MEGOLDÁSOK

BONYOLULTSÁGELMÉLETTEL KAPCSOLATOS FELADATOK[1] [2]

1 Körök és utak

1. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
   Input: *Egy G gráf és egy k szám*
   Kérdés: *Van-e G-ben legalább k élű kör?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli: Tanú egy ilyen kör, melyről ellenőriznünk kell, hogy tényleg kör-e G-ben és hogy tényleg legalább k éle van-e. Mindkettő megtehető polinom időben.

Ezután elég egy NP-nehéz problémát visszavezetnünk erre a problémára. Tekintsük az

Input: Egy H gráf
Kérdés: Van-e H-ban Hamilton-kör?

eldöntési problémát. Ha a mi problémánk inputjába G helyére ezt a H gráfot, k helyére pedig H pontjainak számát írjuk, akkor ezzel visszavezettük a Hamilton-körös problémát a mienkre, hisz azok a körök, melyeknek legalább annyi éle van, mint a gráf pontjainak száma, épp a Hamilton-körök.

2. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
   Input: *Egy G gráf*
   Kérdés: *Van-e G-ben legalább 3 élű kör?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma P-beli. A G pontjainak számát jelöljük n-nel. Nyilván a gráf megadási módjától függően cn vagy legrosszabb esetben cn^2 idő alatt megvizsgálhatjuk, hogy vannak-e G-ben hurokélek és ha igen, elhagyhatjuk őket. Ugyanígy legfeljebb cn^2 idő alatt megvizsgálhatjuk, hogy vannak-e G-ben többszörös élek, és ha igen, akkor mindegyikből csak egy-egy példányt hagyunk meg. Az eredeti G gráfban akkor és csak akkor van legalább 3 élű kör, ha a maradék H gráfban egyáltalán van kör. Ezért

[1] A tananyagból ismertnek tételezzük fel az alábbi három probléma NP-teljességét, más problémák bonyolultságának vizsgálatakor ezekre szabad hivatkozni: (1) Input egy gráf, van-e benne Hamilton-kör? (2) Input egy gráf, kiszínezhető-e 3 színnel? (3) Input egy gráf és egy k szám, van-e a gráfban k elemű teljes részgráf (klikk)?

H-ban például szélességi kereséssel legfeljebb cn^2 időben megkonstruálunk egy fát (ill. kifeszítő erdőt, ha H nem volt összefüggő); ha ez H minden élét tartalmazza, akkor az eredeti kérdésre a válasz nemleges, különben igenlő.

Megjegyzés: Ennek a feladatnak és az előzőnek majdnem azonos volt a megfogalmazása, mégis gyökeresen eltérő választ kaptunk. A különbséget az okozza, hogy az előző feladatban k az input része volt, ezért a mostani feladat megoldásában leírt algoritmus módosításával hiába kapnánk ott mondjuk cn^{k+1} lépésszámú algoritmust, az már nem számítana polinomrendűnek, mivel az input egyetlen része sem szerepelhet a kitevőben.

3. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
   Input: *Egy G gráf és pontjainak egy S részhalmaza*
   Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely S összes pontján áthalad?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli: Tanú egy ilyen kör, melyről ellenőriznünk kell, hogy tényleg kör-e G-ben és hogy tényleg áthalad-e S összes pontján.

Ezután elég egy NP-nehéz problémát visszavezetnünk erre a problémára. Tekintsük ismét az

Input: Egy H gráf
Kérdés: Van-e H-ban Hamilton-kör?

problémát. Most is ezt a H gráfot írjuk a mi problémánk inputjába G helyére, S-nek pedig válasszuk a teljes $V(H)$ ponthalmazt. Ennek az inputnak az esetén a feladatban adott problémára a válasz akkor és csak akkor lesz igenlő, ha H-ban van Hamilton-kör.

4. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
   Input: *Egy G gráf és pontjainak egy S részhalmaza*
   Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely S pontjain kívül minden ponton áthalad?*

Megoldás: Ez a probléma is NP-teljes; a bizonyítás szinte szóról szóra azonos az előzőével, csak most S-nek az $\emptyset$ üres halmazt kell választanunk.

5. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
   Input: *Egy G gráf és pontjainak egy S részhalmaza*
   Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, melynek minden pontja S-beli?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma P-beli. Hagyjuk el a G gráfból az összes olyan pontot (és persze a hozzájuk illeszkedő éleket is), melyek nincsenek S-ben. Az eredeti kérdésre a válasz akkor és csak akkor nemleges, ha a keletkező gráf körmentes, ez pedig polinom-időben nyilván ellenőrizhető, pl. úgy, ahogy a **2.** feladat megoldásának a végén láttuk.

6. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy n-pontú G gráf, ahol n osztható 5-tel*
Kérdés: *Van-e G-ben legalább $\frac{n}{5}$ élű kör?*

1. megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli: Tanú egy ilyen kör. Ismét azt az NP-teljes problémát vezetjük rá vissza, hogy van-e egy adott H gráfban Hamilton-kör. Egyszerűen készítsük el a H gráfot öt pontdiszjunkt példányban és a kapott gráfot jelöljük G-vel. Nyilván H-ban akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha G-ben van *pontosan* $\frac{n}{5}$ élű kör (és mivel hosszabb nem lehet, a "pontosan" szó "legalább"-bal is helyettesíthető).

2. Megoldás: A H-ban Hamilton-kör létezését kérdező problémát úgy is visszavezethetjük a feladatban szereplő problémára, hogy H-hoz hozzáveszünk $4|V(H)|$ darab izolált pontot és az így kapott gráfot jelöljük G-vel.

7. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G egyszerű gráf és egy $e \in E(G)$ él*
Kérdés: *Van-e G-ben az e élen áthaladó Hamilton-kör?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli: Tanú egy ilyen kör. Ismét azt az NP-teljes problémát vezetjük rá vissza, hogy van-e egy adott H gráfban Hamilton-kör. Tegyük fel, hogy egy A algoritmus megoldja a feladatban szereplő problémát.

Válasszuk ki a H gráf valamely p pontját és soroljuk fel a p-hez illeszkedő $e_1, e_2, \ldots, e_t$ éleket. Ezután futtassuk le t-szer az A algoritmust, mindig $G = H$, viszont más és más $e = e_1, e = e_2, \ldots, e = e_t$ választásokkal. Nyilván H-ban akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha ezen választások közül legalább egyszer A igenlő választ ad. Így a Hamilton-kör létezésére vonatkozó problémát meg tudnánk oldani az A algoritmus legfeljebb t-szeri alkalmazásával. Mivel t felülről becsülhető az input hosszával (konkrétan $t < n$), a Hamilton-kör létezését kérdező problémát polinom időben visszavezettük az adott problémánkra.

8. *Az előző feladat problémája is nyilván visszavezethető polinom-időben a Hamilton-kör létezését kérdező problémára, hisz mindkét probléma NP-teljes. Adjunk meg egy lehetőleg egyszerű visszavezetést!*

Megoldás: Helyettesítsük a G gráf e élét egy két élből álló úttal, melynek középső pontja tehát másodfokú lesz. Nyilván akkor és csak akkor létezett az eredeti G gráfban az e élt tartalmazó Hamilton-kör, ha az új gráfban egyáltalán létezik Hamilton-kör.

9. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy $e \in E(G)$ él*
Kérdés: *Van-e G-ben az e élen át nem haladó Hamilton-kör?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. A tanú most is nyilván egy ilyen kör, tehát az NP-beliség nyilvánvaló. A **7.** feladathoz hasonlóan most is azt mutatjuk meg, hogy ha erre a problémára van egy A algoritmus, akkor annak legfeljebb n-szeri hívásával el tudnánk dönteni bármely H gráfról, hogy van-e benne Hamilton-kör.

Ha H-nak van 2-nél kisebb fokú pontja, akkor a válasz nyilván nemleges; továbbá ha minden pontja másodfokú, akkor a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha H összefüggő. (Ezekben a triviális esetekben egyszer sem kell alkalmaznunk az A algoritmust.) Legyen most p egy legalább harmadfokú pont és mindig $G = H$ mellett futtassuk le az A algoritmust úgy, hogy e-nek mindig más és más p-hez illeszkedő élt válasszunk. H-ban nyilván akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha ezen futások közül legalább egyszer igenlő választ kapunk.

10. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és két $u, v \in V(G)$ pont*
Kérdés: *Van-e G-ben olyan Hamilton-kör, melyben u és v nem szomszédosak (a kör mentén haladva nem egymás után következnek)?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli: Tanú egy ilyen kör. Ismét azt az NP-teljes problémát vezetjük rá vissza, hogy van-e egy adott H gráfban Hamilton-kör. Feltehetjük, hogy H nem egy teljes gráf (mert akkor úgyis tudjuk, hogy a válasz igenlő) és legyen u, v két nem szomszédos pontja. Ha e két pontra (és $G = H$-ra) alkalmazzuk a feladatban szereplő problémát, úgy a válasz akkor és csak akkor lesz igenlő, ha H-ban van Hamilton-kör.

11. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf és két $u, v \in V(G)$ pont*
Kérdés: *Van-e G-ben olyan Hamilton-út, melynek u és v a két végpontja?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. A tanú nyilván egy kívánt tulajdonságú út, tehát az NP-beliség nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy van a problémánkra egy A algoritmus. Akkor egy tetszőleges n-pontú H gráfról eldönthetnénk az A maximum n-szeri alkalmazásával, hogy van-e benne Hamilton-kör: Mindig $G = H$ mellett futtassuk le A-t úgy, hogy u-nak a H egy tetszőleges lerögzített pontját és v-nek mindig más és más, H-ban u-val szomszédos pontot választunk. H-ban nyilván akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha ezen futások közül legalább egyszer igenlő választ kapunk.

12. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*
(a)
Input: *Egy G gráf és egy k szám*
Kérdés: *Van-e G-ben legalább k élű út?*
(b)
Input: *Egy G gráf*
Kérdés: *Van-e G-ben legalább 10 élű út?*

Megoldás: Az (a) feladat NP-teljes, a (b) feladat **P**-beli. Előbbit úgy látjuk be, mint az 1. feladatban, csak most a Hamilton-út létezésének eldöntését vezetjük vissza a problémánkra.

Utóbbinál először meghatározzuk G összefüggő komponenseit cn^2 időben, ahol n a G pontjainak száma. Az esetleges 11-nél kevesebb pontból álló komponensekkel nem foglalkozunk, hisz azokban biztos nem lehet 10 élű út.

Legyen G_0 egy n_0-pontú összefüggő komponens és $n_0 > 10$. Nyilván $n_0(n_0-1)(n_0-2)\ldots(n_0-10)$ különböző módon kiválaszthatunk egy $v_1, v_2, \ldots, v_{11}$ pontsorozatot és minden ilyenre ellenőrizhetjük, hogy a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{10}, v_{11}\}$ párok mind élek-e. Ha igen, máris találtunk egy pontosan 10 élű utat, tehát megállhatunk. Ha minden ilyen variációra nemleges a válasz, akkor is megállunk és a kérdésre nemleges választ adunk (hisz ha lenne 10-nél hosszabb út, akkor annak részútjaként pontosan 10 élű is lenne). Eközben legfeljebb cn_0^{11} lépésre volt szükségünk.

13. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy F fa és egy k szám*
Kérdés: *Van-e F-ben legalább k élű út?*

Megoldás: Szokás szerint jelölje n és e a gráfban a pontok, ill. az élek számát. Bármely pontból szélességi keresést indítva ce lépésben megtalálhatjuk az innét az összes többi pontba vezető *leghosszabb* út hosszát (hisz egy fában bármely két pont között egyetlen út létezik, ami így egyidejűleg a legrövidebb és a leghosszabb). Ezt minden pontból megismételve cn^2 lépésben megtaláljuk F leghosszabb útjának a hosszát (F fa volt, tehát $e = n - 1$ teljesül). Ha ez legalább k, igenlő választ adunk, ha nem, nemlegeset; tehát a probléma **P**-beli.

14. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy olyan G irányított gráf, melyben nincs irányított kör, és egy k szám*
Kérdés: *Van-e G-ben legalább k élű irányított út?*

Megoldás: Ez a probléma is **P**-beli. Lássuk el G minden élét 1 súllyal és tekintsük a gráfot egy PERT-feladat inputjának. Az ott tanult módszerrel ce idő alatt megtalálhatjuk a leghosszabb út (vagy utak) hosszát; ha ez legalább k, igenlő választ adunk, különben nemlegeset.

15. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G irányított gráf*
Kérdés: *Van-e G-ben irányított Hamilton-kör?*

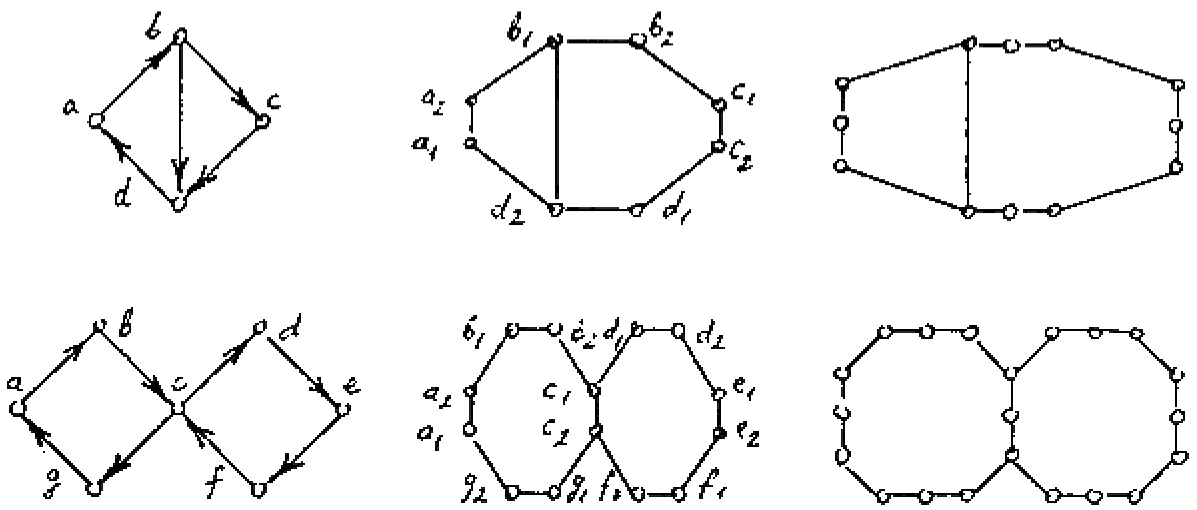
Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Nyilván NP-beli, hisz az irányított Hamilton-kör a tanú. Erre is azt az NP-teljes problémát vezetjük vissza, hogy van-e egy adott (irányítatlan) H gráfban Hamilton-kör. Feltehetjük, hogy H pontjainak a száma legalább 3. Helyettesítsük H minden élét két-két párhuzamos, de ellentétesen irányított éllel és az így kapott gráfot jelöljük G-vel. Ha van H-ban Hamilton-kör, akkor G-ben van irányított Hamilton-kör (ugyanazokat a pontokat ugyanazon sorrendben bejárhatjuk G-ben is). Megfordítva, ha G-ben van irányított Hamilton-kör, akkor ugyanazokat a pontokat ugyanazon sorrendben H-ban bejárva egy irányítatlan Hamilton-körhöz jutunk (ehhez csak azt kell végiggondolni, hogy két ellentétesen irányított párhuzamos él közül legfeljebb egyet használ a G-beli irányított kör; nem fordulhat tehát elő, hogy az irányítás elhagyása után különböző élek azonosakká válnak).

16. *Vezessük vissza polinom időben az előző feladatban szereplő problémát az irányítatlan esetre (amikor tehát egy adott H gráfról kell eldönteni, hogy van-e benne Hamilton-kör)!*

Megoldás: Most egy irányított G gráfhoz kell tehát olyan irányítatlan H gráfot konstruálni, melyben akkor és csak akkor lesz Hamilton-kör, ha G-ben volt irányított Hamilton-kör.

