráfok színezése, $x(G)$ fogalma és viszonya $\omega(G)$-hez. Mycielski konstrukciója. Mohó színezés. $x(G)$ viszonya $\Delta(G)$-hez. Intervallumgráfok, algoritmus ezek optimális színezésére. Páros gráf fogalma, kapcsolata a páratlan körökkel.

1. Gráfok színezése

- Definíció
  - egy G hurokmentes gráf k színnel színezhető
  - ha ∀ csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen
  - G ***kromatikus száma*** $x(G) = k$, ha k színnel meg lehet színezni G-t, de $k - 1$-gyel már nem
  - egy ilyen ***színezés***nél az azonos színű pontok halmazát színosztálynak nevezünk

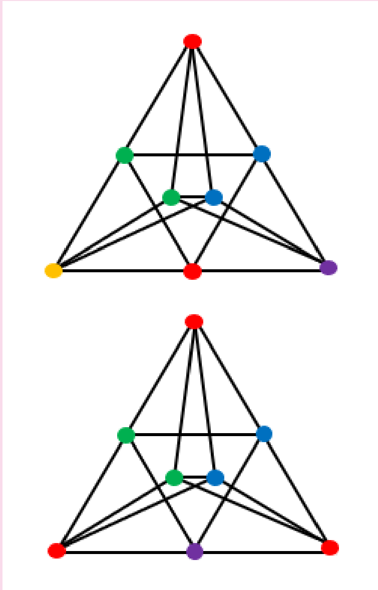
[N38] megjegyzést írt:



2. Mohó színezés

- algoritmus
  - sorba rendezi a csúcsokat $(v_1, \dots, v_n)$
  - a v_i.-hoz azon legkisebb színt rendelei, amit a $(v_1, \dots, v_{i-1})$ szomszédokhoz még nem rendelt
  - a mohó színezése nem feltétlenül a legoptimálisabb színezést adja
    - *ha ki tudtuk színezni a gráfot, arról is meg kell bizonyosodni, hogy -1 színnel már NEM lehet kiszínezni azt*
    - *ezt be is kell bizonyítani, pl. ismételten lerajzoljuk a gráfot, és elkezdjük kiszínezni $k - 1$ színnel*
    - *ezt először egy tetszőlegesen kiválasztott ponttal kezdjük, lehetőleg egy kis fokszámúval, és a másik színekkel a szomszédait megszínezzük*

[N39] megjegyzést írt:
Itt ugyanaz a két gráf szerepel egy rossz és egy jó színezéssel. Elsőt 5, másodikat 4 színnel is ki tudtuk színezni.



- *a szomszédok után mindig úgy haladunk, hogy egyértelmű legyen, hogy melyik egy színt tudjuk használni*
- *ebből a végén ki fog jönni, hogy még kellene +1 szín, hogy be tudjuk fejezni helyesen a színezést*

3. $x(G)$ és $\Delta(G)$ viszonya

- **Tétel**
  - $\forall$ G gráfra teljesül, hogy

$$x(G) \leq \Delta(G) + 1$$

- **Bizonyítás**
  - a mohó színezés segítségével bizonyítunk
  - színezzük ki G pontjait $(v_1, \dots, v_n)$ úgy, hogy az i-edik lépésben v_i-t olyan színre színezzük, ami nem szerepel v_i kiszínezett szomszédságában
  - mivel v_i-nek legfeljebb $\Delta(G)$ kiszínezett szomszédja lehet, és $\forall$ szomszéd legfeljebb egy színt zár ki
  - $\rightarrow$ ezért v_i színezése elvégezhető a rendelkezésre álló színek valamelyikével (a kimaradó $\Delta(G) + 1$-edik)
  - v_n kiszínezése után G egy $\Delta(G) + 1$ színezését kapjuk
  - $x(G) = \Delta(G) + 1$ esetben a teljes gráfról vagy húr nélküli páratlan körről beszélünk

4. Brooks-tétel

- **Tétel**
  - ha G egyszerű, összefüggő, nem teljes gráf, nem páratlan kör, akkor $x(G) \leq \Delta(G)$
    - *tehát a kromatikus szám nem nagyobb, mint a legnagyobb fokszám*

5. Intervallumgráf

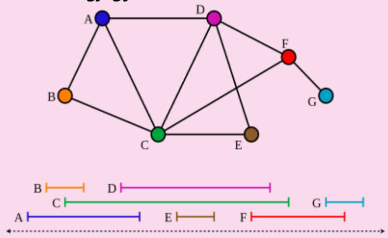
- Definíció
  - ! $I_1 = |a_1, b_1|, I_2 = |a_2, b_2|, \dots$ korlátos zárt intervallumok
  - $\forall$ a_i, b_i legyen pozitív egész
  - ! $p_1, p_2, \dots$ egy G gráf pontjai, és p_i, p_j akkor és csak akkor legyen él G-ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset \rightarrow$ ezek az intervallumgráfok

[N40] megjegyzést írt: *Ejtsd: khi*

[N41] megjegyzést írt: Legnagyobb fokszám.

[N42] megjegyzést írt:
Legkisebb szám, ahány színnel ki lehet színezni a gráfot, hogy két érintkező csúcs ne legyen azonos.

[N43] megjegyzést írt:



BTW:
Az operációkutatásban az intervallumgráfokat erőforráskiosztási problémák modellezésére használják. Az intervallumok jelzik az egyes kérelmek időtartamát; a legnagyobb súlyú független ponthalmaz felel meg az optimális kiosztásnak.

6. Intervallumgráf színezése

- Tétel
  - G intervallumgráf, emiatt:

$$\omega(G) = x(G)$$

- Bizonyítás
  - a mohó színezés segítségével bizonyítunk
  - az intervallumokat bal végpontja szerint sorba rendezzük
  - növekvő sorrend szerint színezzük → optimális lesz a színezés
  - TFH. színnel színez a mohó algoritmus
  - cél belátni: $k \leq \omega(G) \leq x(G) \leq k$
  - ….

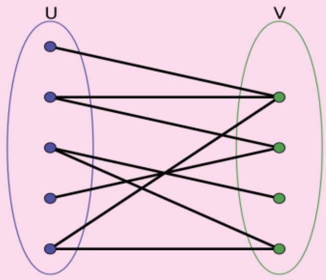
[N44] megjegyzést írt: Egy teljes gráf részgráfja a klikk, és a jele: $\omega(G)$**.** A maximális klikkszám, amikor a klikkben bármely két csúcs szomszédos, de, ha hozzáveszünk még egyet az már nem.

[N45] megjegyzést írt: Nem intervallumgráfoknál: $\omega(G) \leq x(G)$

7. Páros gráf

- Definíció
  - egy G páros gráf, ha G pontjainak $V(G)$ halmazát két részre, egy A és B halmazra tudjuk osztani úgy, hogy G ∀ élének egyik végpontja A-ban, másik B-ben legyen
  - jelölése: $G = (A, B)$
  - a $K_{a,b}$-vel jelölt teljes ***páros gráf*** olyan $G = (A, B)$ gráf, ahol $|A| = a$ és $|B| = b$
  - és ∀ A-beli pont össze van kötve ∀ B-beli ponttal
    - *egy halmazon belül a pontok nincsenek összekötve csak a másik halmaz pontjaival*

[N46] megjegyzést írt:



8. Párosítás létezése

- Tétel
  - egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha ∀ G-ben lévő kör páros
- Bizonyítás
  - ha G páros gráf, és C egy kör G-ben, akkor C pontjai felváltva vannak A-ban és B-ben, így $|V(C)|$ nyilván páros
  - ha G ∀ köre páros hosszú, akkor megadhatjuk az A és B halmazt
  - kiválasztunk egy tetszőleges v pontot, legyen ez A első pontja

  - v ∀ szomszédját tegyük bele B-be, majd ezeknek a szomszédjait rakjuk bele A-ba
  - addig folytatjuk, amíg ki nem fogyunk a pontokból
  - biztosan jó elosztás lesz, mert, ha A-ban két szomszédos pont, akkor léteznie kéne a gráfban páratlan körnek → ellentmondás lenne
  - nem összefüggő gráfok esetén komponensenként hajtsuk végre

9. Kromatikus szám és párosítás kapcsolata

- **Tétel**
  - egy legalább egy élt tartalmazó G gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha $x(G) = 2$
- **Bizonyítás**
  - ha a gráf páros, akkor az egyik oldalon lévő pontokat pirossal, másikokat kékkel megszínezzük
  - ha a gráfnak van egy éle, akkor ennek a két végpontját már nem színezhetjük egy színűre
  - színek megfelelnek a két halmaznak, amire fel tudjuk bontani a páros gráfokat

BACK

6. tétel:
Gallai, Tutte tétele

Tételcím

Párosítás fogalma. Független élhalmaz, lefogó élhalmaz, független ponthalmaz, lefogó ponthalmaz, valamint $\nu(G), \delta(G), \alpha(G), \tau(G)$ fogalma, valamint ezek egymáshoz való viszonya. Gallai tételei. Tutte tétele (csak szükségesség bizonyításával).

