Valószínűségszámítás
1. rész
Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2019. szeptember 24.

Valószínűségszámítás — 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Tartalomjegyzék

1. Esemény, valószínűség **5**
1.1. Kimenetelek . . . 5
1.2. Esemény . . . 5
1.3. Valószínűség . . . 6
1.4. Műveletek eseményekkel . . . 6
1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai . . . 7
1.6. Klasszikus problémák . . . 9
1.7. Számlálási alapszabályok . . . 10
1.8. Kombinatorikus alapképletek . . . 10
1.9. Az eseménytér megválasztása nem egyértelmű . . . 15
1.10. RAND.BETWEEN (magyarul: VÉLETLEN.KÖZÖTT) utasítás . . . 17

2. Diszkrét eloszlás **28**
2.1. Valószínűségi változó . . . 28
2.2. Eloszlás és súlyfüggvény . . . 28
2.3. Eloszlás szemléltetése . . . 31
2.4. Eloszlásfüggvény . . . 31
2.5. Jobboldali eloszlásfüggvény . . . 35
2.6. Medián . . . 39
2.7. Kétdimenziós valószínűségi változó . . . 41
2.8. Kétdimenziós eloszlás és súlyfüggvény . . . 43
2.9. Módusz . . . 43
2.10. Valószínűségek megadása súlyokkal . . . 44
2.11. Konstans értékű valószínűségi változók . . . 46

3. Folytonos egyenletes eloszlás **47**
3.1. Folytonos egyenletes eloszlás . . . 47
3.2. RAND utasítás . . . 53
3.3. Random számok tulajdonságai . . . 54
3.4. Lineáris transzformációk . . . 54

4. További fogalmak és szabályok **56**
4.1. További fogalmak eseményekre . . . 56
4.2. További szabályok eseményekre . . . 56
4.3. Eloszlás transzformációja . . . 57
4.4. Síkbeli eloszlás vetületei . . . 59
4.5. További szabályok valószínűségekre . . . 61

5. Feltételes valószínűség és eloszlás **65**
5.1. Feltételes valószínűség . . . 65
5.2. Szorzási szabályok . . . 66
5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva . . . 70
5.4. További szorzási szabályok . . . 70
5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes formula . . . 71
5.6. Feladatok vizsgálatokról . . . 74
5.7. Feladatok vizsgákról és bögrékről . . . 76
5.8. Elérhető-e az Örök Boldogság? *(Extra tananyag)* . . . 81
5.8.1. Amikor biztos, hogy elérjük . . . 82
5.8.2. Mikor érjük el? . . . 83
5.8.3. Amikor biztos, hogy nem érjük el . . . 87
5.9. Optimális taktika előre nem látható helyzetekben *(Extra tananyag)* . . . 89
5.9.1. Segédfeladat . . . 89
5.9.2. Szindbád és a háremhölgyek . . . 91
5.10. Feltételes eloszlás egy eseményen belül . . . 92
5.11. Feltételes eloszlások rendszere síkbeli eloszlás esetén . . . 94
5.11.1. Példák feltételes eloszlások meghatározására . . . 94
5.11.2. Általános összefüggések . . . 97
5.12. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól! . . . 98

6. Függetlenség **100**
6.1. Események függetlensége . . . 100
6.2. Valószínűségi változók függetlensége . . . 103
6.3. Direktszorzat . . . 104
6.4. Konvolúció . . . 105

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt **107**
7.1. Szabályos dobókockák esete . . . 107
7.2. Hamis dobókockák esete . . . 113
7.3. Különböző dobókockák esete . . . 121

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban **122**
8.1. Összegzési szabály vetület eloszlásokkal kapcsolatban . . . 122
8.2. Szorzási szabály független koordináták esetére . . . 122
8.3. Osztási és szorzási szabályok feltételes súlyfüggvényekkel . . . 122
8.4. Eloszlások keverése . . . 123
8.5. Eloszlás transzformációja egydimenzióban . . . 123
8.6. Eloszlás transzformációja kétdimenzióból egydimenzióba . . . 124
8.7. Példák . . . 124
8.8. Független valószínűségi változók összege – konvolúció . . . 128

Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az *"Extra tananyag"*, *"Extra feladat"* cimkékkel megjelölt anyagrészek és feladatok nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki ezekbőlaz anyagrészekből és feladatokból

- szépen, okosan megtanul annyit, amennyit a tárgy aktuális honlapján kérünk, és
- szándékét a honlapon megadott email címen a megadott határidőig jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből felkészült, és
- utána a vizsgáztató által feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

Vetier: Adatok – valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és statisztikai valószínűségi változók

Kedves Kollégák!

Itt hívom fel figyelmüket, hogy egy oktatási félév során a könyv egyes fejezeteit a leírt sorrendtől eltérően a következő oldalon megadott ütemezésben is lehet tanítani, tanulni.

Ennek az ütemezésnek előnye, hogy a nehezebb, bonyolultabb folytonos eset nem tolódik a félév második felére. Azt tapasztaltam, hogy a hallgatóink is nagyobb érdeklődéssel fordulnak a folytonos modellek felé, hiszen a diszkrét esetről sokan már tanultak a középiskolában is.

Eredményes, örömteli, jó munkát kívánok kollégáimnak is, diákjainknak is! Üdvözlettel,

2019. február 25.

Vetier András

1 – 2. hét	1. rész	1. Esemény, valószínűség
		2. Diszkrét eloszlás
		3. Folytonos egyenletes eloszlás
	3. rész	1. Folytonos eloszlások
		2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel
		3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka
		3.2. Összeg, szorzat, hányados
		3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése
		3.3. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások
3 – 4. hét	1. rész	4. További fogalmak és szabályok
		5. Feltételes valószínűség és eloszlás
		6. Függetlenség
	3. rész	3.4. Monoton transzformációk
		3.5. Folytonos szimuláció
	4. rész	1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók
		2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás
5 – 6. hét	2. rész	1. Nevezetes eloszlások
		2. Módusz megkeresése
		3. Szimuláció
	3. rész	3.6. Béta eloszlások
	4. rész	3. Béta eloszlások kétdimenzióban
7 – 8. hét	2. rész	4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka
		5. Egydimenziós adatrendszerek
		6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása
		7. Nagy számok törvényei
		8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai
		9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása - formulák
		10. Nevezetes eloszlások várható értékei - bizonyítások
		11. Binomiális eloszlással kapcsolatos levezetések
	3. rész	4. Várható érték, variancia, szórás (folytonos eset)
	4. rész	4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke
		5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára
9 – 10. hét	1. rész	7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt
	3. rész	5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (diszkrét és folytonos eset)
		6. Nevezetes folytonos eloszlások
		7. Közelítések normális eloszlással
11. hét	1. rész	8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban
	2. rész	12. Feltételes várható érték, variancia, szórás
	4. rész	6. Vetület- és feltételes eloszlások
12. hét	3. rész	8. Eloszlások transzformációi
	4. rész	7. Transzformáció síkról síkra
		8. Lineáris transzformáció síkról síkra
		9. Transzformáció síkról egyenesre
13. hét	4. rész	10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel
14. hét	4. rész	11. Normális eloszlások a síkon

Vetier András – Valószínűségszámítás – Diszkrét és folytonos valószínűségi változók

1. Esemény, valószínűség

1.1. Kimenetelek

Véletlen jelenség: Adott körülmények között valami történik. Például két szabályos dobódobókockát szabályosan feldobunk.

Kísérlet: A jelenség önmagától vagy az én szándékom miatt lezajlik. Például korrekt módon gurítom a két dobókockát.

Megfigyelés: Megmondjuk, kijelentjük, hogy mi érdekel minket, mire figyünk oda. Például megfigyelhetjük két dobókocka kapcsán a dobott számok összegét, vagy szorzatát, hányadosát, de megfigyelhetném azt is, hogy a dobókocka mennyi ideig gurul, hogy hol áll meg, stb.

Kimenetelek, más néven: **lehetséges kimenetelek, elemi események:** A megfigyelésünk lehetséges eredményei. Például két dobókockával dobva az összeg lehetséges eredményei: $2, 3, ..., 12$.

Eseménytér: Az összes lehetséges kimenetelek halmaza. A példánkban az eseménytér a 11 elemű $\{2, 3, ., 12\}$ halmaz.

1.2. Esemény

Esemény: Állítás a jelenséggel kapcsolatban, ami minden kísérletnél
vagy IGAZ – másképpen mondva – BEKÖVETKEZIK,
vagy HAMIS – másképpen mondva – NEM KÖVETKEZIK BE.
Például az az állítás, hogy két kocka esetén *a dobott számok összege nagyobb, mint* 7 , egy eseményt definiál.