Természetesnek látszó ötlet[3] G minden p pontját megduplázni úgy, hogy a p-be befutó G-beli élek az új p_1 pontba fussanak be és a p-ből kifutó élek az új p_2 pontból fussanak ki, valamint minden ilyen p_1, p_2 pontpárt összekötni egy új irányított éllel, mely p_1-ből vezet p_2-be. Hagyjuk el az élek irányítását és jelöljük a keletkezett gráfot G'-vel.

Nyilván G minden irányított Hamilton-körének megfelel egy Hamilton-kör G'-ben, ld. a felső ábra baloldali és középső gráfját. Sajnos azonban G'-ben akkor is lehet Hamilton-kör, ha G-ben nincs irányított Hamilton-kör, ld. az alsó ábra baloldali és középső gráfját.



A problémát az okozta, hogy a G'-beli Hamilton-kör nem feltétlenül

[3] Ezzel vezettük vissza a pontkapacitásos hálózati folyam problémát az élkapacitásosra és ezt használtuk akkor is, amikor a pontdiszjunkt utakra vonatkozó Menger-tétel bizonyítását az éldiszjunkt esetre vezettük vissza.

akarja használni az összes $\{p_1, p_2\}$ új élt. Ha viszont úgy módosítjuk G' definícióját, hogy a p_1, p_2 pontpárok közé nem egy-egy élt, hanem egy-egy kétélű utat illesztünk (ahol ezen utak középső pontjai G'-ben másodfokúak lesznek, ld. a két ábrasorozat jobboldali gráfjait), akkor G' Hamilton-körei már tényleg kölcsönösen egyértelműen fognak megfelelni G irányított Hamilton-köreinek.

17. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely minden ponttól legfeljebb k távolságra halad?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. A tanú nyilván egy kívánt tulajdonságú kör – minden pontból szélességi keresést indítva megállapíthatjuk, hogy k távolságra a ponttól találtunk-e már legalább egy, a körhöz tartozó pontot –, tehát az NP-beliség adódik. Másfelől $k = 0$ választással épp a Hamilton-kör létezését kérdező feladatot vezethetjük rá vissza.

18. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely minden ponttól legfeljebb 1000 távolságra halad?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. A tanú nyilván egy kívánt tulajdonságú kör – minden pontból szélességi keresést indítva megállapíthatjuk, hogy 1000 távolságra a ponttól találtunk-e már legalább egy, a körhöz tartozó pontot –, tehát az NP-beliség adódik. Másfelől erre a problémára viszszavezethetjük azt, hogy adott H gráfban van-e Hamilton-kör, ha H minden pontjára "ráakasztunk" egy-egy 1000 hosszú utat és a keletkező gráfot választjuk G-nek.

19. *Egy G gráf* $L(G)$ **élgráfját** *a következő módon definiáljuk: $L(G)$ pontjai feleljenek meg G éleinek, és két ilyen pontot akkor és csak akkor kössünk össze éllel, ha a megfelelő két G-beli él szomszédos volt.*

Tekintsük az alábbi problémát:

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Van-e $L(G)$-ben Hamilton-kör?*

Igaz-e, hogy ez visszavezethető annak eldöntésére, hogy van-e G-ben Euler-kör *(ami már polinomidőben ellenőrizhető)?*

Megoldás: Nem igaz. Ha G-ben az $e_1, e_2, \ldots$ élsorozat Euler-kört alkot, akkor a neki megfelelő $L(G)$-beli $p_1, p_2, \ldots$ pontsorozat Hamilton-kört alkot $L(G)$-ben, de megfordítva ez nem igaz. Legyen pl. G egy 4 hosszú kör az egyik átlójával. Nincs Euler-köre, holott $L(G)$-nek van Hamilton-köre.

20. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf és egy k szám*
Kérdés: *Kapható-e G-ből legfeljebb k él hozzávételével olyan gráf, melyben már van Hamilton-kör?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. Tanú egy kívánt tulajdonságú kör – végighaladva rajta cn idő alatt ellenőrizhetjük, hogy legfeljebb k kivétellel minden éle már G-nek is éle volt –, tehát az NP-beliség adódik. Másfelől $k = 0$ választással épp a Hamilton-kör létezését kérdező feladatot vezethetjük rá vissza.

21. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf*
Kérdés: *Kapható-e G-ből legfeljebb 1000 él hozzávételével olyan gráf, melyben már van Hamilton-kör?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. Tanú egy kívánt tulajdonságú kör – végighaladva rajta cn idő alatt ellenőrizhetjük, hogy legfeljebb 1000 kivétellel minden éle már G-nek is éle volt –, tehát az NP-beliség adódik. Másfelől egy H gráfban a Hamilton-út létezését kérdező feladatot visszavezethetjük rá úgy, hogy H-hoz hozzáveszünk 999 izolált pontot és a kapott gráfot választjuk G-nek.

22. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf és egy $e \in E(G)$ él*
Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely e-t tartalmazza?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma P-beli. Legyen e két végpontja x és y. Hagyjuk el az e élt a gráfból, majd x-ből szélességi keresést indítva állapítsuk meg, hogy elérhető-e y. Ha igen, akkor a kapott út e-vel együtt épp egy kívánt tulajdonságú kört ad, ha nem, akkor ilyen kör nem létezik.

23. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf és egy $e \in E(G)$ él*
Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely e-t nem tartalmazza?*

Megoldás: Ez a probléma is P-beli. Hagyjuk el az e élt a gráfból, majd minden összefüggő komponensében szélességi keresést indítva konstruáljunk meg egy kifeszítő erdőt. Ha ezzel a gráf összes (e-től különböző) élét felhasználtuk, akkor a válasz nemleges, különben igenlő.

24. *Meghatározható-e polinom időben egy gráf legrövidebb körének a hossza?*

Megoldás: Igen. Minden egyes e élre a 22. feladat megoldását alkalmazva legfeljebb cn^2 idő alatt megkapjuk az e élen áthaladó körök közül a legrövidebb(-ek) hosszát (ahol n a gráf pontjainak a száma). Az összes élre kapott számok minimuma lesz a válasz. Mivel az élszám legfeljebb cn^2, a teljes lépésszám (nagyon durván) cn^4-nel becsülhető.

2 Színezések és klikkek

25. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf*
Kérdés: *Kiszínezhető-e G négy színnel úgy, hogy az egyik színt csak egyetlen pont színezésére használjuk?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló – a kívánt tulajdonságú színezés a tanú, hisz jósága cn^2 lépésben ellenőrizhető, ha n a gráf pontjainak száma.

Az NP-teljességhez egy adott H gráf 3 színnel színezhetőségének eldöntését vezetjük vissza a feladatunkra. Egyszerűen kössük össze H minden pontját egy új p ponttal és a keletkező gráfot válasszuk G-nek. H akkor és csak akkor színezhető meg 3 színnel, ha G-ben a p pont egy semelyik más pont által nem használt színt kap és ezzel együtt összesen 4 színt használunk.

26. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy az egyik színt csak egyetlen pont színezésére használjuk?*

Megoldás: Ez a probléma P-beli. Egy gráf akkor és csak akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha van olyan pontja, melynek elhagyása után a maradék gráf már páros lesz. Mivel szélességi kereséssel $ce \leq cn^2$ lépésben el tudjuk dönteni, hogy egy e élű, n pontú gráf páros-e, legfeljebb cn^3 lépés kellhet az eredeti kérdés megválaszolásához.

27. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

(a)

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G 3 színnel úgy, hogy az egyik színt legfeljebb 5 pont színezésére használjuk?*

(b)

Input: *Egy G gráf és egy k szám* $(k \geq 3)$

Kérdés: *Kiszínezhető-e G k színnel úgy, hogy az egyik színt legfeljebb 5 pont színezésére használjuk?*

Megoldás: Az előző két példa alapján nyilvánvaló, hogy az (a) esetben a probléma P-beli (egy legfeljebb cn^7 lépésszámú algoritmussal eldönthető, hogy kiválasztható-e olyan 5 pont, hogy elhagyásukkal a gráf párossá válik). A (b) esetben viszont a probléma NP-teljes, hisz $k = 4$ választással egy ezt megoldó algoritmus cn^5-szeri hívásával el lehetne dönteni egy gráfról, hogy 3 színnel kiszínezhető-e.

28. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám* $(k \geq 3)$

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy az egyik színt legfeljebb k pont színezésére használjuk?*

Megoldás: Mivel $k = n - 2$ választással a kérdés speciálisan azt is tartalmazza, hogy egyáltalán kiszínezhető-e G három színnel, a probléma NP-nehéz. Másfelől nyilván NP-beli (tanú a kívánt tulajdonságú színezés), ezért NP-teljes.

29. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és pontjainak egy* $A \subseteq V(G)$ *részhalmaza*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy épp az A-beli pontok alkossák az egyik színosztályt?*

Megoldás: A probléma P-beli. Először ellenőriznünk kell, hogy A független ponthalmaz-e (hisz különben biztos nemleges a válasz), majd azt, hogy $G - A$ páros-e. Előbbi legfeljebb $|A|^2 \leq cn^2$, utóbbi is legfeljebb cn^2 lépést igényel.

30. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és pontjainak egy* $A \subseteq V(G)$ *részhalmaza*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy az A-beli pontok színe azonos legyen?*

Megoldás: Az előző feladat problémájával ellentétben itt megengedjük, hogy a $V(G) - A$ halmaz pontjai között is legyen olyan, amely ugyanazt a színt kapja, mint az A-beliek. Ez a probléma NP-nehéz, hisz pl. $|A| = 1$ választással épp azt kérdezi, hogy egyáltalán kiszínezhető-e a G gráf 3 színnel. Nyilván NP-teljes is, hisz a kívánt színezés a tanú, tehát az NP-beliség nyilvánvaló.

31. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és két* $x, y \in V(G)$ *pont*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y különböző színű legyen?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló – a kívánt tulajdonságú színezés a tanú.

Az NP-teljességhez egy adott H gráf 3 színnel színezhetőségének eldöntését vezetjük vissza a feladatunkra. Legyen $G = H$ és x, y legyen a H gráf két szomszédos (éllel összekötött) pontja. Mivel ezek a H minden 3 színnel való színezésekor úgyis különböző színt kell, hogy kapjanak, H akkor és csak akkor színezhető ki 3 színnel, ha G a kívánt módon színezhető ki 3 színnel.

32. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és két* $x, y \in V(G)$ *pont*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y azonos színű legyen?*

Megoldás: Belátjuk, hogy a probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló – a kívánt tulajdonságú színezés a tanú.

Az NP-teljességhez most is egy adott H gráf 3 színnel színezhetőségének eldöntését vezetjük vissza a feladatunkra. Egészítsük ki a H gráfot egy izolált ponttal, a keletkező gráf legyen G, az izolált pontot válasszuk x-nek és bármely másik pontot y-nak. Ezzel a választással a feladatban szereplő problémára a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha H egyáltalán megszínezhető volt 3 színnel.

Megjegyzés: Nem másolhatjuk le az előző feladat megoldását annyi különbséggel, hogy most x és y két H-ban nem szomszédos pont legyen, hisz két ilyen pontról nem tudhatjuk biztosan, hogy azonos, vagy különböző színt fognak-e kapni (ha H egyáltalán kiszínezhető).

33. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és három $x, y, z \in V(G)$ pont*

Kérdés: *Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy az adott három pont mind különböző színű legyen?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma; az NP-beliség most is nyilvánvaló, hisz egy jó színezés a tanú.

Az NP-teljességhez most is azt a problémát fogjuk a mienkre visszavezetni, hogy egy adott H gráf kiszínezhető-e 3 színnel. Ha H-ban van három hosszú kör, akkor annak három pontját x, y, z-nek (és H-t G-nek) választva inputként, a feladatban szereplő probléma kérdésére a válasz akkor és csak akkor lesz igen, ha H kiszínezhető 3 színnel. Ha nincs (vagy nem akarunk ennek keresésével időt tölteni), akkor válasszunk ki H-ban két szomszédos a, b pontot, majd kössük őket össze egy új c ponttal (mely tehát nem volt H pontja). Az így kapott új gráfot G-nek, az a, b, c pontokat pedig x, y, ill. z-nek választva inputnak, a feladatban szereplő probléma kérdésére a válasz akkor és csak akkor lesz igenlő, ha H kiszínezhető 3 színnel.

34. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *"Kiszínezhető-e" G három színnel úgy, hogy legfeljebb egy élnek azonos színű a két végpontja?*

Megoldás: Ez is NP-teljes probléma. Az NP-beliség nyilvánvaló – a tanú a kívánt tulajdonságú "színezés". Az NP-teljességhez valamely H gráf három színnel való kiszínezhetőségét vezetjük vissza a problémánkra. Keressünk egy olyan H_0 gráfot, mely nem színezhető ki a szokásos értelemben 3 színnel, de a feladatban szereplő módon igen. (Ilyen pl. a K_4, vagy ilyet kapunk egy 5 pontú körből, ha minden pontját egy további, hatodik ponttal összekötjük.) Ha most G-nek az adott H gráf és ezen H_0 gráf pontdiszjunkt unióját választjuk, úgy G nyilván akkor és csak akkor lesz a feladatban szereplő értelemben "kiszínezhető", ha H a szokásos értelemben 3 színnel kiszínezhető volt.

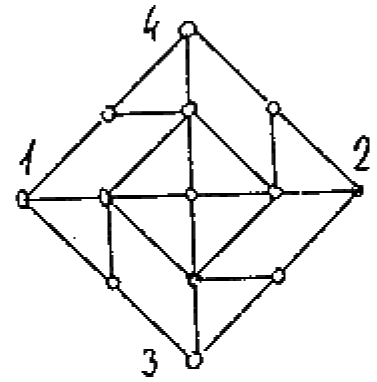
Megjegyzés: Hibás az a kézenfekvőnek látszó okoskodás, hogy ha van egy algoritmusunk a feladatban szereplő probléma megoldására akkor ennek n^2-szeri hívásával a H 3 színnel történő "valódi" kiszínezhetőségét is ellenőrizhetnénk (minden lehetséges módon behúzva egy-egy élt az adott H gráfba). Abból ugyanis, hogy egy ilyen "fiktív" él behúzásával kapnánk egy megfelelő "színezést", még nem következik, hogy épp a fiktív él végpontjai kaptak azonos színt.

35. *Mutassuk meg,*[4] *hogy az alábbi gráf három színnel kiszínezhető, továbbá, hogy minden három színnel való színezésekor*

(a) az 1. és a 2. pontok azonos s_1 színt kapnak,

(b) a 3. és a 4. pontok azonos s_2 színt kapnak, és

(c) mindez lehet úgy is, hogy $s_1 = s_2$ teljesüljön, és úgy is, hogy nem!

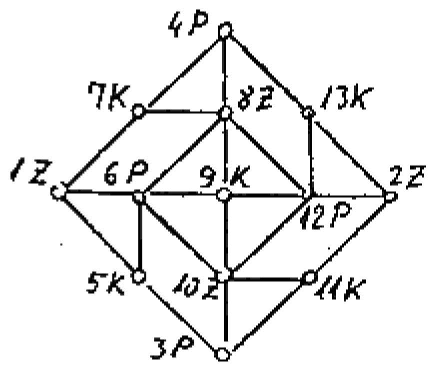


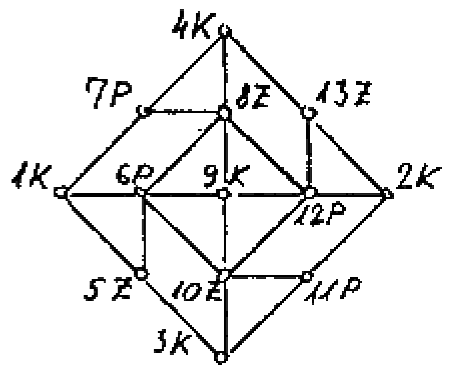
Megoldás: Nyilván legalább három szín kell a gráf kiszínezéséhez, hisz tartalmaz háromszögeket. A rövidség kedvéért nevezzük a három színt pirosnak, kéknek és zöldnek (és rövidítsük őket rendre P-vel, K-val, ill. Z-vel). Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy (az alábbi ábrán látható

[4] Ez a feladat egy érdekes bonyolultságelméleti eredmény bebizonyításához fog kelleni, ezért szerepel ebben a fejezetben.

jelölést használva) a 6. pont piros, a 9. pont kék és a 10. pont zöld. Ekkor a 12. pont szükségképp piros és a 8. pont zöld, innét kezdve azonban két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. eset: Az 1. pont zöld. Ekkor az 5. pont kék (hisz van piros és zöld szomszédja), és ugyanilyen megfontolással rendre meghatározhatjuk az összes többi pont színét is a 3., 11., 2., 13., 4., 7. sorrendben, ld. a baloldali ábrát.