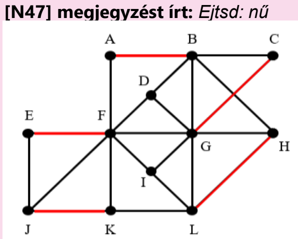
1. Párosítás/részleges párosítás

- Definíció
  - ***élek lefedése:*** végpontok részleges párosítás
  - ***teljes párosítás:*** ha gráf ∀ pontját lefedi a párosítás

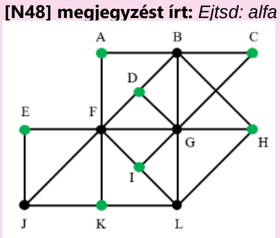
2. Független/lefogó élek/pontok

- Definíció
  - ***független élhalmaz:*** olyan élhalmaz, hogy semelyik két élnek nincs közös pontja (diszjunkt)
    - ***független élek maximális száma:*** $\nu(G)$
      - *a tanultak szerint,* $100 <$ *független élhalmaz nem ∃*
  - ***független ponthalmaz:*** ha nincs benne két él által szomszédos pont
    - ***független pontok maximális száma:*** $\alpha(G)$
  - ***lefogó élhalmaz:*** $Y \subseteq E(G)$, ha ∀ pontot lefog
    - ***lefogó élek minimális száma:*** $\rho(G)$
      - *ugyanazokat az éleket kell bejelölni, mint a független éleknél, és meg kell nézni, hogy találunk-e még azokon kívül*
  - ***lefogó ponthalmaz:*** $X \subseteq V(G)$, ha G ∀ élének legalább egyik végpontját tartalmazza
    - ***lefogó pontok minimális száma:*** $\tau(G)$
      - *technikailag a* $\alpha(G)$ *pontok ellentétei*

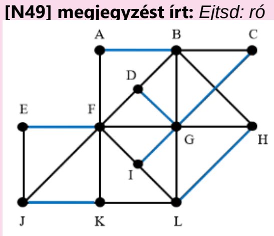
[N47] megjegyzést írt: *Ejtsd: nű*



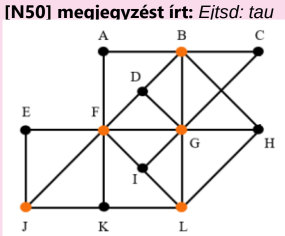
[N48] megjegyzést írt: *Ejtsd: alfa*



[N49] megjegyzést írt: *Ejtsd: ró*



[N50] megjegyzést írt: *Ejtsd: tau*



- *ha a feladat mind a négy megkeresését írja, érdemes akkor a nűvel és az alfával kezdeni, utána már pofon egyszerű a dolog…*
- *figyeljünk arra is oda, hogyha megtaláltuk ezeket a pontokat, nem elég leírni, hogy na megtaláltam 5 db ilyet, akkor ez ennyi is, hanem be kell bizonyítani pl. egy Gallaival vagy megnézed egymáshoz való viszonyait*
- *ha egy feladatban találtál* 5 *lefogó pontot, akkor felírod, hogy* $\tau(G) \leq 5$
- *ezt követően megnézed, hogy mennyi a* $\nu(G)$*, ha az is* 5*, akkor felírod, hogy* $5 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 5$*, és ezzel bizonyítod, hogy igen, így mind a két szám* 5*-tel egyenlő*

3. Viszonytételek

- **Tétel**
  - $\forall$ G gráfra:

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

- **Bizonyítás**
  - legyen M maximális méretű független élhalmaz
  - M lefogásához legalább $\nu(G) = |M|$ pontra van szükség, ezért

$$\tau(G) \geq |M|$$

    - pl. $\nu(K_3) = 1 < \tau(K_3) = 2$
  - második állítást is hasonlóan bizonyítjuk

4. Gallai tétel I.

- **Tétel**
  - $\forall$ olyan G gráfra, amely hurokélmentes:

$$\tau(G) + \alpha(G) = n$$

- **Bizonyítás**
  - egy X halmaz pontjai akkor és csak akkor függetlenek, ha $\frac{V(G)}{X}$ halmaz lefogó ponthalmaz
  - ha X nem független, akkor van két összekötött pont
    - így $\frac{V(G)}{X}$ nem fogja le ezt az élt

- fordítva: ha $\frac{V(G)}{X}$ nem fog le egy huroktól különböző élt, akkor X-ben ennek az élnek mindkét végpontja szerepel
- tehát: $\tau(G) \leq \left|\frac{V(G)}{X}\right|$ teljesül $\forall$ X független ponthalmazra

$$\rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \leq v(G)$$

- hasonlóan: $\alpha(G) \geq |\frac{V(G)}{Y}|$ $\forall$ Y lefogó ponthalmazra

$$\rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \geq v(G)$$

5. Gallai tétel II.

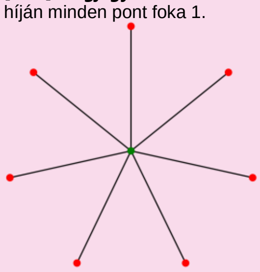
- **Tétel**
  - $\forall$ olyan G gráfra, melyben nincs izolált pont:

$$v(G) + \rho(G) = n$$

- **Bizonyítás**
  - G-nek $\exists$ $v(G)$ diszjunkt éle
  - ezek két $v(G)$ pontot fognak le
  - maradék $n-2$ db $v(G)$ lefogható $1-1$ új éllel
  - $\rightarrow v(G) + n - 2 \cdot \mathrm{v}(G) = n - v(G)$ éllel $\forall$ pont lefogható
    - $\rho(G) \leq n - v(G) \rightarrow v(G) + \rho(G) \leq n$
  - ha F egy lefogó élhalmaz minimális száma, akkor F:
    - körmentes
    - nincs 3 hosszú útja
    - $\rightarrow F$ diszjunkt csillagok uniója
  - ha F-ben k csillag van, akkor a halmaz $n-k$ élet tartalmaz, hiszen k komponensű erdőről van szó
    - $\rho(G) = n - k$
  - a halmaz tartalmaz k diszjunkt élt: $k \leq v(G) \rightarrow$ hozzáadjuk az előző egyenlőséget:
    - $n - k + k \leq v(G) + \rho(G)$
    - tehát: $n \leq v(G) + \rho(G) \leq n$

[N51] megjegyzést írt: Mert nincs izolált pont.

[N52] megjegyzést írt: Összefüggő gráf, legfeljebb 1 híján minden pont foka 1.



6. Tutte-tétel

[N53] megjegyzést írt: Ejtsd: Tát

- **Tétel**
  - egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $\forall\ X \subseteq V(G)$-re $c_p(G - X) \leq |X|$
    - *akárhogy hagyunk el a gráfból pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma ennél nem több*
- **Bizonyítás**
  - *(csak szükségesség bizonyítás)*
  - ha G-ben van teljes párosítás, akkor nyilvánvalóan teljesül a feltétel
  - mert, ha elhagyunk a gráfból X-et, akkor a páratlan komponensek mindegyikéből az eredeti gráfban indul ki legalább egy párosításbeli él
  - ezek az élek csak 1-1 különböző X-beli pontba mehetnek
  - $\rightarrow c_p(G - X) \leq |X|$

BACK

7. tétel:
Javítóutak, Kőnig

Tételcím

Párosítások páros gráfban, a javítóutak módszere, Kőnig, Hall, és Frobenius tétele.

1. Párosítás

- Definíció
  - ***párosítás/részleges párosítás:*** ha semelyik két élnek nincs közös pontja → *független élek*
  - részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait
  - ***teljes párosítás***: párosítás lefedi a gráf összes pontját

2. Alternáló út

- Definíció
  - létrehozunk egy részleges párosítást
  - a párosítás során bevett élek élhalmaza legyen X
  - alternáló út → élsorozat, amely felváltva tartalmaz X és nem-X-beli elemeket

3. Javító út

- Definíció
  - $G(A, B, E)$ páros gráfban van nem teljes párosítás
  - P javító út, ha párosítatlan A-ból indul, párosítatlan B-be érkezik és P alternáló út
  - úgy tudjuk bevenni, hogy a nem-X-beli éleket bevesszük és a régebben X-beli éleket nem

4. Javító utas algoritmus (módosított BFS)

- algoritmus
  - bemenet: $G(A, B, E)$ gráf, M párosítás
- **1. lépés:**
  - ha van ebben javító út, bevesszük
  - addig folytatjuk, amíg létre nem hozunk újabb utakat
- **2. lépés:**
  - ha már nem tudunk többet bevenni, akkor `STOP`
  - itt eléri a maximális párosítást
- az algoritmus mohó módon működik

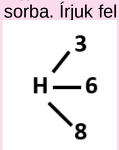
5. König tétel

- **Tétel**
  - ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$
  - ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$
- **Bizonyítás**
  - *(első állítás bizonyítása)*
  - $!\,M$ párosítás, amely a javító utak módszerével már nem bővíthető
  - $!\,U = A - X,\ T'$ azon B-beli pontok halmaza, amely elérhetőek U-ból alternáló úton, T ezek párjainak halmaza
  - $!\,Y = T' \cup (X - T)$
  - ennek a halmaznak éppen $|M|$ pontja van
  - ezek $\forall$ élt lefognak, hiszen $N(T \cup U) = T' \rightarrow$ (*7. tétel, Hall-tétel bizonyításnál*)
  - így $\tau(G) \leq |M| \leq \nu(G) \rightarrow$ (*6. tétel, Viszonytételek alapján*)
  - *(második állítás bizonyítása)*
  - (*6. tétel, Gallai két tétele miatt*) $\nu(G) + \rho(G) = \tau(G) + \alpha(G)$ imént beláttuk, hogy $\nu(G) = \tau(G)$

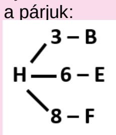
[N54] megjegyzést írt:
Bejelöljük minden oszlopba a legelső párt, akit találunk, amíg el nem fogynak a lehetőségek. H-nál nincs semmi, így jön a javítóút a H-ra.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

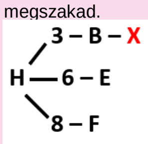
Ugye a H-ból 3 helyre mehetünk: 3-as, 6-os, és 8-as sorba. Írjuk fel ezeket.



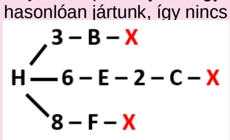
Írjuk a számokhoz, hogy a bekarikázottak közül melyik a párjuk:



Majd hasonlóan, ahogy H-nál, írjuk fel, hogy pl. B-ből hova lehetne menni. Sajnos B-ből csak a 3-asba, és a 8-asba lehet, de mivel azokat már felírtuk, így ez az út megszakad.



Majd azt tapasztaljuk, hogy a másik kettőnél is hasonlóan jártunk, így nincs javítóút a H-ra.