Siker és kudarc: A bekövetkezést az esemény szempontjából SIKER-nek, a nem bekövetkezést KUDARC-nak is szokás hívni.

Események egyenlősége: Egy eseményt általában többféleképpen is körül lehet írni. A két állítás, hogy két dobókockával
az összeg 10 *vagy* 11 *vagy* 12 , illetve
az összeg kilencnél nagyobb,
másképpen hangzanak, de ugyanazt jelentik. Ez a két állítás egy és ugyanazon eseménynek két különböző megfogalmazása. Két eseményt – különböző megfogalmazásuk ellenére is – **egyenlőek**nek tekintünk, ha mindig egyidejűleg kövekezhetnek be: akkor és csak akkor következik be az egyik, ha a másik is bekövetkezik.

Kísérletsorozat: Több (egymásra semmi hatást kifejtő) kísérletet hajtunk végre. Például a két kockát, vagyis a kockapárt – mondjuk – 10 -szer szabályosan elgurítom.

Szántai Tamás: Valószínűségszámítás – 1. Valószínűségek és diszkrét valószínűségi mezők

1.3. Valószínűség

Gyakoriság: Ahányszor bekövetkezik az esemény az elvégzett valahány kisérlet során. Másképpen mondva a gyakoriság a sikeres kísérletek számát jelenti.

Relatív gyakoriság: Gyakoriság (= sikerek száma) osztva az összes kísérletek számával. Például ha 10 kísérletből 4 -szer következik be a szóbanforgó esemény, akkor az elvégzett kiísérletsorozatban az esemény relatív gyakorisága 0.4 . A relatív gyakoriság azt mutatja, hogy az összes kísérlet hányad részében következett be az esemény. Van aki ezt az arányt százaléákokban szereti kifejezni, és azért a 0.4 helyett 40% -ot mond, ami teljesen rendben is van, hiszen a 40% igazából 0.4 -et jelent.

Valószínűség: Egy adott eseményt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság közel van egy olyan értékhez, ami nem függ a véletlentől, hanem az eseményre jellemző. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. A relatív gyakoriság kevés kísérlet esetén erősen eltérhet a valószínűségtől, de a kísérletszám növekedtével egyre közelebb kerül hozzá.

Egy esemény valószínűségét általában úgy jelöljük, hogy egy P betű mögé zárójelek közé írjuk az eseményt definiáló állítást szavakkal vagy jelekkel, vagy bármi módon, ami az adott környezetben világosan utal az eseményre. Például annak a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával 4 -nél nagyobb számot dobunk, így jelölhetjük:

- $P($ négynél nagyobbat dobunk $)$
- $P($ ötöst vagy hatost dobunk $)$
- $P(5, 6)$
- $P(X > 4)$, ahol X jelenti a kockával dobott számot
- $P(A)$, ahol A jelenti azt az eseményt, hogy a kockával ötöst vagy hatost dobunk
- stb.

A valószínűségszámítás megtanít arra, hogy a valószínűségeket kísérletek elvégzése nélkül, elméleti módszerekkel meghatározzuk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi mezők

1.4. Műveletek eseményekkel

Események – halmazok: Az eseményeket az eseménytér (mint "alaphalmaz") részhalmazaival reprezentáljuk. Minden egyes esemény megfelel annak a halmaznak, mely a (szóban forgó eseményre nézve) kedvező kimenetelekből áll.

Biztos esemény: Mindig bekövetkezik. Az alaphalmazzal reprezentáljuk, amit S -sel jelölünk. Más jelölések: U , I , Ω .

Lehetetlen esemény: Sohase következik be. Az üres halmazzal reprezentáljuk. A $\emptyset$ jellel jelöljük.

Ellentett esemény – másképpen mondva – **komplementer esemény, "tagadás", "nem"**: Pontosan akkor következik be, amikor az eredeti esemény nem. Felülvonással jelöljük, pl.: $\overline{A}$.

Események "és" kapcsolata – másképpen mondva –**metszete, közös része, szorzata**: A szóban forgó események mindegyike bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény metszete: $A \cap B$

Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

Kizáró események: A szóban forgó események közül legfeljebb egy következhet be. Bármely kettő kizárja egymást, egyidejű bekövetkezésük lehetetlen.
Két eseményre: $A \cap B = \emptyset$
Több (véges vagy végtelen sok) eseményre: ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$

Események "vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **úniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül legalább egy bekövetkezik. Jelölések:
Két esemény úniója: $A \cup B$
Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$
Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró események "vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **úniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül pontosan egy bekövetkezik. A jelölések általában nem különböznek a korábbi jelölésektől:
Két kizáró esemény úniója: $A \cup B$
Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$
Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró eseménykre bizonyos szabályok egyszerűbbek az általános szabályoknál. Ezért egyes könyvek a * jellel hívják fel a figyelmet arra a tényre, hogy műveletben szereplő események kizáróak:
Két kizáró esemény úniója: $A \cup^* B$
Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \ldots \cup^* A_n$
Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \cup^* \ldots$

"Maga után vonja": Azt mondjuk, hogy a B esemény maga után vonja az A eseményt, ha teljesül az, hogy amikor a B esemény bekövetkezik, akkor szükségképpen az A esemény is bekövetkezik, azaz a B halmaz része az A halmaznak. Jelölés: $B \subset A$ vagy $A \supset B$.

Események különbsége: Ha A, B tetszőleges események, akkor A mínusz B -nek (avagy A és B különbségének) nevezzük, és $A \backslash B$ -vel jelöljük azt az eseményt, ami akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be. A különbség jelölése: $A \backslash B$. Tehát $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejeztben valószínűség alapvető tulajdonságait soroljuk fel, melyek – a relatív gyakoriság ugyanilyen tulajdonságai alalpján – kézenfekvőek. Fontos, hogy az olvasó ne csak memorizálja ezeket a tulajdonságokat, hanem értse, lássa, hogy *a valószínűségnek ezek a tulajdonságai a relatív gyakoriság (triviális!) hasonló tulajdonságai miatt igazak*. Néhány bonyolultabb szabályt egy későbbi fejezetben sorolunk fel. Megjegyezzük, hogy az első, a második és az ötödik tulajdonságból logikai úton le lehet vezetni a valószínűség összes többi tuldajdonságát, ezért a valószínűségszámítás axiomatikus felépítésekor ezek szolgálnak axiómákként. Ebben a könyvben nem célunk az axiomatikus tárgyalás. A technikásabb bizonyításokat is leegyszerűsítve, a szemléletre támaszkodva mutatjuk majd be. Fő célunk az elmélet és a valóság kapcsolatátának világos tálalása.

1. **Minden esemény valószínűsége** 0 **és** 1 **közé esik:**

$$0 \leq \mathrm{P}(\, A \,) \leq 1$$

Valószínűségszámítás – Valószínűségek és bizonytalan mennyiségi változók

2. **A biztos esemény valószínűsége** 1 **:**

$$\mathrm{P}(\ S\ )\ =\ 1$$

3. **A lehetetlen esemény valószínűsége** 0 **:**

$$P(\ \emptyset\ )\ =\ 0$$

4. **Komplementer szabály**:
   Minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ \overline{A}\ )\ =\ 1 \qquad \mathrm{P}(\ A\ )\ =\ 1 - \mathrm{P}(\ \overline{A}\ ) \qquad \mathrm{P}(\ \overline{A}\ )\ =\ 1 - \mathrm{P}(\ A\ )$$

5. **Összegzési szabály *kizáró* eseményekre:**
   Ha A, B kizáró események, és $C\ =\ A \cup B$, akkor

$$\mathrm{P}(\ C\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ )$$

   Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges sok kizáró esemény, és $A\ =\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

   Ha $A_1, A_2, A_3, \ldots$ végtelen sok kizáró esemény, és $A\ =\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \mathrm{P}(\ A_3\ ) + \ldots$$

6. **Általános összegzési szabály** (még csak) **két eseményre**:
   Ha A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \cup B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap B\ )$$

7. **Általános kivonási szabály**:
   Ha a A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \backslash B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap B\ )$$

8. **Speciális kivonási szabály**:
   Ha a B esemény maga után vonja az A eseményt, vagyis $B \subseteq A$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \backslash B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) - \mathrm{P}(\ B\ )$$

Feladat: Páros vagy páratlan? Egy érmét dobálunk az első fejig. Megfigyeljük az ehhez szükséges dobások számát. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma páros szám?