2. eset: Az 1. pont kék. Ekkor a 7. pont piros (hisz van kék és zöld szomszédja), és most a 4., 13., 2., 11., 3., 5. sorrendben adódik a többi pont színe, ld. a jobboldali ábrát.

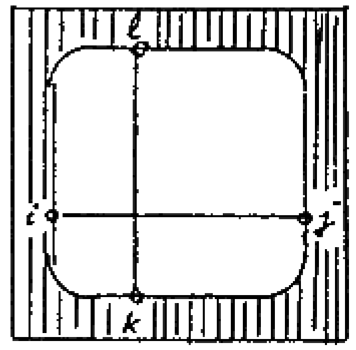
Ez tehát a két lehetséges színezés. A baloldali esetben az 1. és 2. pont azonos s_1 színe (zöld) és a 3. és 4. pont azonos s_2 színe (piros) különbözik, a jobboldali esetben az s_1 és s_2 színek azonosak (mindkettő kék).

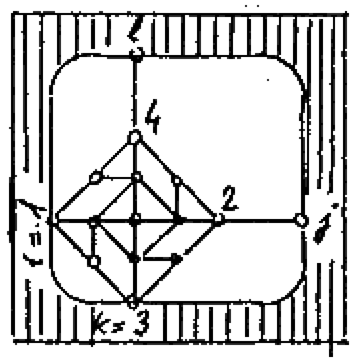
36. *Az előző feladat felhasználásával mutassuk meg, hogy a három színnel való kiszínezhetőség eldöntése akkor is* NP*-teljes marad, ha az input csak a síkbarajzolható gráfok közül kerül ki!*

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges, síkba nem feltétlenül rajzolható G gráfhoz lehet olyan síkbarajzolható G' gráfot konstruálni, hogy G' akkor és csak akkor legyen három színnel kiszínezhető, ha G is az volt.

Helyezzük el G pontjait a síkban és kössük össze a szomszédos pontpárokat (persze számos kereszteződés jöhet létre). Az összekötő vonalak esetleges kisebb módosításával feltehető, hogy minden metszéspontban pontosan két él keresztezi egymást. Legyen $\{i,j\}$ és $\{k,l\}$ két egymást keresztező él. Az ábrán látható módon szüntessük meg a kereszteződésüket az előző feladatban látott gráf egy példányának a beillesztésével. (Ha pl. i és k szomszédosak

voltak, akkor a köztük vezető élt nem tüntetjük fel, az is a bevonalkázott "keretben" halad.)





Nyilván akkor és csak akkor színezhető ki a baloldali gráf három színnel, ha a jobboldali is kiszínezhető, hisz a segédgráf épp azt biztosítja, hogy az 1. és 2. pontok színe azonos lesz, a 3. és 4. pontok színe szintén (és ez a két közös szín lehet azonos is, különböző is), tehát mind az $\{i,j\}$, mind a $\{k,l\}$ párok akkor és csak akkor kapnak különböző színt az egyik gráf három színnel való jó kiszínezésében, amikor a másikban.

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg síkbarajzolható gráfhoz nem jutunk. (Emlékeztetünk arra, hogy a bevonalkázott "keretben" haladó élek egymást metszhették, de nyilván nem metszik az újonnan beillesztett gráf éleit, tehát minden lépésben tényleg pontosan eggyel csökken a keresztező élek száma.) A visszavezetés polinom időben történt, hisz egy n pontú egyszerű gráf lerajzolásakor legfeljebb cn^2 keresztezés lehet.

37. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám*

Kérdés: *Van-e G-ben legalább k független pont?*

Megoldás: A probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló, maga a független ponthalmaz a tanú. Tudjuk, hogy az

Input: Egy H gráf és egy l szám

Kérdés: Van-e H-ban legalább l pontú teljes részgráf?

probléma (az ún. *klikk-probléma*) NP-teljes. Ez triviálisan visszavezethető a mi problémánkra (legyen $k = l$ és legyen G az adott H gráf komplementere).

38. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G egyszerű gráf és egy k szám*
Kérdés: *Lefedhető-e G minden éle legfeljebb k ponttal?*

Megoldás: Ez a probléma is NP-teljes. Az NP-beliséghez a kívánt tulajdonságú ponthalmaz a tanú. Az NP-beliséghez idézzük fel, hogy Gallai tétele szerint az n pontú hurokmentes gráf minden élét lefedő pontok minimális τ száma és a gráfban a független pontok maximális α száma között az $\alpha+\tau = n$ kapcsolat teljesül. Így ez a probléma sem lehet egyszerűbb (sem pedig bonyolultabb), mint az előző.

39. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

(a)
Input: *Egy G gráf*
Kérdés: *Felbontható-e G ponthalmaza két részre úgy, hogy mindkét rész egy-egy teljes részgráf legyen?*

(b)
Input: *Egy G gráf és egy k szám*
Kérdés: *Felbontható-e G ponthalmaza k részre úgy, hogy minden rész egy-egy teljes részgráf legyen?*

Megoldás: A problémák ekvivalensek azzal, hogy G komplementere kiszínezhető-e kettő, ill. k színnel (épp a részhalmazok lesznek a színosztályok). Így az (a) probléma P-beli, a (b) probléma viszont NP-teljes.

3 Eldöntési és keresési problémák

40. *Mutassuk meg, hogy az*
Input: *Egy G gráf és egy k szám*
Kérdés: *Van-e G-ben legalább k független pont?*
eldöntési probléma és az
Input: *Egy H gráf*
Kérdés: *Mennyi $\alpha(H)$ értéke?*
keresési feladat egymásra polinom időben visszavezethetőek!

Megoldás: Az első probléma triviálisan visszavezethető a másodikra: Válaszoljuk meg a második kérdést $H = G$ választással, majd akkor és csak

akkor adjunk igenlő választ az első kérdésre, ha $\alpha(H) \geq k$.

Megfordítva, mindig $G = H$ választással, rendre $k = 1, 2, \ldots, n$ értékek mellett válaszoljuk meg az első kérdést (szokás szerint n jelöli a gráfok pontjainak számát). Ha utoljára valamely k_0 érték mellett volt a válasz igenlő, akkor a második kérdésre adjuk az $\alpha(G) = k_0$ választ.

Az első esetben egy, a második esetben legfeljebb n ízben hívtuk a másik problémát megoldó algoritmust, tehát a visszavezetés mindkét irányban polinom időben történt.

41. *Legyen A egy algoritmus, mely tetszőleges G gráfra eldönti, van-e G-ben Hamilton-kör. Vezessük erre vissza polinom időben azt a problémát, hogy adott H gráfban ha létezik Hamilton-kör, akkor egyet meg is kell találni!*

Megoldás: Először $G = H$ választással lefuttatjuk az A algoritmust és ha nemleges választ ad, akkor megállunk, hisz akkor H-ban egyáltalán nincs Hamilton-kör. Utána válasszuk ki H egy tetszőleges élét és futtassuk le az A algoritmust $G = H - e$ választással. Ha most is igenlő választ kapunk, akkor az e élt "végleg" hagyjuk el H-ból, ha viszont nemlegeset, akkor tegyük vissza H-ba és fessük pirosra (ez azt jelzi, hogy erre az élre feltétlenül szükség lesz a Hamilton-körben). Az eljárást addig ismételjük H nem piros éleire, amíg ilyenek vannak. Legkésőbb cn^2 lépés után csak piros élek maradnak és ezek épp az eredeti H gráf egy Hamilton-körét alkotják.