Tehát a talált párosítás maximális, azaz $\nu(G)$ =8, és mivel az ilyen gráfok párosak, így tudjuk, hogy a lefogó pontok számával lesz ez azonos a Gallai-tétel miatt: $\nu(G) = \tau(G) = 8$

6. Hall-tétel/Hall-feltétel

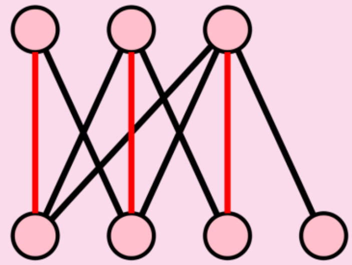
- **Tétel**
  - egy G gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha $\forall$ $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$
- **Bizonyítás**
  - ha $\exists$ A-t lefedő párosítás, akkor $\forall$ A-beli pontnak különböző párja van, tehát tetszőleges $X \subseteq A$-ra
  - igazolnunk kell $\nu(G) \geq |A|$
  - ! U minimális ($\tau(G)$ méretű) lefogó ponthalmaz
  - ! $U_A \coloneqq U \cap A,\ U_B \coloneqq U \cap B$
  - mivel U lefogja az $X \coloneqq \frac{A}{U_A}$-ból induló éleket, ezért

$$\nu(G) = \tau(G) = |U| = |U_A| + |U_B| \geq |U_A| + |N(X)| \geq |U_A| + |X| = |A|$$

7. Frobenius-tétel

- **Tétel**
  - egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és $|N(X)| \geq |X|$ $\forall$ $X \subseteq A$-ra
- **Bizonyítás**
  - a két feltétel szükségessége nyilvánvaló
  - ha teljesül a második feltétel, akkor a Hall-tétel miatt van A-t fedő párosítás
  - mivel $|A| = |B|$, ezért ez lefedi B-t is

[N55] megjegyzést írt: Példa egy páros gráfra, ahol a felső ponthalmaz teljesíti a Hall-feltételt, így létezik őt lefedő párosítás.



BACK

8. tétel:
Vizing, Kőnig élkromatikus szám

Tételcím

Teljes párosítás létezése reguláris páros gráfban. Gráfok élszínezése, $x_e(G)$ fogalma és viszonya $\Delta(G)$-hez. Vizing-tétel (bizonyítás nélkül), Kőnig tétele a páros számok élkromatikus számáról.

1. Reguláris gráf

- Definíció
  - ***reguláris:*** ha ∀ csúcsának ugyanannyi szomszédja van, tehát ∀ csúcs fokszáma azonos
  - ***k-regulárisnak:*** a közös fokszámot k -val jelölve beszélhetünk k -reguláris gráfról is
  - **osztályok**
    - 0-reguláris: nem tartalmaznak éleket, üres gráfok
    - 1-reguláris: 1-1 éllel összekötött csúcspárok
    - 2-reguláris: izolált körök
    - 3-reguláris: *cubic graph*

2. Reguláris gráfban teljes párosítás

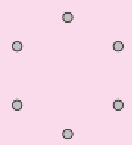
- Definíció
  - ∀ reguláris gráfban ∃ teljes párosítás
- Bizonyítás
  - vegyünk egy páros gráfot
  - A, B pontosztállyal, amely k-reguláris
  - lássuk be, hogy A és B-nek ugyanaz az elemszáma
  - A-ból $k \cdot n$, B-ből $k \cdot m$ él megy ki

$$k \cdot n = k \cdot m \quad /:k$$

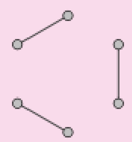
$$n = m$$

  - Hall-feltétel: $|N(A) \geq |A|$

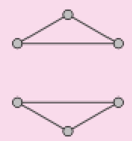
[N56] megjegyzést írt:



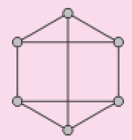
[N57] megjegyzést írt:



[N58] megjegyzést írt:



[N59] megjegyzést írt:



- A-ból $k \cdot |A|$ él megy ki
- ezek $N(A)$ csúcsba mennek
- $N(A)$-beli csúcsban átlagosan $(k \cdot |A|)\backslash|N(A)|$ él megy tehát

$$(k \cdot |A|)\backslash|N(A)| \leq k \quad / \cdot |N(A)|, \quad : k$$

$$|A| \leq |N(A)|$$

[N60] megjegyzést írt: Mivel egy csúcsba maximum k él megy.

- Hall és Frobenius-tétel is teljesül $\rightarrow \exists$ teljes párosítás

3. Élszínezés

- Definíció
  - G gráf élei k színnel színezhetők, ha $\forall$ élt ki lehet színezni k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen
  - G élkromatikus száma $x_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetők, de $k-1$-gyel már **nem**
    - *hasonlóan a kromatikus számnál, bizonyítás a Vizing-tétel esetében $\rightarrow$ ki lehet-e színezni $k-1$-gyel*
    - *az alsó becslés esetében ez magától érhetődő, és ezt a lépést kihagyhatjuk*

4. Vizing-tétel

- Tétel
  - ha egy G egyszerű gráf, akkor $x_e(G) \leq \Delta(G) + 1$

[N61] megjegyzést írt: Legnagyobb fokszám száma.

5. Élkromatikus szám

- Tétel
  - tetszőleges G gráfra $x_e(G) \geq \Delta(G)$

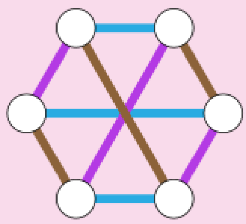
[N62] megjegyzést írt: Vizing-tétellel együtt alkalmazható.

- Bizonyítás
  - egy csúcsból induló élek egymástól különböző színt kapnak
  - ez speciálisan maximális fokszámú csúcsokból induló élekre igaz

6. Kőnig-tétel

- Tétel
  - ha G páros gráf, akkor $x_e(G) = \Delta(G)$

[N63] megjegyzést írt: Mivel a gráf páros gráf, így nem kell bizonyítani a fokszámokra, hanem Kőnig tételét alkalmazni rá
$x_e(G) = \Delta(G) = 3$.



- Bizonyítás
  - előző állítás miatt elég igazolni, hogy $x_e(G) \leq \Delta(G)$
  - $\exists$ olyan H páros gráf, melynek G részgráfja

- H ∀ csúcsának fokszáma $\Delta(G)$
- ha $\Delta(G)$-reguláris H gráf éleit $\Delta(G)$ színnel kiszínezzük
- → megkapjuk G részgráf ugyanennyi színnel való színezését
- H gráf élszínezéséhez elég megmutatni, hogy tetszőleges reguláris páros gráfban ∃ teljes párosítás *(fent már bizonyítottuk)*

BACK

9. tétel:

Hálózati folyam, vágás

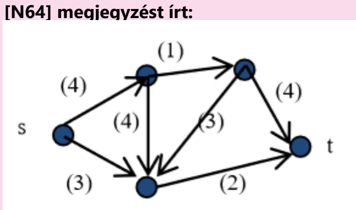
Tételcím

Hálózat, hálózati folyam és $s - t$ vágás fogalma, folyam értéke, vágás kapacitása. Algoritmus maximális folyam és minimális vágás megkeresésére, Ford-Fulkerson tétel, Edmonds-Karp tétel (bizonyítás nélkül). Egészértékűségi lemma. A folyamprobléma általánosítása.

1. Hálózat

- Definíció
  - ***él kapacitása:*** ! G egy irányított gráf, rendeljünk ∀ éléhez egy $c(e)$ nemnegatív számot
  - ***termelő/forrás (source):*** ez G-ben az s pont
  - ***fogyasztó/cél (sink):*** ez G-ben a t pont
  - ***hálózat:*** (G, s, t, c) négyes a hálózat
    - *tehát:* $s, t \in V(\vec{G}), c: E(\vec{G}) \to \mathbb{R}^+$

[N64] megjegyzést írt:



2. Hálózati folyam

- Definíció
  - a (G, s, t, c) hálózatban folyam egy olyan f függvény, amely G ∀ éléhez egy számot rendel, amire teljesül:
    - ***kapacitás feltétel***
      - $0 \leq f(e) \leq c(e)$ teljesül ∀ $e \in E(\vec{G})$ élre G-ben
      - *tehát: a folyam ∀ élén csak az adott maximális kapacitásnyi lehet*
    - ***Kirchoff-szabály***

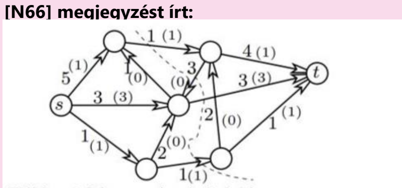
$$\sum\{f(uv): uv \in E(G)\} = \sum\{f(vu): vu \in E(G)\}$$

$$\left(\sum\{f(uv): uv \in E(G)\} - \sum\{f(vu): vu \in E(G)\} = 0\right)$$

- áll ∀ $v \in V(\vec{G}), v \neq s, t$ csúcsára ($\sum_{ve}$•→ $f(e) = \sum_{ve}$•→ $f(e)$)

[N65] megjegyzést írt: Csomóponti törvény. Elektromos hálózatoknál is használatos.

[N66] megjegyzést írt:



Hálózati folyam. A zárójelekben az f folyam által felvett értékek állnak. A folyamérték $m_f = 1 + 3 + 1 = 5$. A szaggatott vonal 5 értékű st-vágást jelöl. (A Ford-Fulkerson algoritmus másikat talál.)

- *tehát $\forall$ s-től és t-től különböző v csúcsra a befolyó folyam összemennyisége azonos a kifolyó összfolyammal*
- *így egyetlen csúcsban sem keletkezik vagy tűnik el folyadék*

3. Folyam értéke

- Definíció
  - f folyam értéke az a nettó folyammennyiség, ami s-ből kifolyik:
$$m_f = \sum\{f(sv): sv \in E(G)\} - \sum\{f(vs): vs \in E(G)\}$$
$$= \sum_{\bullet \to se} f(e) - \sum_{\bullet \to es} f(e) = \sum_{\bullet \to et} f(e) - \sum_{\bullet \to te} f(e)$$
  - $m_f = \sum_{\bullet \to xe} f(e) - \sum_{\bullet \to ex} f(e)$
  - $m_f := \sum\{f(sv)\} - \sum\{f(vs)\}, v \in V(G)$
  - ***telített él:*** ha a folyamban $f(e) = c(e)$
    - *tehát már nem lehet többet átvinni rajta*
  - ***telítetlen él:*** ha a folyamban $f(e) < c(e)$
    - *ha még lehet átvinni rajta*

[N67] megjegyzést írt: f a folyam, m_f a nagysága

[N68] megjegyzést írt: Le kell vonni, ami s-be érkezik, mert nem kizárható, hogy fog ide befolyni (bár általában nem ez a helyet, hiszen onnan minél többet akarunk kijuttatni), de nem zárhatjuk ki ezt a lehetőséget sem, ezért az s-t elhagyó összfolyammennyiség kiszámításához le kell vonni azt, ami s-be érkezik.

[N69] megjegyzést írt: Legyen egyenlő.