Megoldás: A lehetséges kimenetelek: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$ *"soha"* , ahol a *"soha"* akkor következik be, ha mindig csak írást dobunk, vagyis sohase dobunk fejet. Az alábbi valószínűségek triviálisak:

Vrjer András — Valószínűségszámítás 1. rész: valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$$\begin{aligned}
\text{P(az első fej a 2. dobásra adódik)} &= \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{4} \\
\text{P(az első fej a 4. dobásra adódik)} &= \tfrac{1}{2^4} = \tfrac{1}{16} \\
\text{P(az első fej a 6. dobásra adódik)} &= \tfrac{1}{2^6} = \tfrac{1}{64} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ezekből a feladat kérdésére a válasz összegzéssel adódik:

$$\begin{aligned}
&\text{P(az első fej eléréséhez páros sok dobás kell)} = \\
&= \text{P(az első fej a 2. dobásra adódik)} + \\
&+ \text{P(az első fej a 4. dobásra adódik)} + \\
&+ \text{P(az első fej a 6. dobásra adódik)} + \\
&\vdots \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots = \tfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban, a végtelen sor összegzésénél, felhasználtuk a jól ismert tényt, hogy egy végtelen mértani sor összegére igaz:

$$\text{összeg} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}$$

1.6. Klasszikus problémák

Gyakran megesik, hogy a megfigyelésünknek véges sok kimenetele van, melyek (valamilyen szimmetria) miatt érezhetően egyforma valószínűségűek. Ilyenkor minden kimenetel valószínűsége a lehetséges kimenetelek számának a reciproka, és egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma osztva az összes események számával:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\textit{az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetelek száma}}$$

Mivel a "klaszikus időkben" ilyen jelegű problémák kapcsán indult el a valószínűségszámítás felfedezése, az ilyen problémákat "klasszikus problámák"-nak nevezzük.

Vetier András: Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

1.7. Számlálási alapszabályok

Ezek a szabályok teljesen nyilvánvalóak, mindenki ismeri őket. Mégis felsoroljuk őket, hogy amikor kell, lehessen hivatkozni rájuk.

Összegzés: Ha egy halmaz egymást kizáró részhalmazokra bomlik (a halmazt particionáljuk, a halmaz partíciókra bomlik), akkor *a halmaz elemszáma egyenlő a részhalmazok elemszámainak összegével*.

Kivonás: Ha egy halmaznak elhagyjuk egy részhalmazát, akkor *a megmaradó halmaz elemeinek száma egyenlő az eredeti halmaz elemszáma mínusz az elhagyott részhalmaz elemszáma*.

Szorzás: Ha két halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és rendezett párokat képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük a párok első elemeit, a másodikból a párok második elemeit, akkor *a párok darabszáma egyenlő a két halmaz elemszámának a szorzatával.*

Több tényezős szorzás: Ha n halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$ -ik, n -ik halmazokat, és rendezett n -eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n -ik halmazból vesszük az n -ik elemet, akkor *a rendezett n -esek darabszáma egyenlő a halmazok elemszámainak a szorzatával*.

Több tényezős szorzás fa-gráfokkal: Képzeljünk el egy fa-gráfot, mely "felfelé nő", és
gyökeréből k_1 él indul ki (ezek az elsőrendű élek),
az elsőrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_2 él indul ki (ezek a másodrendű élek),
a másodrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_3 él indul ki (ezek a harmadrendű élek),
és így tovább,
az $(n-1)$ -ed rendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_n él indul ki.
E fa-gráf tetején a végpontok száma: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Hatványozás: Ha egy halmazt n pédányban tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$ -ik n -ik pédányát a halmaznak, és rendezett n -eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n -ik halmazból vesszük az n -ik elemet, akkor *a rendezett n -esek darabszáma egyenlő a halmaz elemszámának n -ik hatványával.*

Osztás: Ha egy halmazt úgy particionálunk (bontunk diszjunkt részhalmazokra), hogy minden partició (részhalmaz) ugyanannyi elemből áll, akkor *a partíciók (részhalmazok) darabszáma egyenlő a halmaz elemszáma osztva a partíciók (részhalmazok) közös elemszámával.*

1.8. Kombinatorikus alapképletek

Az alábbi táblázatba folgalt képleteket ismertnek feltételezzük. Egy-egy példával világítunk rá jelentésükre.

Szántai Tamás – Valószínűségszámítás és statisztika I. rész: Valószínűségek és diszkrét eloszlásfüggvények

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma (egy-egy betű többször is felhasználható)
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot (nem számít a kiválasztás sorrendje)	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l -et, ennyiféleképpen tehetjük meg *(Extra tananyag)*

Táblázat: *Kombinatorikus alapképletek*

Megjegyzés: Az ismétléses kombináció képletét meg lehet említeni, de nem kell foglalkozni vele.

1. Példa: Lottó öt találat. Az ötös lottón 90 szám közül húznak ki 5 -öt. A nyerés szempontjából a sorrend nem számít, ezért a lehetséges kombinációkat vizsgáljuk. Az összes kombinációk száma

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268 \approx 44 \text{ millió}$$

A biztos teli találat eléréséhez ennyi szelvényt kellene kitöltenünk. Megemlítjük, hogy ha 44 millió lottószelvényt egymásra raknánk, akkor ez a torony a Föld legmasabb csúcsáig, a Mount Everest tetejéig érne fel. Ha egyetlen szelvénnyel játszom, akkor az öt találatom valószínűsége

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 0.000\,000\,023$$

hiszen a $43,949,268$ egyformán valószínű kombináció között az az egyetlen a kedvező, ahogyan én töltöm ki a szelvényt.

2. Példa: Lottó találatok. Annak az eseményeknek a valósznűsége, hogy egy szelvénnyel játszva az ötös lottón, a találataim száma k, az alábbi törttel adható meg:

$$\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, 5$. A valószínűségek numerikus értéke:

$$\text{P(5 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000\,000\,023$$

$$\text{P(4 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000\,009\,7$$

Szabó András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$$\text{P(3 találatos lesz a szelvényem)} \;=\; \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \;\approx\; 0.000\,81$$

$$\text{P(2 találatos lesz a szelvényem)} \;=\; \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \;\approx\; 0.022$$

$$\text{P(1 találatos lesz a szelvényem)} \;=\; \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \;\approx\; 0.23$$

$$\text{P(0 találatos lesz a szelvényem)} \;=\; \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \;\approx\; 0.75$$

3. Példa: Hány piros? (Általános eset) A lottó probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K darab piros, $N-K$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4. Példa: Hány piros? (Speciális eset) Az előző általános problémát most konkrét értékek mellett vizsgáljuk: 50 darab golyó, közülük 30 piros, 20 fehér. Kiveszünk 12 golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz?

Válasz:

$$p(x) \;=\; \frac{\binom{30}{x}\binom{20}{n-x}}{\binom{50}{12}} \qquad (\; x = 0, 1, 2, \ldots 12 \;)$$

A

$$p(0) \;=\; \frac{\binom{30}{0}\binom{20}{12}}{\binom{50}{12}} \quad p(1) \;=\; \frac{\binom{30}{1}\binom{20}{11}}{\binom{50}{12}} \quad p(2) \;=\; \frac{\binom{30}{2}\binom{20}{10}}{\binom{50}{12}} \quad \ldots \quad p(11) \;=\; \frac{\binom{30}{11}\binom{20}{1}}{\binom{50}{12}} \quad p(12) \;=\; \frac{\binom{30}{12}\binom{20}{0}}{\binom{50}{12}}$$

valószínűséget Excellel (két tizedes pontossággal) kiszámítottuk minden szóbajövő k -ra, és azokat táblázatba rendeztük. Íme a táblázat:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x valószínűsége	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.19	0.26	0.23	0.13	0.05	0.01	0.00

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

A táblázatból sokmindent ki lehet olvasni:

- Annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 piros lesz a a kihúzottak között: 0.05 .
- Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 piros lesz a a kihúzottak között: 0.13 .
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 9 piros lesz a a kihúzottak között: $0.13 + 0.05 + 0.01 + 0.00 \;=\; 0.19$.

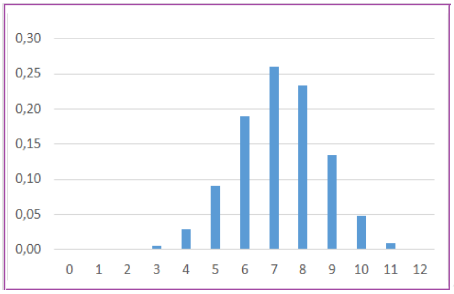
Szántai András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűség- és diszkrét valószínűségi változók

- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 9 piros lesz a a kihúzottta között:

$$0.00 + 0.00 + 0.00 + 0.01 + 0.03 + 0.09 + 0.19 + 0.26 + 0.23 + 0,13 \;=\; 0.94$$

- A valószínűségek $x = 7$ előtt nőnek, utána csökkennek.
- A 7 piros a legvalószínűbb. A második legvalószínűbb a 8 , a harmadik a 6 , stb.

A súlyfüggvény ábráját is megadjuk, sokat lehet leolvasni róla.