42. *Legyen A egy algoritmus, mely tetszőleges G gráfra eldönti, van-e G-ben Hamilton-kör. Vezessük erre vissza polinom időben azt a problémát, hogy adott egy H gráf és két $a, b \in V(H)$ pont, találjunk benne a két adott pont között vezető Hamilton-utat, ha egyáltalán létezik ilyen!*

Megoldás: Módosítsuk úgy a H gráfot, hogy vegyünk fel egy c pontot, kössük össze a-val és b-vel (de semmi mással), és a keletkező gráfot jelöljük H'-vel. Nyilván akkor és csak akkor létezik H-ban az a és a b végpontok között vezető Hamilton-út, ha létezik H'-ben Hamilton-kör. Ezért az előző feladat megoldását alkalmazzuk H'-re, majd ha találtunk Hamilton-kört, akkor hagyjuk el a c pontot.

43. *Legyen A egy algoritmus, mely tetszőleges G gráfra eldönti, kiszínezhető-e G három színnel. Vezessük erre vissza polinom időben azt a problémát, hogy adott egy H gráf és ténylegesen ki is kell színezni három színnel, ha ez*

egyáltalán lehetséges.

Megoldás: Először $G = H$ választással lefuttatjuk az A algoritmust és ha nemleges választ ad, akkor megállunk, hisz akkor H nem színezhető ki három színnel. Ha igenlő választ ad, válasszunk ki H-ban két tetszőleges nem szomszédos a, b pontot és futtassuk le az A algoritmust a H-ból az $\{a, b\}$ él behúzásával kapott új gráfra! Ha most is igenlő választ kapunk, akkor az $\{a, b\}$ élt "végleg" hagyjuk benn H-ban, ha viszont nemlegeset, akkor fessük át pirosra (ez azt jelzi, hogy ennek az élnek a behúzása biztosan elrontaná a három színnel színezhetőséget). Ismét válasszunk egy nem szomszédos pontpárt, kössük őket ideiglenesen össze, és futtassuk le az A algoritmust arra a gráfra, melyet az esetleges piros él nélküli H-ból és ebből az élből kapunk. Az eljárást addig ismételjük H nem szomszédos pontpárjaira, amig ilyenek vannak (mindig egy új élt behúzva, de az A algoritmus szempontjából a piros éleket figyelmen kívül hagyva). Legkésőbb cn^2 lépés után egy teljes gráfhoz jutunk, melynek a piros élei három klikket (teljes részgráfot) határoznak meg, ezek lesznek H-ban a keresett színosztályok. Eközben az A algoritmust legfeljebb cn^2-szer futtattuk le, ennek megfelelő számú lépésben tehát meg tudjuk határozni a színosztályokat.

44. *Legyen A egy algoritmus, mely tetszőleges n-pontú G gráfra eldönti, hogy van-e G-ben $n/2$ darab független pont. Vezessük erre vissza polinom időben azt a problémát, hogy egy adott k-pontú H gráfban ténylegesen találjunk is meg $k/2$ független pontot (ha egyáltalán létezik ennyi)!*

Megoldás: Először $G = H, n = k$ választással lefuttatjuk az A algoritmust és ha nemleges választ ad, akkor megállunk, hisz akkor H-ban nem létezik $k/2$ független pont. Igenlő válasz esetén ugyanúgy járjunk el, mint az előző feladat megoldásakor (vagyis minden nem szomszédos pontpárt kössünk össze, ha ez nem rontja el a kívánt tulajdonságot, ill. pirossal jelöljük meg, ha elrontaná és ezért tovább nem kísérletezünk vele). Most is legkésőbb cn^2 lépés után egy teljes gráfhoz jutunk, melynek a piros élei ezúttal egy $k/2$ pontú klikket határoznak meg.

45. *Legyen A egy algoritmus, mely tetszőleges G gráfra kiszámítja a legnagyobb G-beli klikk pontjainak $\omega(G)$ számát. Vezessük erre vissza polinom időben azt a problémát, hogy egy adott H gráfban ténylegesen találjunk is egy maximális méretű klikket!*

Megoldás: A **41.** példa megoldásához hasonlóan egyesével minden élt próbáljunk elhagyni és ha az elhagyás nem csökkenti a klikkszámot, akkor tényleg hagyjuk el az élt, ha viszont csökkenti, akkor fessük azt az élt pirosra (ez azt jelzi, hogy erre az élre feltétlenül szükség van). Amikorra csak piros élek maradnak (az A algoritmus legfeljebb cn^2 számú hívása után), azok épp egy maximális klikket határoznak meg.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy

- a "létezik Hamilton-kör egy gráfban" és a "létezik nagy pontszámú klikk egy gráfban" tulajdonságokat új élek behúzásával nem lehet elrontani, meglevő élek elhagyásával viszont igen, ugyanakkor
- a "létezik nagy független ponthalmaz egy gráfban" és a "kevés színnel megszínezhető egy gráf" tulajdonságokat épp, hogy élek behúzásával lehet elrontani, élek elhagyásával nem.

Emiatt az első típusú tulajdonságokra vonatkozó feladatok megoldásánál mindig elhagytuk sorban a nélkülözhető éleket, míg a második típusú tulajdonságokra vonatkozó feladatok megoldásánál mindig behúztuk a behúzható éleket.

4 Vegyes feladatok

46. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan tíz pontú részgráf, mely izomorf a Petersen-gráffal?*

Megoldás: Belátjuk, hogy ez a probléma **P**-beli. Ha n jelöli a G pontjainak számát, akkor cn^{10} lépésben előállíthatjuk az összes 10-pontú részgráfját. Két 10-pontú gráfról $10! \cdot \binom{10}{2}$ lépésben megállapíthatjuk, hogy izomorfak-e. Ez nagy szám, de konstans. Így összesen is csak cn^{10} lépésre van szükségünk (ahol persze a c konstans most nem azonos a pár sorral feljebb szereplővel).

A valóságban persze ennél sokkal intelligensebben is eljárhatnánk, de pusztán a polinomialitás bizonyításához ez is elég.

47. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan tízpontú feszített részgráf, mely izomorf a komplementerével?*

Első megoldás: Ez a probléma is P-beli, a megoldás szószerint azonos az előző feladat megoldásával.

Második megoldás: Annak a mondatnak az illusztrálásaképp, hogy "a valóságban persze ennél sokkal intelligensebben is eljárhatnánk", gondoljuk végig, hogy a válasz minden G-re nemleges, hisz semelyik tízpontú gráf nem izomorf a komplementerével (hisz a tízpontú teljes gráfnak $\binom{10}{2} = 45$ éle van és ez páratlan szám).

48. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám*

Kérdés: *G átmérője nagyobb-e k-nál?*

(Egy gráf átmérője a két legtávolabbi pontjának a távolsága, ahol persze a távolság a két pont közti legrövidebb út éleinek számát jelenti.)

Megoldás: Szélességi kereséssel élszámmal arányos időben megállapíthatjuk egy pontról, hogy tőle a legtávolabbi pont milyen messze van. Ezt minden pontra megismételve legfeljebb cn^3 lépésben megkapjuk a választ a kérdésünkre, tehát a probléma P-beli.

49. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és két $s, t \in V(G)$ pont*

Kérdés: *Mennyi G-ben az s és t között vezető legrövidebb utak száma?*

Megoldás: Az s-ből a többi pontba vezető legrövidebb utak *hosszának* meghatározásához a szélességi keresést alkalmazzuk, melynek során valahányszor egy, az s-től $d(x) = k$ távolságra levő x pontból az $e = \{x, y\}$ élen egy új y pontba lépünk (ahol az "új" szó azt jelenti, hogy y távolságát még nem ismertük), felírjuk y-nak a $d(y) = k+1$ távolságát és azt, hogy y-ba az $a(y) = x$ pontból léptünk (ez utóbbit azért, hogy ha elérjük a t pontot, akkor ne csak a $d(t)$ távolságot tudjuk, hanem az a függvény segítségével egy ilyen hosszú utat is tudjunk mutatni).

Rendeljünk minden x ponthoz még egy $b(x)$ függvényt is a következőképpen: Legyen $b(s) = 1$, ha az $e = \{x, y\}$ élen lépünk y-ba, akkor legyen $b(y) = b(x)$, és ha később, egy másik szintén $d(u) = k$ távolságú pontból is vezetne y-ba él, akkor $b(y)$ régi értékéhez adjuk hozzá $b(u)$-t és ezt írjuk $b(y)$ helyére. Amire az algoritmus végetér, a $b(x)$ értékek épp az s-ből x-be vezető legrövidebb utak számát fogják mutatni.

