

4. Vizsgázárthelyi 2007 nyár A2

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$

2. Legyen f mindenütt folytonos függvény, az origón kívül $f(x) = \frac{1 - \cos x^2}{x}$. Hol és hányszor deriválható az f és - ha létezik - mennyi f 7. deriváltjának értéke az origóban?

3. Legyenek az $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ alterek a következőképpen definiálva:

$$S_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4w = 0\}.$$

Adja meg az $S = S_1 \cap S_2$ egy bázisát!

4. Legyen n tetszőleges pozitív egész és $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$ négyzetes mátrix.

Adja meg \underline{A} inverzének (ha ez létezik) sajátértékeit!

5. Legyen N az a négyszög (beleértve a határát is), melynek csúcsai az origó, valamint az $(1,0)$, $(1,1)$ és a $(0,1)$ pontok. Felveszi-e supremumát ill. infimumát az $f(x,y) = xy^2 + 2x - 4y$ függvény N -en és ha igen hol?

6.

(a) Igaz-e egy véges dimenziós lineáris teret önmagába képező lineáris operátorra az, hogy

(a1) Pontosan akkor invertálható, ha a magtere nem üres (\emptyset)

(a2) Pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem eleme a magtérnek.

(b) Legyen f tetszőleges kétváltozós függvény és H a sík tetszőleges zárt mérhető részhalmaza. Igaz-e

(b1) Ha f folytonos H -n, akkor integrálható is itt

(b2) Ha f nem folytonos H -n, akkor nem integrálható itt.

(c) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Igaz-e, hogy

(c1) ha az $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen konvergens H -n, akkor a $\sum f_n(x)$ függvénysor is egyenletesen konvergens H -n

(c2) ha a $\sum f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens H -n, akkor az $(f_n(x))$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens H -n.