4. Vágás

- Definíció
  - ! G csúcsainak s-et tartalmazó, de t-től diszjunkt részhalmaza ($X \subseteq V(\vec{G}), s \in X \not\ni t$)
  - az X és a $V(\vec{G})\setminus X$ között futó élek C halmazát a hálózat egy $s-t$-vágásnak nevezzük
- Jelölés
  - C

5. Vágás kapacitása

- Definíció
  - $c(C) = \sum_{\bullet \to xe} c(e)$
  - az X által meghatározott $s-t$-vágás kapacitása az X-ből a $V\setminus X$-be futó (előremutató) élek kapacitásösszege

- $\sum\{c(xv): x \in X \not\ni v \in V(G)\}$

- az X által meghatározott $s-t$-vágás kapacitása felső korlát a lehetséges folyam nagyságára
- tetszőleges f folyam m_f folyamnagysága meghatározható úgy, hogy az X-ből $V(\vec{G})\backslash X$-be futó éleken haladó összfolyam-mennyiségéből levonjuk a $V(\vec{G})\backslash X$-ből X-be továbbított folyammennyiséget
  - $m_f = \sum\{f(xv): x \in X \not\ni v \in V(G)\} - \sum\{f(xv): x \in X \not\ni v \in V(G)\}$
  - $m_f \leq \sum\{c(xv): x \in X \not\ni v \in V(G)\}$

6. **Javító út hálózatra algoritmus**

- **0. lépés:**
  - kiindulunk egy tetszőleges folyamból (pl. $f \equiv 0$)
- **1. lépés:**
  - javítunk, amíg tudunk $\to m_f \uparrow$
- **2. lépés:**
  - ha nincs több javítás $\to$ STOP
    - *kiegészítés: ha van olyan irányított út s-ből t-be, amelynek ∀ éle telítetlen, akkor ezen az út mentén a folyam érékét ∀ élen megnövelhetjük, hogy az egyik él telített legyen*
    - *ha ez nem lehetséges → segédgráfos módszer*
    - *ha nincs további javítóút, megtaláltuk s-ből t-be futó maximális folyamot*
    - *a minimális vágás azon pontok halmaza, melyeket s-ből indítjuk, és ameddig jutunk, addig a pontig tart a halmaz*
    - *ebből a kis halmazból kiinduló élek eredeti kapacitásai összeadva lesz a minimális vágás értéke*

7. **Maximális folyam**

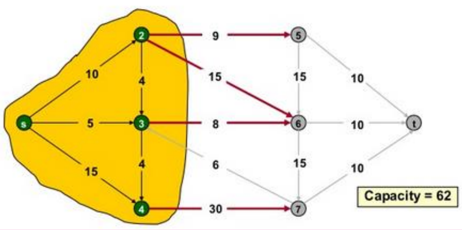
- **Tétel**
  - egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha már nincs javító út s-ből t-be

- **Bizonyítás**
  - ! P egy javító út
  - ekkor P ∀
    - első típusú élére: $c(e) - f(e)$
    - második típusú élére: $f(e)$ szigorúan pozitív
    - ezek minimuma: d
  - első típusúaknál növeljük ↑ $f(e)$-t d-vel, második típusúaknál csökkentsük ↓ $f(e)$-t d-vel
  - módosított folyam megengedett marad, értéke d-vel nő ↑
  - TFH. nincs javító út s-ből t-be
  - lehetnek olyan pontok a gráfban, amelyek elérhetőek s-ből javító úton, ezek ponthalmaza legyen $X \subset V(G)$
  - ekkor $X, V(G) - X$ sem üres, mert $s \in X, t \in V(G) - X$
  - vegyünk egy e élt, ez egy X-beli x pontból egy nem X-beli y-ba mutat
  - ekkor $f(e) = c(e)$, mert ellenkező esetben s-ből x-be vezető javító út e-vel meghosszabbítva egy s-ből y-ba vezető utat adna
  - ugyanígy egy olyan élre, amely egy X-beliből egy nem X-belibe mutat, igaz, hogy $f(e) = 0$
  - tehát $X, V(G) - X$ között futó élek mind telítettek
  - visszafele mutató éleket nem használjuk, de a vágásba amúgy beleszámítanak → ezen a vágáson több „víz nem folyhat"

8. Ford-Fulkerson (Maxflow-mincut) tétel

- **Tétel**
  - maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, tehát:

$$\max\{m_f | f \text{ egy folyam } s\text{-ből } t\text{-be}\} = \min(c(C) | C \text{ vágás})$$

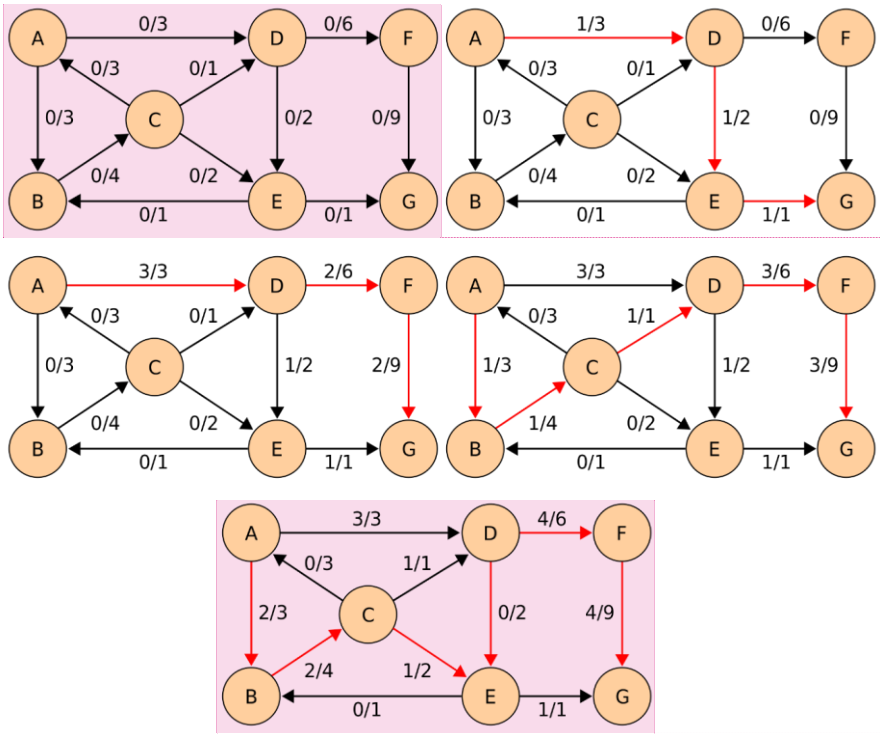


[N70] megjegyzést írt: Sárga rész jelzi a vágást.

- **Bizonyítás**
  - maximális folyam nem lehet nagyobb a maximális vágásnál, mert ∀ előremutató él telített, visszafele mutató éleken pedig 0 a folyam értéke → ezen a folyamon nem folyhat át több víz
  - előző tételben beláttuk, hogy ha ∃ egy f maximális folyam, akkor ∃ ilyen értékű vágás
  - *következő tételben: maximális értékű folyam mindig ∃*

9. Edmonds-Carp tétel/algoritmus

- **Tétel**
  - ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával
- Példa: *Edmonds-Carp algortimusra*



[N71] megjegyzést írt: Hasonlít a Ford-Fulkerson algoritmushoz, annyi különbséggel, hogy a keresési sorrend az útvonal megtalálásakor meg van határozva. A megtalált útvonalnak a legrövidebbnek kell lennie. Ezt a BFS teszi lehetővé nekünk (később), ahol minden egyes élhez 1-es súlyt alkalmazunk. Minden alkalommal, amikor legalább egy él telített, , tehát a telített széltől a forrásig terjedő távolság a bővítési útvonal mentén hosszabb legyen, mint utolsó alkalommal, amikor telített volt, és hossza max V. Legrövidebb bővítési útvonal hossza monoton növekszik.

[N72] megjegyzést írt: A-t most tekintsük S-nek, G-t T-nek.

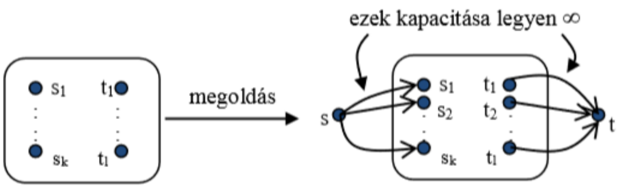
[N73] megjegyzést írt: Figyeljük meg, hogy az algoritmus által talált (piros utak) útvonal hossza soha nem csökken. A talált útvonalak a lehető legrövidebbek. A talált folyam egyenlő a minimális vágásnál a forrást és a célt elválasztó gráf. Ebben a gráfban csak egy minimális vágás van, a csomópontok {A, B, C, E} és {D, F, G}

Egészértékűségi lemma

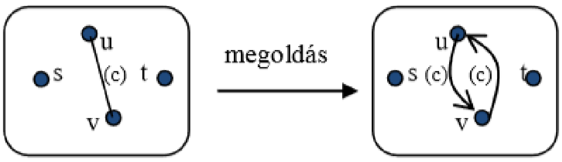
- Tétel
  - ha ∀ e élre $c(e)$ egész → ∃ olyan m_f max folyam, amelyre ∀ e élre $f(e)$ egész
- Bizonyítás
  - az algoritmus nem lép ki a $\mathbb{N}$-ből (csupa 0-ból indítva)

10. A folyamprobléma általánosítása

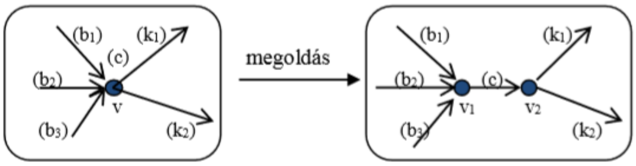
- **1) Több termelő/fogyasztó**
  - ***megoldás***:
  - felveszünk egy „szupertermelőt” (S) / „szuperfogyasztót” (T)
  - összekötjük termelőkkel/fogyasztókkal végtelen kapacitású éleken
  - a kapott gráfban: maximális folyam keresés
  - ha találtunk, letöröljük a két pontot



- **2) Irányítatlan élek**
  - ***megoldás***:
  - az irányítatlan él helyett felveszünk két irányított, azonos kapacitású élet
  - két különböző irányba mutatnak
  - ha a folyam meghatározásakor mindkét helyettesítő élen 0-nál nagyobb a folyamérték, a két él folyamértékét kivonjuk egymásból
  - az *irányítatlan él értéke* a kivonás eredménye, az *iránya* a nagyobbik folyamértékűvel azonos irányú lesz



- **3) Kapacitással rendelkező csúcsok**
  - ***megoldás***:
  - probléma: az adott pontban belépő élek kapacitásának összege nem lehet nagyobb a pont kapacitásánál
  - hagyományos hálózatra való visszavezetés
    - k kapacitással rendelkező v pontot két másik ponttal helyettesítjük
    - ezeket k kapacitású él köt össze
    - két új pontból az egyikbe futnak a v-be bejövő élek, a másikból futnak a v-ből kimenő élek



BACK

10. tétel:
Menger pontpárok, élösszefüggés

Tételcím

Menger pontpárok közötti diszjunkt utakra vonatkozó tételei. Többszörös összefüggőség és élösszefüggőség fogalma, Menger ezekre vonatkozó tételei.