1. ábra. *Valószínűségek szemléltetése*

5. Példa: Hány piros, hány kék? Az előző probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K_1 darab piros, K_2 darab kék, $N - K_1 - K_2$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k_1 darab piros és pontosan k_2 darab kék lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{K_1}{k_1}\binom{K_2}{k_2}\binom{N-K_1-K_2}{n-k_1-k_2}}{\binom{N}{n}}$$

6. Példa: Nyolcszor húzunk. Az előző példában feltett általános kérdést most egy speciális esetben alaposabban megvizsgáljuk. Tegyük fel, hogy 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x -re és y -ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \;\leq\; x \;\leq\; 8$$

$$0 \;\leq\; y \;\leq\; 8$$

$$0 \;\leq\; 8 - x - y \;\leq\; 8$$

A valószínűségek numerikus értékei segítségével többször fogunk majd a későbbiekben dolgozni, ezért Excellel kiszámoltuk, és táblázatba rendezve itt megadjuk őket:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

Vetier András – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

7. Példa: Tíz érmével három fej. Valaki feldob 10 szabályos érmét. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 érmén lesz fej felül? (És akkor természetesen 7 érmén az írás lesz felül.)

Válasz: Megfigyelvén mindegyik érmét, hogy melyik oldaluk van felül – mivel mindegyik érme 2 lehetőséget kínál – nyilván

$$2^{10} \;=\; 1\,024$$

egyformán valószínű variáció kínálkozik. Mindegy, hogy 10 érme közül melyik az a 3 , amelyiken a fej van felül. A 10 érme közül

$$\binom{10}{3}$$

féle módon lehet kivalasztani azt a 3 -at, amilyeken a fej van felül, tehát az összes variáció között ennyi a kedvezőek száma. Ezért a valószínűség:

$$\text{P(}\;3\;\text{érmén van fej)} \;=\; \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$$

8. Példa: Tíz érmével hány fej? Valaki feldob 10 szabályos érmét. Mi a valószínűsége annak, hogy x darab érmén lesz fej felül? (És akkor természetesen $10-x$ érmén az írás lesz felül.)

Válasz: Megfigyelvén mindegyik érmét, hogy melyik oldaluk van felül – mivel mindegyik érme 2 lehetőséget kínál – nyilván

$$2^{10} \;=\; 1\,024$$

egyformán valószínű variáció kínálkozik. Mindegy, hogy a 10 érme közül melyik az az x darab, amelyiken a fej van felül. A 10 érme közül

$$\binom{10}{x}$$

féle módon lehet kivalasztani azt az x -t, amilyeken a fej van felül, tehát az összes variáció között ennyi a kedvezőek száma. Ezért a valószínűség:

$$\text{P(}\;x\;\text{érmén van fej)} \;=\; \frac{\binom{10}{x}}{2^{10}} \qquad\qquad (x=0,1,2,\ldots,10)$$

A valószínűségek numerikus értékét 3 tizedes pontossággal tábázatba rendezve adjuk meg:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x fej valószínűsége	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

1.9. Az eseménytér megválasztása nem egyértelmű

Ennek az alfejezetnek nem az a célja, hogy új fogalmakat vagy módszereket taníson. Arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy az eseménytér megválasztása nem feltétlenül egyértelmű. Erre mutatunk most egy példát.

1. Példa: Melyik pár megy a moziba? Két fiú (András és Bálint) és három lány (Cili, Dóri és Emese) szívességből felásták Jóska bácsi veteményes kertjét, aki szerényen meghálálta a segítséget: két mozijegyet ajándokozott a társaságnak a Szép szerelem c. filmre. (Az öt jegy ára már túl sok lett volna szerény nyugdíjához mérten.) A jegyek az utolsó sor 1. és 2. székére szólnak. A társaság igazságos sorsolással dönti el, hogy kik menjenek el a moziba: az öt nevet egy-egy cédulára írják, majd egymás után húznak (természetesen visszatevés nélkül) kétszer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy fiú-lány páros lesz a szerencsés pár?

1. Megoldás: Az 5 cédula közül kettő ; $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választható ki. Fel is sorljuk ezt a 10 kombinációt. A nevek helyett csak a kezdőbetűket íjuk ki, a fiúk kezdőbetűit **vastag**-, a lányokét *dőlt* betűvel. A kapcsos zárójelen belül a nevek sorrendje nem játszik szerepet, ezért az ABC-sorrendet használjuk. Íme:

{ **A**, **B** }
{ **A**, *C* }
{ **A**, *D* }
{ **A**, *E* }
{ **B**, *C* }
{ **B**, *D* }
{ **B**, *E* }
{ *C*, *D* }
{ *C*, *E* }
{ *D*, *E* }

A 10 kombináció között fiú-lány páros $2 \cdot 3 = 6$ darab van. Ezek az alábbiak:

{ **A**, *C* }
{ **A**, *D* }
{ **A**, *E* }
{ **B**, *C* }
{ **B**, *D* }
{ **B**, *E* }

A keresett valószínűség:

$$\frac{6}{10} = 0.6$$

2. Megoldás: Mondjuk, abban egyezik meg a társaság, hogy akit először húznak ki, az ül az 1 -es székre, akit másodszor húznak ki, az ül a 2 -es székre. Ez a választási mód $5 \cdot 4 = 20$ lehetőséget ad. Ezeket a variációkat is felsoroljuk (a zárójeleken belül elől szerepel annak a jele, aki az 1. székre ül):

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és valószínűségi változók

(**A**, **B**)	(**B**, **A**)
(**A**, C)	(C, **A**)
(**A**, D)	(D, **A**)
(**A**, E)	(E, **A**)
(**B**, C)	(C, **B**)
(**B**, D)	(D, **B**)
(**B**, E)	(E, **B**)
(C, D)	(D, C)
(C, E)	(E, C)
(D, E)	(E, D)

Kedvezőek azok a variációk, melyekben egy fiút egy lány követ, ezek száma $2 \cdot 3 = 6$, és azok, melyekben egy lányt egy fiú követ, ezek száma szintén $3 \cdot 2 = 6$. Ez összesen $6 + 6 = 12$ kedvező esetet ad. Ezek az alábbiak:

(**A**, C)	(C, **A**)
(**A**, D)	(D, **A**)
(**A**, E)	(E, **A**)
(**B**, C)	(C, **B**)
(**B**, D)	(D, **B**)
(**B**, E)	(E, **B**)

Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{12}{20} = 0.6$$

Megjegyzések:

- Mindkét megoldás jó.
- A második megoldásban az eseménytér kétszer annyi elemet tartalmaz, mint az első megoldás eseménytere, és a kedvező kimenetelekre is igaz ugyanez. Ezért a két megoldásban ugyanaz a valószínűség érték adódik.
- Ha valaki két jó megoldás közül előnyben részesíti az egyszerűbbet, akkor ebben a versenyben az első megoldás a nyertes.
- A második megoldás eseménytere viszonyt olyasmi vizsgálatára is alkalmas, amire az első megoldás technikája nem. Ezt mutatjuk be a következő példával.

Aki a sor szélén ül, oldalra kinyújthatja a lábait. Ezért azon túl, hogy kik mennek a moziba, arra is oda lehet figyelni, hogy ki ül a sor szélén az 1. széken, és ki a 2. széken.

2. Példa: ***(Az előző példa folytatása:)*** **Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1. széken fiú ül, a 2. széken lány?**

Megoldás: A társaság abban egyezett meg, hogy akit először húznak ki, az ül az 1-es székre, akit másodszor húznak ki, az ül a 2-es székre. Mint az előző feladat második megoldásában leszögeztük, ez a választási mód $5 \cdot 4 = 20$ lehetőséget ad. Most csak azok a kedvező esetek, melyekben egy fiút egy lány követ:

(**A**, C)
(**A**, D)
(**A**, E)
(**B**, C)
(**B**, D)
(**B**, E)

Vetter Ágnes – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi mezők

Ezek száma $2 \cdot 3 = 6$. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{6}{20} = 0.3.$$

Megjegyzés: Az előző feladat első megoldása nem foglalkozik azzal, hogy ki hol ül. Ennek a megoldásnak az eseménytere nem alkalmas ennek a feladatnak a megoldására.

Íme egy banálisan egyszerű példa:

3. Példa: Piros és kék dobókocka - mi van a piros kockán? Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a pirossal 6 -ost dobunk?

Megoldás: Triviális okoskodás: a piros dobókockán 6 egyforma valószínűségű szám közül egy kedvező, ezért a válasz $\frac{1}{6}$. Nem kevésbé nyilvánvaló ez a megoldás is: a lehetséges 36 (piros, kék) pár közül a hat darab $(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)$ pár kedvező, ezért a válasz $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Mindkét megoldás jó, az elsőben az eseménytér 6 elemű, a másodikban 36 .