Az algoritmus ezen módosítás után is a gráf élszámával arányos lépésszámú marad. A problémára tehát az input hosszának polinomjával felülről becsülhető lépésszámú algoritmust találtunk.[5]

50. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

Input: *Egy G összefüggő gráf pozitív élsúlyokkal*

1. kérdés: *Mennyi G-ben az összefüggő feszítő gráfok súlyának minimuma?*

2. kérdés: *Mennyi G-ben a kétszeresen összefüggő feszítő gráfok súlyának minimuma?*

Megoldás: Az első kérdés esetén a probléma P-beli. Az élsúlyok pozitivitása miatt ugyanis az összes összefüggő feszítő részgráf közül elég a feszítő fákat vizsgálnunk, és jól ismert, hogy ez a mohó algoritmussal elvégezhető.

A második kérdés esetén a probléma NP-nehéz. Vizsgáljuk ugyanis csak azt a speciális esetét, hogy egy olyan n pontú gráfban, melyben minden él súlya egységnyi, a kérdéses minimum n vagy több. Könnyű látni, hogy erre a kérdésre a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Megjegyzés: Hiba lett volna azt a választ adni, hogy a második kérdés esetén a probléma NP-teljes. Ehhez ugyanis NP-belinek kellene lennie, márpedig ez nem egy eldöntési probléma. Könnyű azonban a problémát úgy módosítani, hogy NP-teljes problémához jussunk:

Input: Egy G összefüggő gráf pozitív élsúlyokkal és egy $x > 0$ szám

Kérdés: Van-e G-ben x-nél nem drágább kétszeresen összefüggő feszítő gráf?

[5]Ezt a továbbiakban úgy fogjuk mondani, hogy a probléma P-beli. Mivel a P problémaosztályt eredetileg csak az eldöntési problémákon belül definiáltuk, a szóhasználat keresési problémákra nem teljesen precíz, de nem fog félreértést okozni. Arra azonban nagyon kell vigyázni, hogy egy keresési problémát soha ne hívjunk NP-teljesnek. Ha visszavezethető rá egy NP-teljes eldöntési probléma, akkor is csak NP-nehéz lehet (ld. még az 50. feladat megoldásához fűzött megjegyzést).

51. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *Kétszeresen összefüggő-e G?*

Megoldás: A probléma **P**-beli, hisz ha n és e jelöli G pontjainak, ill. éleinek a számát, akkor bármely x pont elhagyásával ce lépésben megállapíthatjuk, hogy $G - x$ összefüggő-e, így összesen is csak cne lépésre van szükség. (A mélységi keresés ügyes módosításával egyébként a kérdés még ce lépésszámú algoritmussal is megválaszolható.)

52. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és két $e, f \in E(G)$ él*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan kör, mely e-t is és f-et is tartalmazza?*

Megoldás: Ismert, hogy egy gráf akkor és csak akkor kétszeresen öszefüggő, ha bármely két élén át vezet kör. Ellenőrizzük, hogy G kétszeresen összefüggő-e és ha nem, bontsuk kétszeresen összefüggő komponensekre. A válasz akkor és csak akkor igenlő, ha az adott két él ugyanabban a kétszeresen összefüggő komponensben van. Az előző feladat megoldásában mondottak szerint ez polinom időben elvégezhető, tehát a probléma **P**-beli.

53. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy n pontú G gráf és két $u, v \in V(G)$ pont*

Kérdés: *Lefogható-e maximum három darab G-beli ponttal az összes u és v közötti út?*

Megoldás: A probléma **P**-beli: Nyilván legfeljebb cn^3 lépésben választhatjuk ki a maximum három pontot és minden ilyenre legfeljebb cn^2 lépésben megállapíthatjuk, hogy ezen pontok elhagyása után u és v ugyanabban az összefüggő komponensben vannak-e.

54. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

1. **kérdés:** *G legalább ötszörösen él-összefüggő-e?*
2. **kérdés:** *G hányszorosan él-összefüggő?*

Megoldás: Az első kérdés esetén a probléma nyilván **P**-beli: Az élek száma legfeljebb cn^2, így ha minden lehetséges módon elhagyunk 4 élt, akkor legfeljebb cn^8 esetben kell a maradék gráfban összefüggőséget vizsgálni. Mivel az összefüggőség-vizsgálat élszámmal arányos lépésszámot igényel, elvileg egy cn^{10} felső becslést kapnánk a teljes lépésszámra. A második kérdésre adott megoldásból látható lesz, hogy ennél sokkal jobb is lehetséges.

A második kérdés esetén nem alkalmazhatjuk az eddigi módszert, mert ha pl. az n pontú gráf $n/2$-szeresen él-összefüggő, akkor ez a mostanáig használt durva próbálgatásos módszerrel csak cn^n lépésben derülne ki. Könnyű azonban végiggondolni, hogy ha csak egy konkrét $s, t \in V(G)$ pontpárra szeretnénk tudni, hogy mennyi a köztük vezető összes utat lefogó élek minimális $k_{s,t}$ száma, akkor egy folyam-problémát kell megoldanunk (ha G minden élét mindkét irányban megirányítjuk, s a termelő, t a fogyasztó és minden él kapacitása egységnyi, akkor $k_{s,t}$ épp a minimális vágás kapacitása). Ezt minden pontpárra elvégezve a kapott számok minimuma lesz a válasz. Így az Edmonds-Karp tételből következik, hogy ez a probléma is **P**-beli.

55. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf*

Kérdés: *G hányszorosan összefüggő?*

Megoldás: Ez is **P**-beli, megoldásunkat ugyanúgy vezethetjük vissza az előző feladat második kérdését megválaszoló algoritmusra, ahogy a pontdiszjunkt utakra vonatkozó Menger-tétel bizonyítását visszavezettük az éldiszjunkt esetre.

56. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám*

Kérdés: *Van-e G-ben legfeljebb k élű vágás?*

Megoldás: A probléma **P**-beli. G-ben akkor és csak akkor van legfeljebb k élű vágás, ha legfeljebb k-szorosan él-összefüggő, azt pedig az **54.** feladat második kérdésének megválaszolásakor láttuk, hogy ez hálózati folyamok segítségével eldönthető.

57. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és pontjainak egy $S \subseteq V(G)$ részhalmaza.*

1. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melynek pontosan az S-beli pontok az elsőfokú pontjai?*
2. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melynek minden S-beli pontja elsőfokú?*

3. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melynek minden S-en kívüli pontja elsőfokú?*

Megoldás: Nyilván mindhárom kérdés esetén NP-beli a probléma, hisz a kívánt tulajdonságú fa a tanú.

Ismeretes, hogy minden fának legalább két elsőfokú pontja van, továbbá, hogy ha ez a fa nem út, akkor már legalább három elsőfokú pontot is tartalmaz. Ha tehát S-nek egy kételemű részhalmazt választunk, úgy az első kérdés azzal ekvivalens, hogy vezet-e az adott két pont között Hamilton-út. Mivel így a **11.** problémát visszavezettük az itteni elsőre, a feladatban szereplő első probléma NP-teljes.

A harmadik kérdéshez tartozó probléma is NP-teljes. Ezt ugyanígy bizonyíthatjuk be, csak most a visszavezetés során S-nek nem egy kételemű, hanem egy $(n-2)$-elemű részhalmazt kell választanunk.

A második kérdést viszont meg lehet válaszolni polinom időben, tehát a probléma P-beli. Gondoljuk végig, hogy akkor és csak akkor létezik olyan feszítő fa, melyben S minden pontja elsőfokú (de esetleg a maradék $T = V(G) - S$ halmaz pontjai között is lehetnek elsőfokúak), ha

- egyrészt G-ből elhagyva S pontjait és a hozzájuk illeszkedő éleket, a maradék gráf összefüggő,
- másrészt S minden pontjának van T-beli szomszédja.

Mivel $|S|, |T| \leq n$, czek a feltételek cn^2 lépésben ellenőrizhetőek.

58. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

Input: *Egy G gráf és egy k szám*

1. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melyben a maximális fokszám legalább k?*

2. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melyben a maximális fokszám legfeljebb k?*

Megoldás: Az első kérdés esetén a probléma P-beli. Az esetleges párhuzamos élek és hurokélek elhagyása után határozzuk ugyanis meg G-ben a maximális fokszámot. Ha ez k-nál kisebb, akkor a válasz nemleges (hisz akkor G részgráfjaiban sem lehet a maximális fokszám k vagy több). Ha viszont van legalább k-adfokú pont G-ben, akkor ebből a pontból indított szélességi

kereséssel épp egy kívánt tulajdonságú fához jutunk. Eközben legfeljebb cn^2 lépésre volt szükségünk.

A második kérdés esetén a probléma NP-teljes. Az NP-beliség persze nyilvánvaló (tanú a kívánt tulajdonságú fa). Másfelől $k = 2$ választással a probléma speciális esetként tartalmazza, hogy van-e G-ben Hamilton-út.

59. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*

Input: *Egy G összefüggő gráf, éleinek egy $X \subseteq E(G)$ részhalmaza és egy k szám*

1. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, mely legalább 10 darab X-beli élt tartalmaz?*

2. **kérdés:** *Van-e G-ben olyan feszítő fa, mely legalább k darab X-beli élt tartalmaz?*

Megoldás: A probléma mindkét kérdés esetén P-beli. Az első esetben ezt közvetlenül láthatjuk: Minden lehetséges módon válasszunk ki X-ből 10 élt. Ha ezek körmentes részgráfot alkotnak, akkor az kiegészíthető fává, ha viszont bármelyik 10 ilyen él már tartalmaz kört, akkor nem létezhet a kívánt tulajdonságú fa. Mivel $|X| \leq n^2$, legfeljebb $c|X|^{10} \leq cn^{20}$ esetben kell egy-egy gráfban körmentességet ellenőrizni (és mivel minden ilyen gráf 10 élű, ez az ellenőrzés n-től független konstans idő alatt elvégezhető). Persze ez feleslegesen lassú megoldás, a következő bekezdésben lényegesen gyorsabb algoritmust adunk az általános esetre.

A második kérdés esetén rendeljünk X éleihez 2, a többi élhez 1 súlyt és keressünk a mohó algoritmussal maximális súlyú kifeszítő fát. Ha ennek a súlya legalább $2k + (n - 1 - k) = n + k - 1$, akkor a válasz igenlő, különben nem.

60. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*

Input: *Egy G öszefüggő gráf és pontjainak egy $X \subseteq V(G)$ részhalmaza*

Kérdés: *Van-e G-ben olyan feszítő fa, melyben minden X-beli pont legalább másodfokú?*

Megoldás: A probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló (tanú egy ilyen fa), és az adott két pont közötti Hamilton-út létezésének eldöntését vezetjük rá vissza, amelyről láttuk (**11.** feladat), hogy NP-teljes: Ha ugyanis X két pont kivételével mindent tartalmaz, akkor a keresett fa épp egy

Hamilton-út (mert minden más fának legalább három elsőfokú pontja van).

61. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy G gráf*
Kérdés: *Van-e G-nek olyan feszítő fája, melynek egyetlen harmadfokú pontja van és minden más pont foka kisebb?*

Megoldás: A probléma NP-teljes. Az NP-beliség nyilvánvaló (tanú egy ilyen fa). Az adott H gráfban Hamilton út létezését kérdező problémát könnyen visszavezethetjük erre: Legyen $u \in V(H)$, vegyünk fel három új x, y, z pontot és az u pontot kössük össze x-szel, továbbá x-et y-nal és z-vel is. Az így keletkezett gráfban akkor és csak akkor van a feladatban leírt tulajdonságú feszítő fa, ha H-ban volt u végpontú Hamilton-út. Ha ezt H minden pontjára elvégezzük, akkor legfeljebb $|V(H)|$ kísérlettel el tudjuk dönteni, hogy egyáltalán van-e H-ban Hamilton-út.

62. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága?*
Input: *Egy n-pontú egyszerű G gráf*
Kérdés: *Teljesül-e G-ben az Ore-feltétel, azaz igaz-e, hogy minden nem szomszédos u, v pontpárra $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül?*

Megoldás: A probléma P-beli, hisz mindössze cn^2 feltételt kell ellenőrizni és a gráf megadási módjától függően egy feltétel ellenőrzése konstans vagy cn lépést igényel.

63. *Mi az alábbi problémák bonyolultsága?*
Input: *Egy G egyszerű gráf*
1. Kérdés: *Van-e G-ben páratlan sok élű kör?*
2. Kérdés: *Van-e G-ben páros sok élű kör?*
3. Kérdés: *Igaz-e, hogy G-ben minden kör páratlan sok élű?*
4. Kérdés: *Igaz-e, hogy G-ben minden kör páros sok élű?*

Megoldás: Belátjuk, hogy mind a négy probléma P-beli. Elég az első kettővel foglalkoznunk, hisz a **3.** kérdésre a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha a **2.** kérdésre nemleges és hasonló az első és a negyedik probléma viszonya is. Mivel az első kérdésre a válasz akkor és csak akkor nemleges, ha G páros, a választ (szélességi kereséssel) az élszámmal arányos lépésszámban meg tudjuk kapni.

A második kérdésre a válasz akkor és csak akkor nemleges, ha minden kör hossza páratlan. Nyilván ez a helyzet az erdők esetén (amikor nincs is kör), valamint akkor, ha a gráf körei éldiszjunktak és mindegyik külön páratlan. Ezeket az eseteket könnyű az élszámmal arányos lépésszámban ellenőrizni. Belátjuk, hogy minden más esetben van a gráfban páros élszámú kör is. Gondoljuk ugyanis végig, hogy minden más esetben van a gráfban valahol két pont és köztük három, a végpontoktól eltekintve pontdiszjunkt út. Ha ezek élszámát a, b és c jelöli és mondjuk $a+b$ páratlan, akkor az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a páros, b páratlan. Ekkor c vagy páros, és akkor az $a+c$ hosszú kör páros, vagy c páratlan, és akkor a $b+c$ hosszú kör páros.

64. *Mi az alábbi probléma bonyolultsága:*
Input: *Egy G irányított gráf és egy k szám*
Kérdés: *Van-e G-ben k darab olyan pont, melyek együtt G minden irányított körét lefogják?*

Megoldás: A probléma NP-teljes. A P-beliséghez tanú a kívánt tulajdonságú X ponthalmaz, hisz a $G - X$ gráfról mélységi kereséssel megállapítható, hogy van-e még benne irányított kör.

Az NP-teljességhez azt a problémát vezetjük vissza a feladatban szereplő problémára, hogy egy adott H irányítatlan gráf élei lefedhetőek-e legfeljebb k ponttal. Helyettesítsük ugyanis H minden élét két, ellentétesen irányított párhuzamos éllel és jelöljük az így kapott irányított gráfot G-vel. Ha H-nak van olyan éle, mely nincs lefedve egy adott k-elemű X ponthalmazzal, akkor G-ben már egy (kétélű) lefogatlan irányított kör is van. Ha viszont X lefedi H minden élét, akkor G-nek minden irányított körét le fogja fogni (nemcsak a kétélűeket). Mivel a H-ra vonatkozó probléma NP-teljes (ld. a **38.** feladatot), a mi feladatunk is az.

65. *Befejezésképp ellenőrizzük, hogy az alábbi hat probléma bonyolultságát azonnal felismerjük-e!*

Input: Egy G gráf	**Input:** Egy G gráf és egy k szám
Kérdés: Legalább 3-szorosan összefüggő-e a G gráf	**Kérdés:** Legalább k-szorosan összefüggő-e a G gráf?
Input: Egy G gráf	**Input:** Egy G gráf és egy k szám
Kérdés: Van-e G-ben legalább 3 független pont?	**Kérdés:** Van-e G-ben legalább k független pont?
Input: Egy G gráf	**Input:** Egy G gráf és egy k szám
Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai 3 színnel?	**Kérdés:** Kiszínezhetőek-e G pontjai k színnel?

Megoldás:

P-beli (51.-hez hasonlóan)	P-beli (55. feladat)
P-beli (46.-hez hasonlóan)	NP-teljes (37. feladat)
NP-teljes (ld. a tankönyvet)	NP-teljes (ld. a tankönyvet)