1. Élidegen, pontidegen, lefogó út

- Definíció
  - ***éldiszjunkt/élidegen:*** G irányított/irányítatlan gráf u pontjából v pontjába futó P és Q útjai, ha $E(P) \cap E(Q) = 0$
    - *tehát nincs közös élük*
  - ***pontdiszjunkt/pontidegen:*** G irányított/irányítatlan gráf u pontjából v pontjába futó P és Q útjai, ha $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$
    - *vagyis, ha nincs közös csúcsuk, a kezdő és végpontot leszámítva*
  - ∀ ***utat lefogó pont/élhalmaz:*** G irányított/irányítatlan gráf U ponthalmaz (vagy F élhalmaz) lefog ∀ utat, ha a $G - U$ gráfban ∄ u-ból v-be irányított út

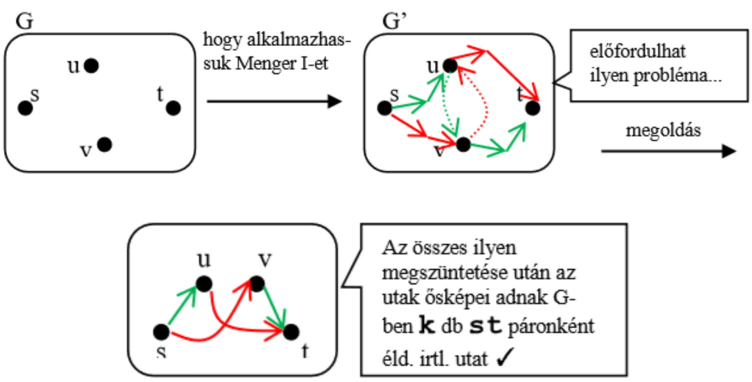
2. Menger I. tétel – G-irányított, élidegen utak

- **Tétel**
  - ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$
  - s-ből t-be vezető páronként élidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az $s - t$ utakat lefogó élek minimális számával
- **Bizonyítás**
  - ha ∃ G-ben k db irányított $s - t$ út, akkor az $s - t$ utakat lefogó élek száma legalább k
  - TFH. $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k
  - ! ∀ él kapacitása 1
  - a kapott hálózatban maximális folyam értéke legalább k

- (*9. tétel, Ford-Fulkerson tétele miatt*) a minimális vágás értéke is legalább k
- már beláttuk, hogy van olyan max. folyam, ahol ∀ élen folyamérték 0 v. 1 → lássuk be, hogy G-ben van k élidegen irányított $s-t$ út
- legalább 1 biztos van, mert folyam értéke k
- az útban szereplő élek kapacitását csökkentsük 0-ra → folyam értéke legalább $k-1$ lesz
- k-szor végrehajtva k élidegen irányított $s-t$ utat kapunk

3. Menger II. tétel– G-irányítatlan, élidegen utak

- **Tétel**
  - ha G egy irányítatlan gráf, $s,t \in V(G)$
  - s-ből t-be vezető páronként élidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az $s-t$ utakat lefogó élek minimális számával



- **Bizonyítás**
  - készítsük el a G'-t G-ből úgy, hogy G ∀ élét irányítjuk oda és vissza
  - ha G'-ben van k db él
  - ezek lefognak k db $s-t$ irányított éldiszjunkt utat
  - → ezek ősei lefogják az $s-t$ utakat G-ben

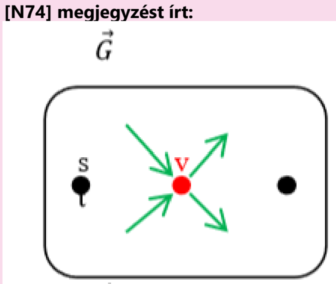
4. Menger III. tétel – G-irányított, pontidegen utak

- Tétel
  - ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont
  - s-ből t-be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma egyenlő az irányított $s - t$ utak s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával
- Bizonyítás
  - G'-ben $\forall$ pontot húzzunk szét két ponttá
  - ha a G egy minimális ponthalmaz lefogja az irányított $s - t$ utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v'') pontok is lefogó ponthalmazt alkotnak
  - kevesebb él nem elég a lefogáshoz $\rightarrow$ ha a lefogó élek közt lennének (a'', b') típusú élek, akkor ezeket helyettesítjük:
    - (a', a'')-vel, ha $b' = t$
    - (b', b'')-vel, ha $b' \neq t$
    - $\rightarrow G$-ben kisebb lefogó ponthalmazt nyernénk
  - G-beli lefogó pontok száma $=$ G'-beli lefogó élek száma
  - G-beli pontdiszjunkt utak $=$ G'-beli éldiszjunkt utak és fordítva
  - G-beli pontidegen utak $=$ G'-beli élidegen utak és fordítva
    - innentől előző tétel bizonyítását alkalmazzuk
  - *tehát, ha G'-ben van k éldiszjunkt $s - t$ út $\rightarrow G$-ben van k db pontdiszjunkt út*
  - *probléma: ha G'-ben van k db él, melyek lefogják az $s - t$ utakat, akkor ezek G'-ben pontok vagy élek?*
  - *megoldás: válasszunk k db piros lefogó élt*
  - *ezek képei G-ben k db lefogó pont*

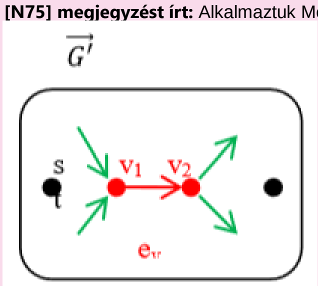
5. Menger IV. tétel– G-irányítatlan, pontidegen utak

- Tétel
  - ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont
  - s-ből t-be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az irányítatlan $s - t$ utak s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával

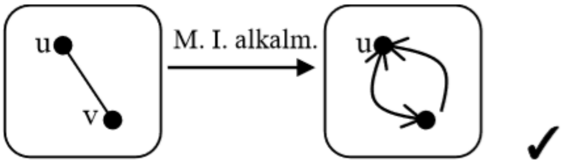
[N74] megjegyzést írt:



[N75] megjegyzést írt: Alkalmaztuk Menger I. tételét



- Bizonyítás

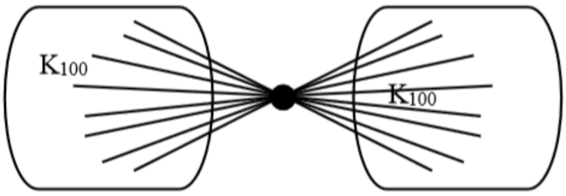


6. k -szoros összefüggőség

- Definíció
  - G **k-szorosan élösszefüggő (**k**-élösszefüggő):** ha bárhogyan legfeljebb $k-1$ élét elhagyva összefüggő marad
  - G **k-szorosan pontösszefüggő (**k**-pontösszefüggő):** ha bárhogyan legfeljebb $k-1$ pontját elhagyva összefüggő marad, és legalább $k+1$ pontja van

[N76] megjegyzést írt: Ha külön nincs említve, hogy milyen összefüggőség, akkor az alapértelmezett a pontösszefüggőség.

- Állítás
  - nem két összefüggő, de 100-élösszefüggő



7. Menger IV. – V.tétel – k-szoros összefüggőség

- **Tétel**
  - ha legalább $k+1$ pontja van, bármely két pontja között $\exists\ k$ pontidegen út
  - G akkor és csak akkor k- szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között $\exists\ k$ élidegen út
- Bizonyítás
  - (*először második részt bizonyítjuk*)
  - G k-szorosan élösszefüggő, akkor az $u-v$ utak maximális száma legalább k
  - Menger tétele szerint:
    - élidegen utak maximális száma legalább k
  - megfordítása is Menger tételből jön:

- G k-szorosan összefüggő, akkor bármely két $u, v \in V(G)$ pontot választva legalább k darab, u-tól és v-től különböző pontra van szükség
- ezzel lefoghatjuk az összes u, v közötti utat

[N77] megjegyzést írt: $u - v$ éltől eltekintve.

- Menger – G-irányítatlan, pontidegen utak tétel alapján ∃ u, v között k pontidegen út
- ha G bármely két pontja között ∃ k pontidegen út, akkor nem lehet ezeket k-nál kevesebb ponttal lefogni → k-szoros összefüggés

8. Dirac tétel – 2x-esen összefüggő, átvezetett kör

- **Tétel**
  - legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor $2x$ összefüggő, ha tetszőleges 2 pontján át vezet kör
  - akkor és csak akkor $2x$ összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör
- **Bizonyítás**
  - első állítás triviális → 2 pontidegen $u - v$ út együtt kört ad
  - ez átmegy $v - n$
  - második állítás elsőből következik
  - ha G $2x$ összefüggő, akkor e, f éleken keresztül van kör
  - vegyünk fel 2 pontot → osszuk két részre e, f élt
  - az így kapott gráf $2x$ összefüggő
  - első állítás szerint ezen a 2 ponton át is megy kör
  - ez a kör az eredeti gráfban $e - n, f - e$
  - megfordítás nyilvánvaló

BACK

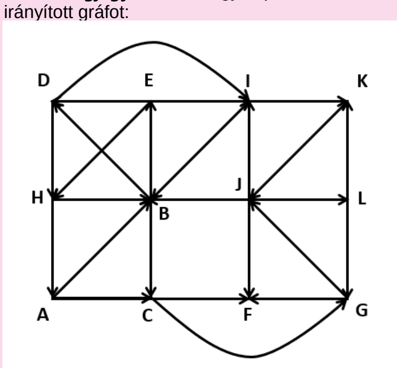
11. tétel:
BFS, Kruskal algoritmus

Tételcím

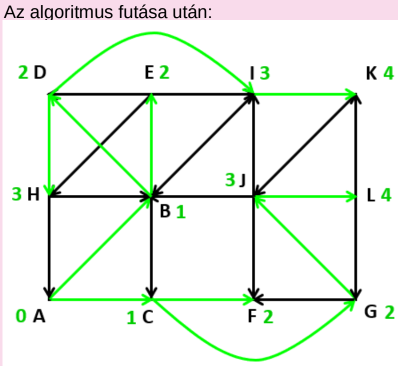
Széleségi bejárás (BFS). Minimális összsúlyú feszítőfák, Kruskal algoritmus.

