

*** 1. feladat (14 pont)**

Integráljuk az $f(x, y) := x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) függvényt a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \quad \text{halmazon!}$$

Mo. Síkbeli polárkoordinátákkal **(2p)** ($H = \underline{P}\langle[0, 1] \times [0, \pi]\rangle$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \int_0^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr \stackrel{(4p)}{=} \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi r^4 \cos^2(\varphi) \, d\varphi \, dr \stackrel{(2p)}{=} \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^\pi \cos^2(\varphi) \, d\varphi \right) \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^1 \cdot \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \, d\varphi \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

*** 2. feladat (4+6+6=16 pont)**

a) Hogyan definiáltuk a Fourier-sorok elméletében két folytonos, 2π szerint periodikus függvény belső (vagy skaláris) szorzatát?

b) Határozzuk meg az $\langle x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \sin(x) \rangle$ belső (vagy skaláris) szorzatot!

c) Határozzuk meg az $f(x) = \cos^2(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény Fourier-sorában szereplő összes együttható értékét! (Segítség: alkalmazzunk trigonometrikus azonosságot!)

Mo. a) $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx$ **(4p)**

b) $\langle x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \sin(x) \rangle \stackrel{(2p)}{=} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) \sin(x) \, dx \stackrel{(2p)}{=} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right] \stackrel{(2p)}{=} 0.$

c) $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$ ($x \in \mathbb{R}$) **(3p)** véges trigonometrikus polinom, tehát $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, és a többi együttható zérus **(3p)**.

*** 3. feladat (10 pont)**

Legyen $f(x) := e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$). Tudjuk, hogy minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ (ahol $\mathcal{F}$ a Fourier-transzformációt jelöli). $\mathcal{F}(f * f - 3f) = ?$

(Feltehetjük, hogy az $f * f$ függvény Fourier-transzformálható, ennek bizonyítása nem része a feladatnak.)

Mo. A Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján

$$\mathcal{F}(f * f - 3f) = \mathcal{F}(f)^2 - 3\mathcal{F}(f) \quad (5p),$$

azaz minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(f * f - 3f)(\omega) = \frac{4}{(1 + \omega^2)^2} - \frac{6}{1 + \omega^2} \quad (5p).$$

4. feladat (18 pont)

Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$

Számítsuk ki $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ határértékét (amennyiben létezik)! (Segítség: először bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton növekvő, és a 2 felső korlátja.)

Mo. Először teljes indukcióval belátjuk, hogy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növekvő. $a_1 = \sqrt{2}$ (1p), tehát $a_0 \leq a_1$ (1p). Tegyük fel, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ teljesül valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2} \quad (3p),$$

tehát a sorozat monoton növekvő (1p).

Megmutatjuk, hogy a sorozatnak a 2 felső korlátja: $a_0 \leq 2$ (1p), tegyük fel, hogy $a_n \leq 2$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{3} \leq 2 \quad (3p),$$

tehát az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak a 2 felső korlátja (1p).

Mivel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens (2p), jelölje a határértékét A . Ekkor $a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $\sqrt{1 + a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + A}$ (1p), következésképpen

$$A = \sqrt{1 + A} \implies A^2 = 1 + A \quad (2p),$$

így $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (1p). Mivel $a_1 = 1$ és $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növekvő, ezért $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (1p).

5. feladat (5+5=10 pont)

a) $\int x^2 \ln(x) dx = ?$

b) $\int x^2 e^{x^3} dx = ?$

Mo. a) Parciális integrálással **(1p)** :

$$\int x^2 \ln(x) dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b)

$$\int x^2 e^{x^3} dx \stackrel{(1p)}{=} \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx \stackrel{(4p)}{=} \frac{1}{3} e^{x^3} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

6. feladat (6+6=12 pont)

Határozzuk meg az alábbi sorösszegeket!

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2} - 3^k}{2^{2k}}$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!}$$

Mo. a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2} - 3^k}{2^{2k}} \stackrel{(3p)}{=} 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \stackrel{(2p)}{=} 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \stackrel{(1p)}{=} 4$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!} \stackrel{(2p)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!} \stackrel{(4p)}{=} e^{-3}$$

7. feladat (4+4=8 pont)

Definiáljunk két (különböző és Analízis 1 vagy 2 tárgyból tanult) fogalmat, amelyben szerepel az „egyenletes” jelző!

Mo. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos **(1p)** a $H \subseteq \text{Dom}(f)$ halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in H$ és $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (3p)$$

Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló sorozat, és jelölje $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ a pontonkénti limeszfüggvényét. Azt mondjuk, hogy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens **(1p)** a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $H \subseteq \text{Dom}(f)$ **(1p)** és

$$\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3p)$$

8. feladat (4+8=12 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk a numerikus sorokra vonatkozó majoráns kritériumot!

Mo. Tétel: Legyenek $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan számsorozatok, amelyekhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (\mathbf{2p}),$$

valamint a $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sor konvergens **(1p)**. Ekkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor is konvergens **(1p)**.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$. A $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sor konvergenciája és a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium **(1p)** alapján létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq N_1$ esetén $\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \right| < \varepsilon$ **(2p)**. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq \max\{N, N_1\}$ **(2p)**. Ekkor

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = \sum_{k=m+1}^n a_k \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = \left| \sum_{k=m+1}^n b_k \right| < \varepsilon \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát (ismét a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium miatt) a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(1p)**.

(Alternatív bizonyítás: a részletösszeg-sorozatról megmutatható, hogy felülről korlátos és egy küszöbindextől kezdve monoton. A felső korláttal vigyázni kell, mert mivel a majorálás csak egy küszöbindextől kezdve teljesül, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorösszeg nem jó felső korlátnak.)