És végül ismét az ötös lottó:

4. Példa: Az ötös lottón 90 szám közül húznak ki 5 -öt. Igaz, hogy a nyerés szempontjából a számok kihúzásának a sorrendje nem számít. Mivel a nyerő számok egy bizonyos sorrendben születnek, sokak számára az a természetes, hogy ha az eseménytér felvételénél a sorrendre is odafigyelünk. Ekkor a lehetséges kimenetelek száma

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$$

Ezzel az eseménytérrel dolgozva - például – annak a valószínűsége, hogy 2 találatos lesz a szelvényem, természetesen ugyanannyinak adódik, mint azt néhány oldallal feljebb a sorendtől eltekintve kiszámoltuk. Arra kell nagyon odafigyelni, hogy a kedvező kimeneteleket az eseménytéren belül helyesen értelmezzük, és a számukat is helyesen írjuk fel:

$$\binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 =$$

$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83$$

Ebből a valószínűség:

$$\text{P(2 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} =$$

$$= \frac{\frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{3!}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \qquad (\approx 0.022)$$

1.10. RAND.BETWEEN (magyarul: VÉLETLEN.KÖZÖTT) utasítás

Az Excelben az egész értékeket felvevő

`RAND.BETWEEN(A;B),  magyarul VÉLETLEN.KÖZÖTT(A;B)`

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ az $\{A, A+1, \ldots, B-1, B\}$ halmazon.

1. Példa: Száz cédula. A

`RAND.BETWEEN(1;100)`

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha az $\{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ számokat egy-egy cédulára írnánk, a cédulákat egy dobozba tennénk, és a dobozból kihúznánk egy cédulát, és megnéznénk a rajta lévő számot. Annak a valószínűsége, hogy `RAND.BETWEEN(1;100)` értéke

Vetter András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és eseményekre vonatkozó valószínűségek

pontosan 55 , egyenlő $1/100$ -dal

kisebb vagy egyenlő, mint 55 , egyenlő $55/100 = 0.55$ -dal

nagyobb 50 -nél, de kisebb 60 -nál, egyenlő $9/100 = 0.09$ -dal

2. Példa: Dobókocka. A

```
RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha egy szabályos dobókockával dobnánk, és tekintenénk a dobott számot. A 6 lehetséges eset mindegyike $\frac{1}{6}$ valószínűségű.

Fontos, hogy az Olvasó tisztában legyen azzal, hogy ha a `RAND.BETWEEN(1;6)` utasítást többször leírjuk, akkor minden alkalmazás a többitől független eredményt ad. Ha az utasítást ahhoz hasonlóan, ahogy most ideírjuk:

```
RAND.BETWEEN(1;6)     RAND.BETWEEN(1;6)
```

két külön Excel-cellába is beírjuk, azt szimulálhatjuk, mintha két szabályos dobókockával dobnánk.

3. Példa: Két dobókocka. Két szabályos dobókockával dobunk. A két dobókockát (még akkor is, ha teljesen egyformának tűnnek) meg tudjuk különböztetni, ha az egyiket a bal, a másikat a jobb kezünkből gurítjuk. A két dobókocka ily módon való dobását szimulálhatjuk a

```
RAND.BETWEEN(1;6)     RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasításpárral. Nyilván 36 lehetséges kimenetel kínálkozik. Ezt a 36 esetet – egymás után leírva – fel is sorolhatjuk, de előnyös, ha táblázatba rendezve adjuk meg őket. Íme:

jobb / bal	1	2	3	4	5	6
1	1 ; 1	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	1 ; 5	1 ; 6
2	2 ; 1	2 ; 2	2 ; 3	2 ; 4	2 ; 5	2 ; 6
3	3 ; 1	3 ; 2	3 ; 3	3 ; 4	3 ; 5	3 ; 6
4	4 ; 1	4 ; 2	4 ; 3	4 ; 4	4 ; 5	4 ; 6
5	5 ; 1	5 ; 2	5 ; 3	5 ; 4	5 ; 5	5 ; 6
6	6 ; 1	6 ; 2	6 ; 3	6 ; 4	6 ; 5	6 ; 6

Táblázat: *A lehetséges kimeneteleket négyzet alakú táblázatba rendeztük*

A 36 eset mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűségű:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A lehetséges kimenetelek helyére a valószínűségeiket írtuk*