1. **BFS-algoritmus (Breadth First Search – Szélességi keresés)**
   - bemenet: G gráf és $s \in V$ csúcs
     - $b(i)(i = 1, 2, 3, \dots)$: az i-edikként bejárt csúcs
     - $t(v)(v \in V)$: v távolsága s-től
     - $m(v)(v \in V, v \neq s)$: v-t megelőző csúcs az algoritmus által megtalált, s-ből v-be vezető legrövidebb úton
     - j: eddig bejárt csúcsok száma
     - k: jelenleg aktív csúcs sorszáma a $b(1), b(2), \dots$ sorozatban
   - algoritmus
     - **0. lépés:**
       - $j = 1, k = 1, b(1) = s, t(s) = 0, \forall\ v \neq s$-re $t(v) = *$
     - **1. lépés:**
       - ha a $b(k)$ csúcsnak van olyan v szomszédja, amelyre $t(v) = *$, akkor
         - $j = j + 1$
         - $b(j) = v$
         - $t(v) = t\big(b(k)\big) + 1$
         - $m(v) = b(k)$
         - vissza **1. lépés**hez
     - **2. lépés:**
       - ha a $k = j$, akkor STOP
       - $k = k + 1$
       - vissza **1. lépés**hez

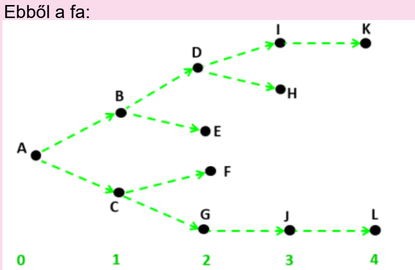
[N78] megjegyzést írt: Vegyük példának ezt az irányított gráfot:



Az algoritmus futása után:



Ebből a fa:



[N79] megjegyzést írt: Lehet irányított és irányítatlan is.

- az algoritmus *lineáris futásidejű*, tehát $c \cdot e$ lépésszámú
  - *tehát kijelölünk egy pontot S-nek (példában S=A)*
  - *S-ből elérhető pontok 1-es címkét kapjanak. Utána S egyik szomszédját kiválasztva, legyen az B. B szomszédjai a 2-es számot kapják, és ezt addig folytatjuk, ameddig $\forall$ pontot be nem járunk*
  - *A pontok száma S-től való távolságot jelölik, és így végül lehet egy fát is megadni belőle*

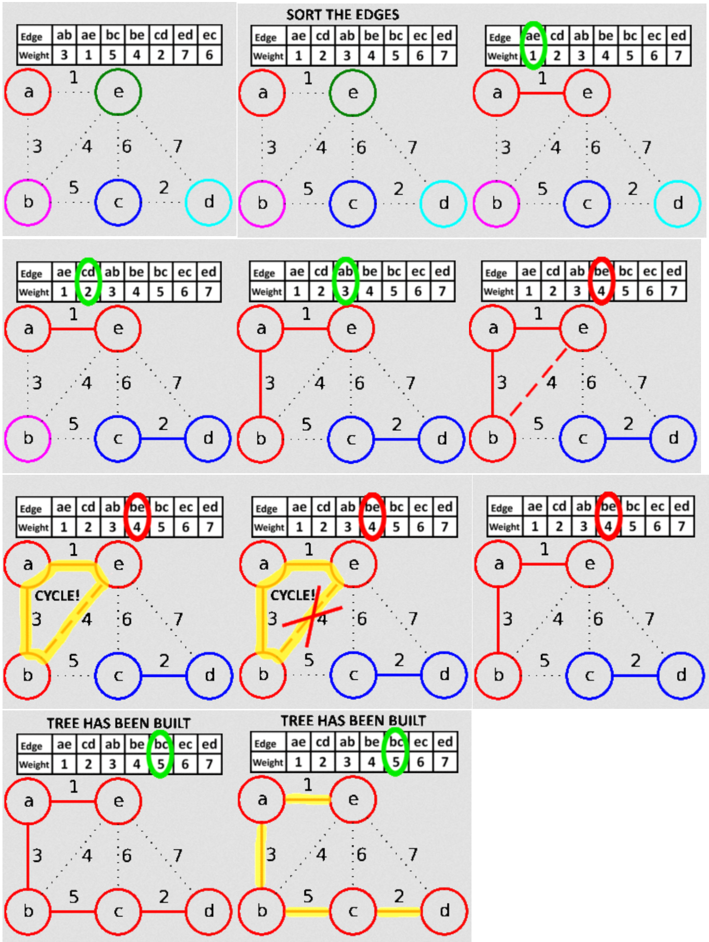
2. BFS-algoritmus definíció

- Definíció
  - ***fa:*** algoritmus futtatása után kapott F feszítőfa
  - ***összefüggő F:*** ha az eredeti bemeneti gráf is összefüggő volt, nem tartalmaz kört
  - bármely $v \in V$ csúcsra az s-et v-vel összekötő F-beli út a legrövidebbek egyike az s-ből a v-be vezető G-beli utak közül

3. Kruskal algoritmus definíció

- bemenet
  - G gráf
  - élekhez tartozó w súlyfüggvény
- algoritmus
  - éleket rendezzük sorba úgy, hogy a legalacsonyabb költségűek legyenek először a sorban
  - sorban előre haladunk
  - él bevétele esetén a kapott gráf körmentes marad, akkor bevesszük
  - addig ismételjük, amíg van izolált pont vagy az élsorozat végére nem érünk
  - $\rightarrow$ a kapott gráf a *G gráf minimális költségű/súlyú feszítőfája*

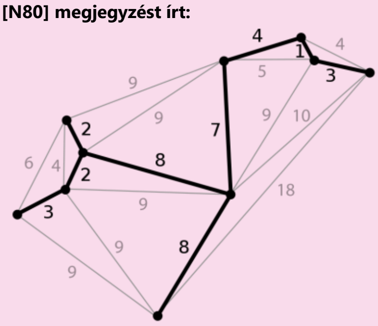
- az algoritmus képekben:



4. Minimális költségű/súlyú feszítőfa

- Definíció
  - !G gráf és annak éleihez rendelt $w: E \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény
  - gráfnak azon feszítőfája, melyre ez a súlyfüggvény minimális
    - *tehát egy összefüggő, irányítatlan gráfban található legkisebb élsúlyú feszítőfa*
    - *a feszítőfa egy olyan fa, ami a gráf összes csúcsát tartalmazza és élei az eredeti gráf élei közül valók*

[N80] megjegyzést írt:



[N81] megjegyzést írt: Legyen…

5. Kruskal-tétel

- **Tétel**
  - Kruskal-algoritmus minimális költségű/súlyú feszítőfát talál
- **Bizonyítás**
  - *(bizonyítás első része: feszítőfát ad az algoritmus)*
  - ! G egy összefüggő, súlyozott gráf
  - ! F egy részgráfja, amit az algoritmus produkál
  - F-ben nem lehet kör, mivel az algoritmus egy fát épít
    - sem összefüggő, mivel az első él (amit az algoritmus talál), ami összeköt két független komponenst F-ben nem hozhat létre kört
    - $\rightarrow F$ feszítőgráf
  - *(bizonyítás második része: az algoritmus minimális)*
  - teljes indukcióval bizonyítjuk
  - ! H élhalmaz, amit az algoritmus futása generál
  - minimális súlyú éleket ez az élhalmaz tartalmazza
  - algoritmus első lépésnél az állítás igaz, mert H még üres
  - k-adik lépésnél vegyük az állítást igaznak
  - ! T minimális súlyú feszítőfa, tartalmazza H-t
  - ha az algoritmus által kiválasztott él ! e, szintúgy benne van a T-ben, akkor az állítás $H + e$-re is igaz
  - $T + e$ részhalmazban $\exists$ egy C kör, és egy f él, ami befejezi C kört, de nem része H-nak
  - $T - f + e$ szintén egy fa, és azonos az összsúlya T-jével
    - hiszen T-nek minimális az összesúlya
    - f-nek a súlya nem lehet kisebb, mint e-nek, hiszen e helyett f élet választotta volna az algoritmus
  - $\rightarrow T - f + e$ egy minimális súlyú feszítőfa
  - $\rightarrow H$ feszítőfává válik, ami csak akkor igaz, ha H egy minimális súlyú feszítőfa

[N82] megjegyzést írt: Alkalmazása:
Pontok – városok
Élek – utak
Súly – hossz
pl. villamos hálózatok, Kirchhoff-törvények, áramköri elemekhez súlyokat párosítunk

[N83] megjegyzést írt: Tehát van súlyfüggvény hozzárendelve.

[N84] megjegyzést írt: Ha nem létezne, akkor e-t nem vettük volna be, mivel kört produkált volna $H + f$-ben.

BACK

12. tétel:
Dijsktra, Bellman-Ford algoritmus

Tételcím

Legrövidebb utak adott csúcsból: Dijsktra és Bellman-Ford algoritmusai.

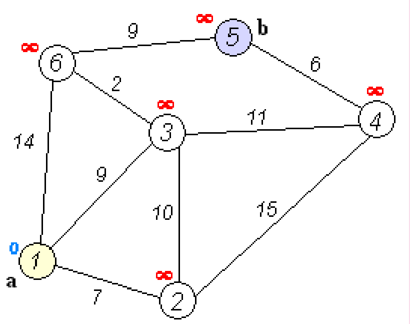
1. Algoritmusok futása, kulcslépések

- algoritmus futása során következőket tartjuk számon
  - $l(e) - e$ él hossza
  - $d(v) - v$ pontban az s kezdőpontból eddigi legrövidebb út hossza $d(s) = 0$
- **kulcslépések**
  - $(*)\ d(s) = 0,\ \forall\ v \neq s$-re $d(v) = \infty$
  - $(**)$ ha x-ből vezet egy e él y-ba, és $d(y) > d(x) + l(e)$, akkor $d(y) = d(x) + l(e)$

2. Dijkstra-algoritmus

[N85] **megjegyzést írt:** Ejtsd: Dejksztra

[N86] **megjegyzést írt:** (Ha gépről vagy) kattints rá Ctrl + egér bal klikk, és akkor láthatod az animációt.



- *optimalizáltalan $c \cdot n^3$ lépésszámú algoritmusa:*
- **0. lépés:**
  - $S = s, T = V \backslash s$ és $(*)$
- **1. lépés:**
  - S-beli pontból $\forall$ T-beli pontba vezető e élre végezzük el $(**)$ javítást

- **2. lépés:**
  - T-beli pontok közül legyen v_0 az, amelyiken a $d(v)$ érték a legkisebb
  - tegyük át v_0-t T-ből S-be
- **3. lépés:**
  - ha T üres → STOP, különben vissza **1. lépés**hez
    - *tehát ∀ ponthoz való eljutást először végtelennek vesszük, majd elkezdjük javítani a pontokat*
    - *kiindulunk S = A-ból*
    - *(a gráf lehet irányított vagy irányítatlan is)*
    - *megnézzük S szomszédjait, majd az éleken lévő súlyok alapján kijavítjuk a végteleneket*
    - *ha egy csúcsnak megnéztük ∀ szomszédját, akkor vesszük egy tetszőleges másik szomszédját, akinek szintén megnézzük az összes szomszédját függetlenül attól, hogy azok a pontok látogatva voltak-e már, mert lehet, hogy az új pontból rövidebb úton lehet elérni*
    - *rövidebb utak a kiindulópontból számított élsúlyok összegének megvizsgálásával lehet keresni (hogy az adott pontból, ha arra visszük az utat, kisebb számot kapunk-e súlynak)*
    - *mindezt addig csináljuk, míg ∀ pontot meg nem vizsgáltunk*
  - *optimalizált $c \cdot n^2$ lépésszámú algoritmusa:*
  - **0. lépés:**
    - $S = s, T = V \backslash s$ és $(*)$,valamint $v_0 = s$

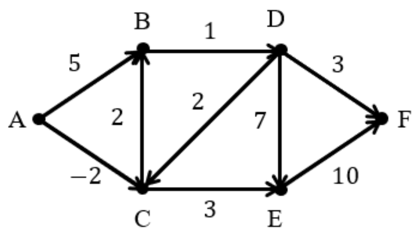
1. lépés:

- csak v_0-bóll T-beli pontokba vezető e élekre végezzük el $(**)$ javítást

- **2. lépés:**
  - T-beli pontok közül legyen v_0 az, amelyiken a $d(v)$ érték a legkisebb
  - tegyük át v_0-t T-ből S-be
- **3. lépés:**
  - ha T üres → STOP, különben vissza **1. lépés**hez

3. Ford-algoritmus

- **0. lépés:**
  - számozzuk meg az éleket 1-től e-ig
  - tetszőleges sorrendben rögzítsük le
  - $!\, i = 1$ és $(*)$
- **1. lépés:**
  - a rögzített sorrendben végezzük el a $(**)$ javítást $\forall$ élen
- **2. lépés:**
  - $i = i + 1$
  - ha $i > v \rightarrow \mathtt{STOP}$, különben vissza **1. lépés**hez
    - ***módosított 2. lépés:***
      - *ha az **1. lépés** során egyetlen javítás sem történt* $\rightarrow \mathtt{STOP}$
      - *különben:* $i = i + 1$
      - *ha* $i \leq v + 1$*, folytassuk **1. lépés**nél*
      - *ha* $i > v + 1 \rightarrow \mathtt{STOP}$
- Példa



- felveszünk hozzá egy táblázatot:

	A	B	C	D	E	F
-	0	∞	∞	∞	∞	∞

- próbáljunk meg A-ból javítani: ott tudunk is, hiszen B-be az 5 kisebb, mint a végtelen, és C-be is jobb

[N87] **megjegyzést írt:** Megengedi a negatív súlyú éleket is, valamint az algoritmus egyszerűbb, mint a Dijkstra.

[N88] **megjegyzést írt:** A lépésszáma $c \cdot e \cdot v$ jóval nagyobb, mint n^2. Van erre egy módosított 2. lépés, amely jelzi, ha negatív összsúlyú körben kerültünk.

[N89] **megjegyzést írt:** S megvannak a minimális úthosszak.

[N90] **megjegyzést írt:** És van negatív összsúlyú kör.

- megnézzük B-ből: B-ből D-be is kisebb, mint a végtelen, viszont itt is oda kell figyelni, hogy nem 1 lesz súlya, hanem 6. (A→B: 5, B→D:1, 5+1=6), ezt végig csináljuk az összes pontra, és így néz ki az első kör után:

	A	B	C	D	E	F
-	0	∞	∞	∞	∞	∞
X'	0	0	−2	6	1	9

- második kör után:

	A	B	C	D	E	F
-	0	∞	∞	∞	∞	∞
X'	0	0	−2	6	1	9
X''	0	0	−2	1	1	4

- harmadik kör:

	A	B	C	D	E	F
-	0	∞	∞	∞	∞	∞
X'	0	0	−2	6	1	9
X''	0	0	−2	1	1	4
X'''	0	0	−2	1	1	4

- harmadik kör után nem tudunk már javítani, így az algoritmus leáll, és megvan az eredményünk

BACK

13. tétel:
Flyod legrövidebb út, aciklikus gráf

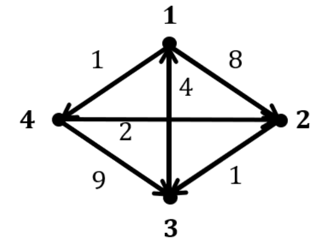
Tételcím

Flyod algoritmusa az összes pontpár közti legrövidebb út meghatározására. Aciklikus irányított gráf fogalma, topologikus sorrend. Algoritmus legrövidebb és leghosszabb utak meghatározására aciklikus irányított gráfban.

1. Floyd-algoritmus

- gráfban lévő összes pontpár közötti távolságok megadása
  - *Ford-algoritmus is jó, de az lassabb*: $c \cdot ev^2$, *míg a Flyod:* $c \cdot v^3$
- sikeres futás feltétele, hogy a gráfban NE legyen negatív összsúlyú kör
- TFH. G irányított gráf $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontokon
- TFH. nincs negatív összsúlyú irányított kör
- v_i –ből v_j –be mutató súly legyen $l(i,j)$
- ha nincs él egyikből a másikba, akkor legyen $l(i,j) = \infty$
- illetve $l(i,j) = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ –re
- legyen $d^{(k)}(i,j)$ a v_i-ből v_j-be vezető legrövidebb olyan irányított út hossza, mely csak k-nál szigorúan kisebb pontokon megy át
- így $d^{(1)}(i,j) = l(i,j)$ és $d^{(n+1)}$ lesz az eredetileg keresett legrövidebb irányított út hossza v_i-ből v_j-be
- v_i-ből v_j-be legrövidebb út csak olyan lehet, mely $k+1$-nél szigorúan kisebb pontokon megy át, vagy v_k-n, vagy nem
- ha nem megy át: $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,j)$
- ha átmegy: $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,k) + d^{(k)}(k,j)$
- azt kell megnézni, hogy mely esetben találunk rövidebb utat (*ezek után már világos, hogy az algoritmus lépésszáma* $c \cdot v^3$*-nal arányos*)
- algoritmus
  - **0. lépés:**
    - $\forall\ i, j$ rendezett párra legyen $d^{(1)}(i,j) = l(i,j)$ és $k = 2$

[N91] megjegyzést írt: Példa



Felrajzoljuk ehhez a táblázatot; ahol nem fut él, ott végtelen van, ahol fut, oda beírjuk a gráfban látható számokat, önmagukba mutató pedig 0-át kap. A bal szélső oszlop jelzi a „honnan" a felső sor: „hová".

$d^{(0)}$	1	2	3	4
1	0	8	∞	1
2	∞	0	1	∞
3	4	∞	0	∞
4	∞	2	9	0

Annyi táblázatot kell rajzolni, ahány pontunk van, mert például a $d^{(1)}$ csak az 1-es ponton átmenő javító utakat reprezentálja, viszont $d^{(2)}$ már az 1-es és 2-es pontokon is átmentőket:

$d^{(1)}$	1	2	3	4
1	0	8	∞	1
2	∞	0	1	∞
3	4	12	0	5
4	∞	2	9	0

Így, ha ezzel a logikával végig megyünk minden ponton a $d^{(4)}$-nél ez lesz a végleges táblázatunk:

$d^{(4)}$	1	2	3	4
1	0	3	4	1
2	5	0	1	6
3	4	7	0	5
4	7	2	3	0

Tehát $d^{(4)}$ mutatja bármely pontból bármely pontba a legrövidebb utakat.