4. Példa: Két dobókockával dobott számok összege. Egyes társasjátékokban két dobókockával dobunk, és a játékban a dobott számok összege, azaz – a szimuláció nyelvén mondva – a

```
RAND.BETWEEN(1;6)+ RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasítás értéke számít. A következő táblázatban at összeg értékeit tüntetjük fel:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Táblázat: *Az összeg értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában

Vetier András – Valószínűségszámítás – I. rész – Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2 -es érték	1 -szer
3 -as érték	2 -szer
4 -es érték	3 -szor
5 -ös érték	4 -szer
6 -os érték	5 -ször
7 -es érték	6 -szor
8 -as érték	5 -ször
9 -es érték	4 -szer
10 -es érték	3 -szor
11 -es érték	2 -szer
12 -es érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy az összeg értéke

2 ,	egyenlő	$1/36$ -dal
3 ,	egyenlő	$2/36$ -dal
4 ,	egyenlő	$3/36$ -dal
5 ,	egyenlő	$4/36$ -dal
6 ,	egyenlő	$5/36$ -dal
7 ,	egyenlő	$6/36$ -dal
8 ,	egyenlő	$5/36$ -dal
9 ,	egyenlő	$4/36$ -dal
10 ,	egyenlő	$3/36$ -dal
11 ,	egyenlő	$2/36$ -dal
12 ,	egyenlő	$1/36$ -dal

Ha az összeg lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

Vetier András – Valószínűségszámítás _1_ rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Az összeg eloszlása*

5. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata. Ha valakit a dobott számok szorzata érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a szorzatokat tartalmazza:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Táblázat: *A szorzat értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségelmélet és diszkrét valószínűségi változók

1 -es érték	1 -szer
2 -es érték	2 -szer
3 -as érték	2 -szer
4 -es érték	3 -szor
5 -ös érték	2 -szer
6 -os érték	4 -szer
8 -as érték	2 -szer
9 -es érték	1 -szer
10 -es érték	2 -szer
12 -es érték	4 -szer
15 -ös érték	2 -szer
16 -es érték	1 -szer
18 -as érték	2 -szer
20 -as érték	2 -szer
24 -es érték	2 -szer
25 -es érték	1 -szer
30 -es érték	2 -szer
36 -es érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a szorzat értéke

Vetier András - Valószínűségszámítás - 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

1 , $1/36$ -dal egyenlő

2 , $2/36$ -dal egyenlő

3 , $2/36$ -dal egyenlő

4 , $3/36$ -dal egyenlő

5 , $2/36$ -dal egyenlő

6 , $4/36$ -dal egyenlő

8 , $2/36$ -dal egyenlő

9 , $1/36$ -dal egyenlő

10 , $2/36$ -dal egyenlő

12 , $4/36$ -dal egyenlő

15 , $2/36$ -dal egyenlő

16 , $1/36$ -dal egyenlő

18 , $2/36$ -dal egyenlő

20 , $2/36$ -dal egyenlő

24 , $2/36$ -dal egyenlő

25 , $1/36$ -dal egyenlő

30 , $2/36$ -dal egyenlő

36 , $1/36$ -dal egyenlő

Veiter András - Valószínűségszámítás - 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ha a szorzat lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A szorzat eloszlása*

6. Példa: Két dobókockával dobott számok hányadosa. Ha valakit a dobott számok hányadosa (mondjuk, a bal kézből gutított dobókockán lévő szám osztva a jobb kézből gurított dobókockán lévő szám) érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a hányadosokat tartalmazza:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3
3	3	3/2	1	3/4	3/5	1/2
4	4	2	4/3	1	4/5	2/3
5	5	5/2	5/3	5/4	1	5/6
6	6	3	2	3/2	6/5	1

Táblázat: *A hányados értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában az

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$1/6$	érték	1 -szer
$1/5$	érték	1 -szer
$1/4$	érték	1 -szer
$1/3$	érték	2 -szer
$2/5$	érték	1 -szer
$1/2$	érték	3 -szor
$3/5$	érték	1 -szer
$2/3$	érték	2 -szer
$3/4$	érték	1 -szer
$4/5$	érték	1 -szer
$5/6$	érték	1 -szer
1	érték	6 -szor
$6/5$	érték	1 -szer
$5/4$	érték	1 -szer
$4/3$	érték	1 -szer
$3/2$	érték	2 -szer
$5/3$	érték	1 -szer
2	érték	3 -szor
$5/2$	érték	1 -szer
3	érték	2 -szer
4	érték	1 -szer
5	érték	1 -szer
6	érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a hányados értéke

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

1/6 , egyenlő 1/36 -dal

1/5 , egyenlő 1/36 -dal

1/4 , egyenlő 1/36 -dal

1/3 , egyenlő 2/36 -dal

2/5 , egyenlő 1/36 -dal

1/2 , egyenlő 3/36 -dal

3/5 , egyenlő 1/36 -dal

2/3 , egyenlő 2/36 -dal

3/4 , egyenlő 1/36 -dal

4/5 , egyenlő 1/36 -dal

5/6 , egyenlő 1/36 -dal

1 , egyenlő 6/36 -dal

6/5 , egyenlő 1/36 -dal

5/4 , egyenlő 1/36 -dal

4/3 , egyenlő 1/36 -dal

3/2 , egyenlő 2/36 -dal

5/3 , egyenlő 1/36 -dal

2 , egyenlő 3/36 -dal

5/2 , egyenlő 1/36 -dal

3 , egyenlő 2/36 -dal

4 , egyenlő 1/36 -dal

5 , egyenlő 1/36 -dal

6 , egyenlő 1/36 -dal

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ha a hányados lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1/6	1/5	1/4	1/3	2/5	2/4	3/5	2/3	3/4	4/5	5/6	. . .
1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	. . .

. . .	1	6/5	5/4	4/3	3/2	5/3	2	5/2	3	4	5	6
. . .	6/36	1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36

Táblázat: *A hányados eloszlása*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2. Diszkrét eloszlás

2.1. Valószínűségi változó

Amikor a megfigyelés eredményei, vagyis a lehetséges kimenetelek *számok*, akkor azt mondjuk, hogy **valószínűségi változó**val van dolgunk. A gyakorlati alkalmazásokban felbukkanó valószínűségi változók két fontos csoportba sorolhatók:

- A valószínűségi változónak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **diszkrét**.
- A valószínűségi változó lehetséges értékei egy véges vagy végtelen hosszúságú intervallumot tesznek ki, és a lehetséges értékek mindegyikének valószínűsége nulla. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **folytonos**.

Valószínűségi változók jelölésére ebben a könyvben általában a latin ábécé nagybetűit fogjuk használni. Legtöbbször az X betűt vagy az Y -t, Z -t, melyeket esetleg indexekkel látunk el. (Más könyvekben a görög ábécé kisbetűit használják, leginkább a ξ -t és η -t.) Példák valószínűségi változók jelölésére:

- X = melyik szám lesz felül, amikor egy dobókockával dobok
- Y = ahány barátommal összefutok az utcán egy nap alatt
- Z_1 = amennyi időt várnom kell reggelente a villamosra, amikor jövök az egyetemre
- Z_2 = amennyi időt várnom kell a buszra, amikor megyek haza

Itt X és Y diszkrét, Z_1 és Z_2 folytonos valószínűségi változók.

2.2. Eloszlás és súlyfüggvény

Ha egy diszkrét valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.), akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a **valószínűségi változó eloszlásá**t.

Ha (mindenféle valószínűségi változóra való tekintet nélkül) egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz mindenegyes x eleméhez egy-egy nemnegatív $p(x)$ számot rendelünk úgy, hogy azok összege 1:

$$\sum_x p(x) = 1$$

akkor azt mondjuk, hogy megadunk egy **valószínűségi eloszlás**t (**valószínűség eloszlás**t), más kifejezéssel **normált eloszlás**t. A $p(x)$ függvényt **súlyfüggvény**nek (vagy **valószínűségi függvény**nek) nevezzük.

Egy X valószínűségi változó esetén $p(x)$ megadja annak a valószínűségét, hogy a véletlen X érték x -szel egyenlő:

$$p(x) = \mathrm{P}(\, X = x \,)$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyermekeinek számát vizsgálták. A gyermekek száma $0, 1, 2, 3$ lehet. A tapasztalatból tudhatjuk a négy lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

Jetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

gyerekek száma	0	1	2	3
százalék	20	40	30	10

Táblázat: *Gyermekek számának eloszlása százalékokban*

(A négy darab százalék érték összege természetesen 100 .)

Ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi valószínűségi változót:

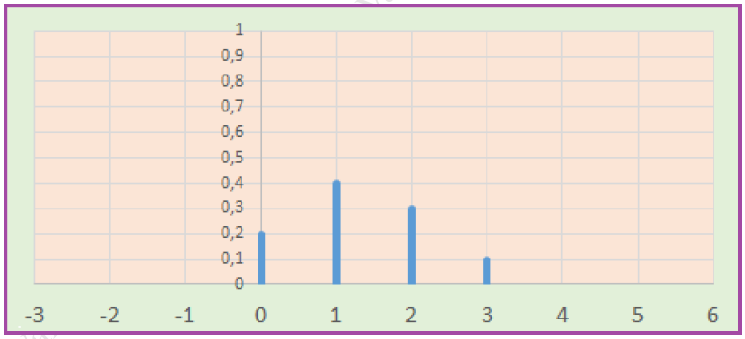
$$X = \text{gyermekek száma}$$

akkor a négy lehetséges érték mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az X valószínűségi változó eloszlását:

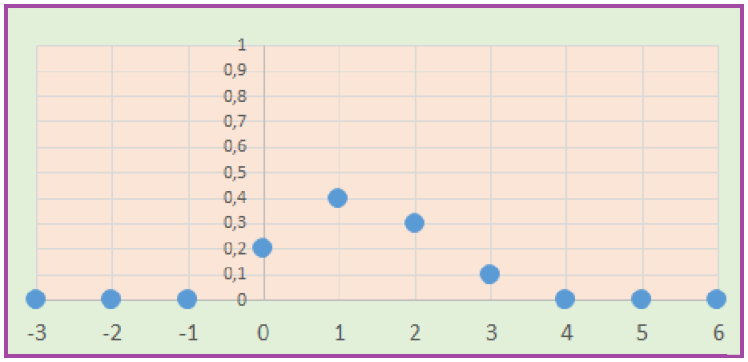
x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Gyermekek számának eloszlása*

(A négy darab valószínűség érték összege természetesen 1.)

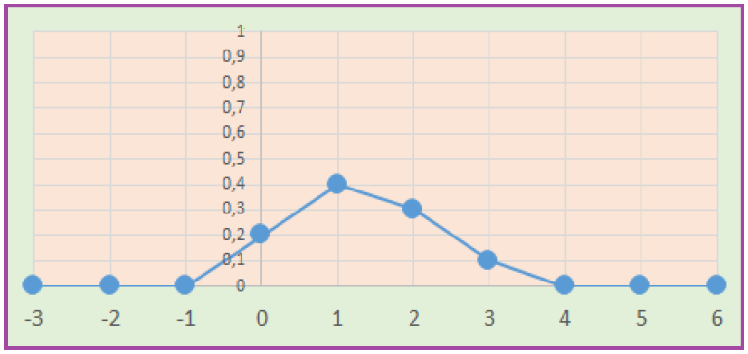


2. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény pácikákkal*

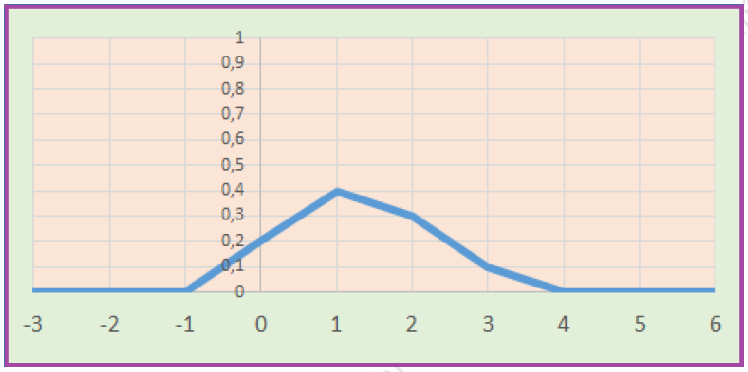


3. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény pontokkal*

Vetier András – Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók



4. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény összekötött pontokkal*



5. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény törött vonallal*

2. Példa: Szabályos dobókockával dobott szám. Szabályos dobókockával dobva a kapott szám az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok akármelyike lehet, mindegyik ugyanakkora valószínűséggel. A dobott szám eloszlása:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Táblázat: *Szabályos dobokockával dobott szám eloszlása*

Ebben a példában a lehetséges értékek mindegyike ugyanolyan valószínűségű.

Amikor a lehetséges értékek mindegyike ugyanolyan valószínűségű, akkor az eloszlást *(a lehetséges értékek halmazán vett) egyenletes eloszlás*nak nevezzük.

3. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész – Valószínűségi változók

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok összegének eloszlása*

4. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok szorzatának eloszlása*

Varga András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2.3. Eloszlás szemléltetése

2.4. Eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $(-\infty, x]$ intervallum valószínűségét $F(x)$ -szel jelöljük:

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(\;(-\infty, x]\;)$$

Az $F(x)$ függvény neve: **eloszlásfüggvény**. Az eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x -nél kisebb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$F(x) \;=\; \sum_{k:\, k \le x} p(k)$$

Ha a szóban forgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $F(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X érték kisebb vagy egyenlő mint x :

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(\; X \le x \;)$$

Nyilvánvaló, hogy minden eloszlásfüggvény monoton növekedő, vagyis $x_1 < x_2$ esetén

$$F(\; x_1 \;) \;\le\; F(\; x_2 \;)$$

Az eloszlásfüggvény megváltozása az a és b pontok között azt mutatja, hogy mennyi a valószínűsége annak a halmaznak, mely az a -nál nagyobb, de b -t még meg nem haladó számokból áll:

$$F(\; b \;) - F(\; a \;) = \mathrm{P}(\; a < X \le b \;)$$

hiszen

$$F(\,b\,) - F(\,a\,) \;=\; \left(\sum_{k:\,k\le b} p(k)\right) - \left(\sum_{k:\,k\le a} p(k)\right) \;=\; \left(\sum_{k:\,a<k\le b} p(k)\right) \;=\; \mathrm{P}(\,a < X \le b\,)$$

Megjegyzés: A fenti definícióban az eloszlásfüggvény értelmezési tartománya a véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges x értékek halmaza. Ilyen definíció mellett – mint alább példákat mutatunk rá – kényelmesen lehet az eloszlásfüggvényt táblázattal kezelni. Később, amikor majd folytonos eloszlásokról tanulunk, látni fogjuk, hogy folytonos eloszlásokkal kapcsolatban az eloszlásfüggvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes lesz. Az egységes kezelés érdekében egy diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényének definíciójában is megengedhetjük, hogy x tetszőleges valós szám legyen, hiszen az

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(X \le x)$$

képlet tetszőleges valós x esetén is értelmes. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez az általánosabb definíció azt eredményezi, hogy egy diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye olyan monoton növekedő "lépcsős" függvény,

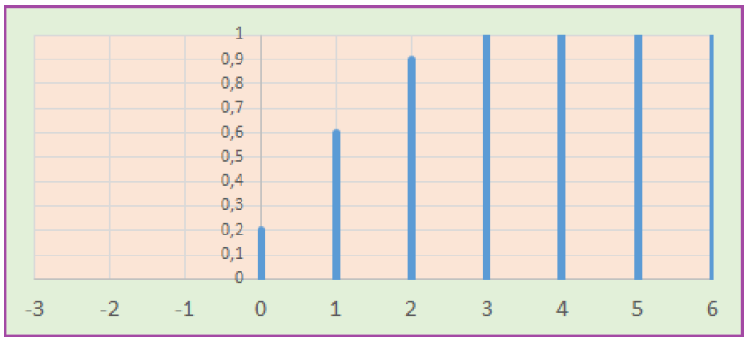
- melynek grafikonja vízszintes szakaszokból áll, és
- ahol a $p(x)$ súlyfüggvény pozitív értékkel értelmezett,
  ott az eloszlásfüggvénynek $p(x)$ nagyságú "ugrása" van.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény. Az előző alfejeztben elképzeltük, hogy véletlenszerűen választunk egy fiatal házaspárt, és az X valószínűségi változót a gyerekeik számával definiáljuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását ott megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy harmadik sorral, ami az eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0

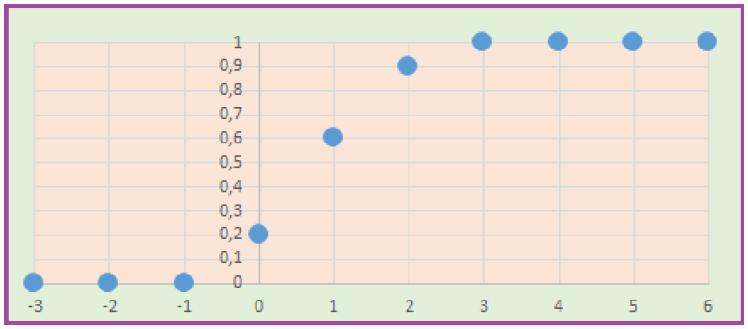
Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény és eloszlásfüggvény*

Vegyük észre, hogyan képződik a harmadik sor a másodikból: minden elem egyenlő a felette álló sorban tőle balra lévő és a felette lévő elemek összegével.

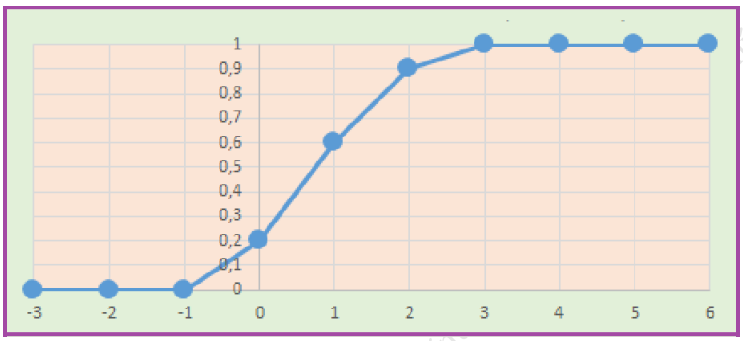


6. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (pálcikákkal)*

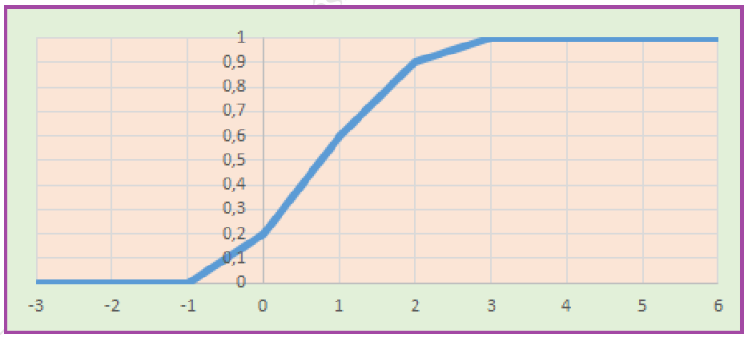
Vetier András – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségi és diszkrét valószínűségi változók



7. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (pontokkal)*

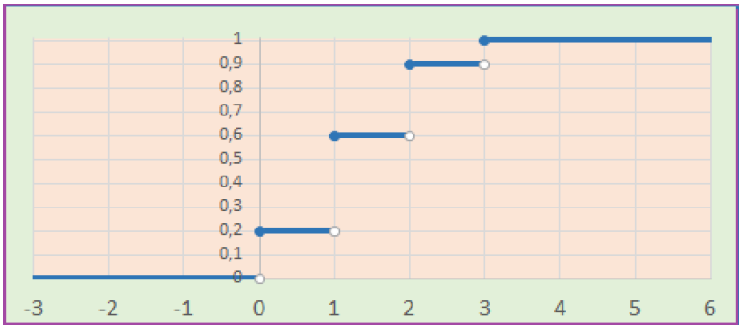


8. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (összekötött pontokkal)*



9. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (törött vonallal)*

Az eloszlásfüggvényt, mint minden x valós számra értelmezett "lépcsős" függvényt, a "Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény" című ábrán grafikonjával is megadjuk. Tessék ellenőrizni, hogy a függvény ugrásai a $0,\ 1,\ 2,\ 3$ helyeken vannak, és az ugrások nagyságai $0,2\ 0.4,\ 0.3,\ 0.1$, vagyis a súlyfüggvény értékei.



10. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (mint lépcsős függvény)*

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Táblázat: *Az összeg súlyfüggvénye és eloszlásfüggvénye*

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Táblázat: *A szorzat súlyfüggvénye és eloszlásfüggvénye*

Vetier András – Valószínűségszámítás — 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2.5. Jobboldali eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $[x, \infty)$ intervallum valószínűségét $T(x)$ -szel jelöljük:

$$T(x) \;=\; \mathrm{P}\,(\,[x, \infty)\,)$$

A $T(x)$ függvény neve: **jobboldali eloszlásfüggvény**. A jobboldali eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x -nél nagyobb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$T(x) \;=\; \sum_{k:\, k \geq x} p(k)$$