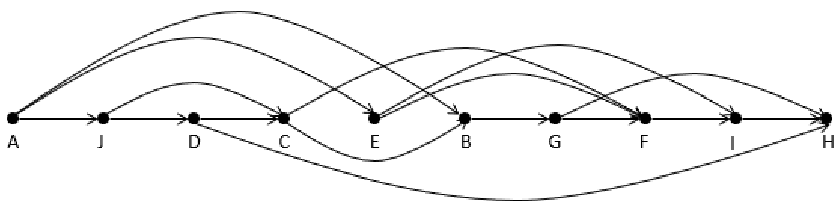
- **1. lépés:**
  - $\forall\, i, j$ rendezett párra
    $d^{(k+1)}(i,j) = \min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k) + d^{(k)}(k,j)\}$
- **2. lépés:**
  - ha $k = n + 1$, akkor `STOP`
  - különben $k = k + 1$ és folytassuk az **1. lépés**nél

2. Irányított aciklikus gráf

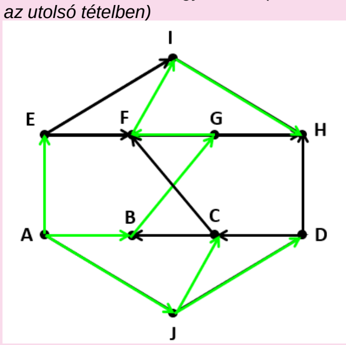
- Definíció
  - egy G gráfot akkor nevezünk irányított aciklikus gráfnak *(DAG)*, ha irányított élei vannak és nem tartalmaz kört

3. Topologikus elrendezés

- Definíció
  - legyen G gráf irányított
  - G topologikus elrendezés a csúcsoknak egy olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y
    - *tehát a gráf csúcsainak sorba rendezése úgy, hogy $\forall$ él egy a sorrendben későbbi csúcsra mutat*
    - *előállítása:*
      - *DFS futtatása*
      - *befejezési sorrendet fordítottan véve leírjuk a pontokat*
    - *gráfhoz megjegyzésben látod a levezetést:*



[N92] megjegyzést írt: Vegyük ezt a gráfot, amiben találomra lefuttatunk egy DFS-t. (*DFS-hez magyarázat az utolsó tételben)*



Hozzá a táblázat:

	M	B
A	0	9
B	1	4
C	8	6
D	9	7
E	6	5
F	3	2
G	2	3
H	5	0
I	4	1
J	7	8

B oszlopban lévőket visszafele sorrendben felírjuk, majd összekötjük a szomszédaikkal őket, és így meg is kapjuk, lásd balra.

4. Topologikus elrendezés

- **Tétel**
  - ha G irányított gráf aciklikus, akkor $\exists$ benne nyelő
    - *azaz olyan pont, amelyből nincs kimenő él*

- **Bizonyítás**
  - legyen P a leghosszabb irányított utak egyike, v legyen a végpontja
  - TFH. v nem nyelő
  - járjuk be az utat topologikus sorrendben
  - az előző állítás annyit jelent, hogy P vagy nem a legutolsó elem a topologikus elrendezésben (*ez ellentmondás lenne*)
  - vagy egy, a topologikus sorrendben előrébb lévő ponthoz csatlakozik vissza (*ismét ellentmondás*)

5. Topologikus elrendezés

- **Tétel**
  - egy G irányított gráfhoz akkor és csak akkor $\exists$ topologikus elrendezés, ha az aciklikus
- **Bizonyítás**
  - keressünk ebben a gráfban egy nyelőcsúcsot, legyen ez a v_n
  - vegyük el ezt a csúcsot
  - ekkor G/v_n-ben v_{n-1} lesz a nyelő
  - ismételjük, ameddig semmi sem marad
  - amelyeket elvettünk, ha fordítva sorba rendezzük, akkor topologikus sorba rendezése lesz G-nek
  - a DFS is generál egy ilyet a futása során, ha nincs benne visszaél

[N93] megjegyzést írt: A szükségeset triviális bizonyítani, viszont az elégségeset nem. Az előbbi lemma állítását felhasználjuk a bizonyításhoz.

[N94] megjegyzést írt: Tehát a legvégén lesz az először elvett elem.

[N95] megjegyzést írt: Tehát kör.

6. Legrövidebb és leghosszabb út keresése DAG-ben

- a topologikus elrendezést használva lineáris időben
- tehát $n + e$-vel arányos lépésszámban megoldható a leghosszabb/legrövidebb út keresése
- input legyen a G irányított gráf, és annak egy topologikus sorrendje s
- algoritmus
  - **0. lépés:**
    - $t(s) = 0$
    - $\forall\ v \neq s$-re $t(v) = \infty$, $w: E(G) \to \mathbb{R}$
  - **1. lépés:**

    `for i = 2 to n do`

    `if` $\exists\ e = \overrightarrow{v_j v_i}$ él, melyre $t(v_j) \neq \infty$

```
    then
```

$t(v_j) = \min/\max(t(v_j) + w(e): e = \overrightarrow{v_j v_i}, t(v_j) \neq \infty)$

```
end for
```

BACK

14. tétel:
DFS algoritmus, erdő

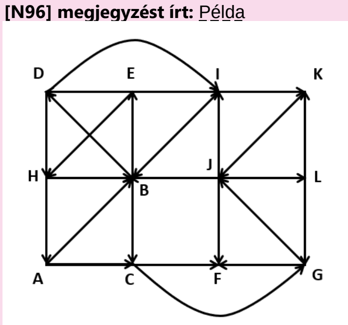
Tételcím

A DFS algoritmus, DFS-erdő, az élek osztályozása. A DFS alkalmazása az aciklikusság eldöntésére, illetve topologikus sorrend meghatározása.

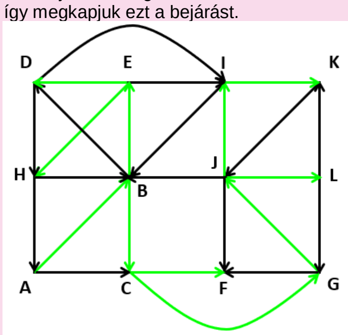
1. DFS algoritmus (Depth First Search – Mélységi keresés)

- bemenet: egy n csúcsú G irányított gráf (*lehet irányítatlan gráf is)* és egy $s \in V$ csúcs
  - $d(v)$: v csúcs ***mélységi szám***a – pontok bejárásának sorrendje
  - $f(v)$: v csúcs ***befejezési szám***a – pontokba való visszalépés sorrendje
  - $m(v)$: v-t megelőző csúcs – amelyből a v-t a bejárás elérte.
  - a: a jelenlegi csúcs
  - g: az aktuális ***gyökérpont***
  - D: az eddigi legnagyobb mélységi szám
  - F: az eddigi legnagyobb befejezési szám
- algoritmus
  - **0. lépés:**
    - $d(s) = 1$
    - $\forall\ v \neq s$-re $d(v) = *$
    - $\forall\ v$-re $f(v) = *,\ m(v) = *,\ a = s,\ g = s\ \ D = 1,\ F = 0$
  - **1. lépés:**
    - ha $\exists$ olyan $e = \overrightarrow{av}$ él, melyre $d(v) = *$, akkor
      - $D = D + 1$
      - $d(v) = D$
      - $m(v) = a$
      - $a = v$
      - vissza az **1. lépés**hez

[N96] megjegyzést írt: Példa



Kiindulunk S=A-ból, és mondjuk B irányába megyünk. Onnan C-be majd F-be. F-ből nem tudunk tovább menni, ezért visszamegyünk C-be. C-ből elmegyünk G-be, majd J-be, végül L-be. Onnan vissza és így tovább, így megkapjuk ezt a bejárást.



Ehhez a táblázat:

	M	B
A	0	11
B	1	10
C	2	6
D	11	8
E	9	9
F	3	0
G	4	5
H	10	7
I	6	2
J	5	4
K	7	1
L	8	3

Első oszlop a pontokat, második oszlop (M) mélységi szám, tehát bejárás sorrendje, harmadik oszlop (B), meg a befejezési szám, tehát ott a 0-át kapja, ahol először befejeztük.

- **2. lépés:**
  - $F = F + 1$
  - $f(a) = F$
  - ha $a \neq g$, akkor $a = m(a)$ és vissza az **1. lépés**hez
  - ha $D = n$, akkor STOP
  - válasszunk olyan v csúcsot, melyre $d(v) = *$
  - $g = v,\ a = v,$ és vissza az **1. lépés**hez
- *tehát meglátogatjuk S egy szomszédját, legyen ez a v_1*
- *ha v_1-nek van még bejáratlan szomszédja, meglátogatja*
- *addig látogat, ameddig tud, majd, ha már nem tud, visszalép, és onnan próbál tovább menni*
- *ha onnan sem tud, újra visszalép, és onnan próbálkozik stb.*
- *ha már visszatér S-be és onnan se tud tovább lépni, mert már ∀ pontot bejárt az algoritmus, akkor véget ér*

2. DFS-erdő

- Definíció
  - s csúcsból indítva G irányított gráfban lefuttattuk a DFS algoritmust
  - a futáshoz tartozó DFS erdő F
  - legyen $e = \overrightarrow{uv}$ a G-nek tetszőleges éle, ekkor:
    - e-t ***faél***nek nevezzük, ha $e \in E(F)$
    - e-t ***előreél***nek nevezzük, ha nem faél, de F-ben van u-ból v-be irányított út
    - e-t ***visszaél***nek nevezzük, ha F-ben van v-ből u-ba irányított út
    - e-t ***keresztél***nek nevezzük, ha F-ben sem u-ból v-be, sem v-ből u-ba nincs irányított út

[N97] megjegyzést írt: Vagyis v leszármazottja u-nak.

[N98] megjegyzést írt: Tehát v őse u-nak.

3. DFS és aciklikusság

- Tétel
  - ha G irányított gráf aciklikus, a DFS futtatásakor nem keletkezik visszaél
  - ha nincs visszaél, akkor $f(v)$ szerinti csökkenő sorrend a topologikus sorrend
- Bizonyítás
  - ha keletkezik visszaél, és $e = \overrightarrow{uv}$ ilyen, akkor G irányított gráf nyilván tartalmaz kört
  - az F DFS-erdő tartalmaz v-ből u-ba irányított utat, amelyet e-vel kiegészítve irányított körré zárhatunk
  - TFH. nem keletkezik visszaél
  - ha megmutatjuk a tétel 2. állítását, hogy a csúcsoknak a befejezési számozás szerinti fordított sorrendje topologikus rendezés, akkor ebből következik G aciklikussága is
  - meg kell mutatni, hogy G $\forall$ $e = \overrightarrow{uv}$ élére $f(v) < f(u)$
  - feltettük, hogy visszaél nem keletkezett, ezért e lehet fa-, előre- és keresztél
  - ha e fa- vagy előreél, akkor DFS eljárás során u első aktívvá válásakor az u befejezéséig tartó szakasza során érte el v-t
  - így ennek során kellett befejezni azt
  - tehát a v-t előbb fejezte be u-nál $\rightarrow f(v) < f(u)$
  - ha pedig e keresztél, akkor e vizsgálatának pillanatában $f(v)$ már kapott értéket
  - u viszont aktív csúcs volt, így ekkor még $f(u) = *$
  - mivel az eljárás egyre nagyobb befejezési számokat ad, ezért $f(v) < f(u)$ erre is teljesülni fog

[N99] megjegyzést írt: Mert e visszaél.