Amikor valamilyen probléma kapcsán a most bevezetett $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvényt is és a korábban bevezetett $F(x)$ eloszlásfüggvényt is használjuk, akkor az $F(x)$ -et **baloldali eloszlásfüggvény**nek is nevezzük.

Ha a szóban forgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $T(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X nagyobb vagy egyenlő mint x :

$$T(x) \;=\; \mathrm{P}(X \geq x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden jobboldali eloszlásfüggvény monoton csökkenő

$$T(x-1) \geq T(x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden x -re fennáll az alábbi egyszerű összefüggés:

$$F(x) + T(x) - p(x) \;=\; 1$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – jobboldali eloszlásfüggvény. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

Táblázat: *Gyermekek száma*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Folytonos valószínűségek és diszkrét valószínűségek

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok összege*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok szorzata*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

4. Példa: Hány piros? (Korábbi feladat folytatása.) Egy dobozban 50 golyó van. Közülük 30 piros, 20 fehér. Kiveszünk 12 golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz? Válasz: A

$$p(x) \;=\; \frac{\binom{30}{k}\binom{20}{n-k}}{\binom{50}{12}} \qquad (\; k = 0, 1, 2, \ldots 12 \;)$$

valószínűséget Excellel (két tizedes pontossággal) kiszámítottuk minden szóbajövő k -ra, és azokat táblázatba rendeztük. Összegzéssel kiszámoltuk a baloldali eloszlásfüggvény értékeit is, és az értékeket a táblázat harmadik sorába írtuk. A jobboldali eloszlásfüggvény értékeit is kiszámoltuk, és a negyedik sorba raktuk. Íme a táblázat:

Vetics Attila – Valószínűségszámítás I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.19	0.26	0.23	0.13	0.05	0.01	0.00
$F(x)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.13	0.32	0.58	0.81	0.94	0.99	1.00	1.00
$T(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.87	0.68	0.42	0.19	0.06	0.01	0.00

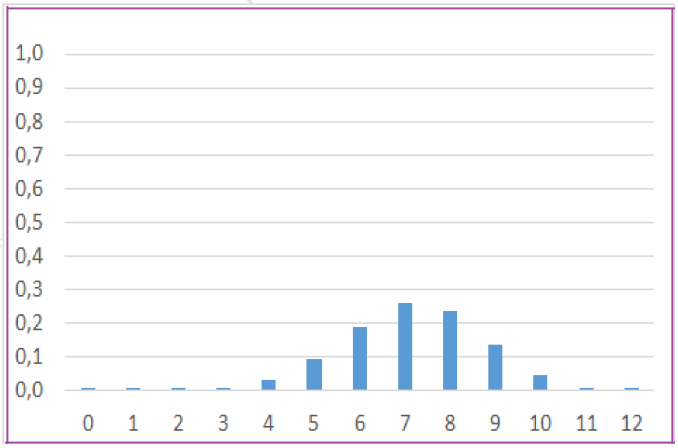
Táblázat: *Hány piros?*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

A táblázatból sok mindent ki lehet olvasni:

- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 piros lesz a a kihúzottak között: $F(5) = 0.13$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 5 piros lesz a a kihúzottak között: $T(5) = 0.96$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 5 de legfeljebb 7 piros lesz a kihúzottak között:

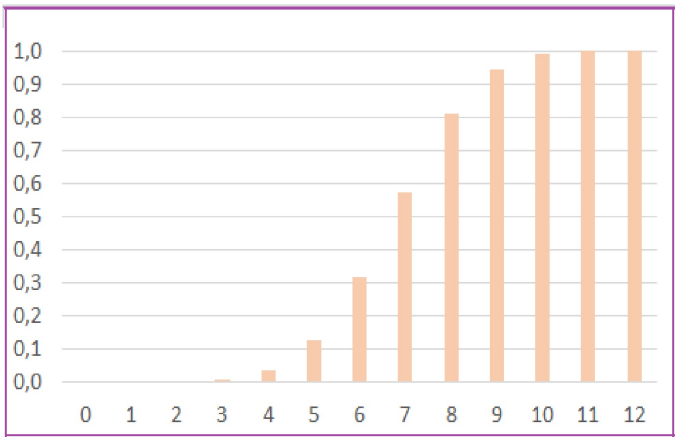
$$F(7) - F(4) = 0.58 - 0.04 = 0.54 \qquad \text{avagy} \qquad T(5) - T(8) = 0.96 - 0.42 = 0.54$$

A súlyfüggvény, a (baloldali) eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény grafikonjait ábrákon is megadjuk. Jó, ha az ember az ábrákról is tud olvasni.

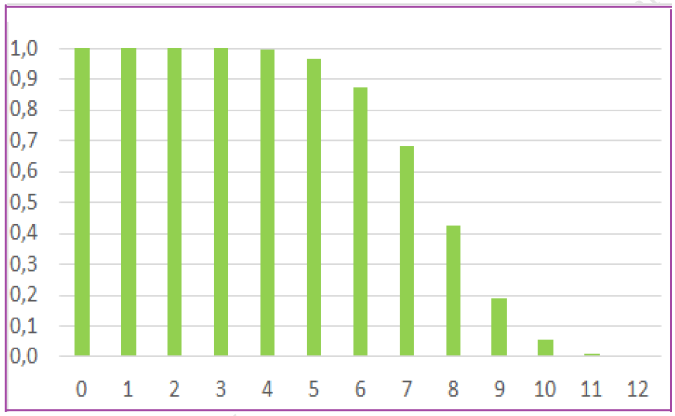


11. ábra. *Súlyfüggvény*

Vetier András – 1. rész: Valószínűségek és statisztikát valószínűségi változó



12. ábra. *(Baloldali) Eloszlásfüggvény*



13. ábra. *Jobboldali eloszlásfüggvény*

8. Példa: Tíz érmével hány fej? Valaki feldob 10 szabályos érmét. Vajon hány fej adódik az érméken?

Válasz: Mint korábban már meghatároztuk az x fej valószínűségét, és a $p(x)$ súlyfüggvény táblázatát is megadtuk.

$$\text{P}(\ x\ \text{ fej }) = \frac{\binom{10}{x}}{2^{10}} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 10)$$

Most a táblázatot az $F(x)$ eloszlásfüggvény és a $T(x\ )$ jobboldali eloszlásfüggvény soraival is kiegészítjuk:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001
$F(x)$	0.001	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1.000
$T(x)$	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623	0.377	0.172	0.055	0.011	0.001

Vetier András – Valószínűségszámítás – Valószínűségi változók

Táblázat: *Tíz érmével hány fej?*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

Ismét hangsúlyozzuk, hogy a tábálatból sok mindent ki lehet olvasni:

- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 fejet dobunk: $F(3) \;=\; 0.172$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 fejet dobunk: $T(3) \;=\; 0.945$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 de legfeljebb 6 fejet dobunk:

$$F(6) - F(2) \;=\; 0.828 - 0.055 \;=\; 0.773 \qquad \text{avagy} \qquad T(3) - T(7) \;=\; 0.945 - 0.172 \;=\; 0.773$$

2.6. Medián

Adott diszkrét valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az x számot **mediánn**ak nevezzük, ha úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a $(-\infty; x]$ intervallum is és a $[x; +\infty)$ intervallum is legalább $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}\,(\,(-\infty; x]\,) \;\geq\; \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}\,(\,[x; +\infty)\,) \;\geq\; \frac{1}{2}$$

azaz

$$F(x) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(x) \geq \frac{1}{2}$$

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy a medián nem egyértelmű: az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok halmazán az egyenletes eloszlás mediánja minden 3 és 4 közötti szám. Viszont az $1, 2, 3, 4, 5$ számok halmazán vett egyenletes eloszlásnak csak egyetlen mediánja van.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – medián. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 1 . Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény táblázatából kiolvasható:

x	0	**1**	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – medián*

Vetier András – Valószínűségszámítás – Diszkrét Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Az

$$F(1) \;=\; 0.6 \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(1) \;=\; 0.8 \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk, hogy a medián 1 .

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 7 . Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok összege – medián*

táblázatából kiolvasható

$$F(7) \;=\; \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(7) \;=\; \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 10 . Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	1	2	3	4	5	6	8	9	**10**	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok szorzata – medián*

táblázatából kiolvasható

$$F(10) \;=\; \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(10) \;=\; \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

Vetter András – Valószínűségszámítás gyakorló rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

2.7. Kétdimenziós valószínűségi változó

Ha egy jelenséggel kapcsolatban két valószínűségi változóval van dolgunk – legyenek ezek X és Y –, akkor ezekből, mint koordinátákból összerakhatunk egy (X, Y) párt. (X, Y) -t **kétdimenziós valószínűségi változó**nak hívjuk.

1. Példa: Fiatal házaspárok – gyerekek és nagyszülők. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyerekeinek számát és az élő nagyszülők számát vizsgálták. A gyerekek száma $0, 1, 2, 3$ lehet, a nagyszülők száma pedig $0, 1, 2, 3, 4$. Ez összesen 4 -szer 5 , azaz 20 lehetőséget ad, melyeket egy táblázatba célszerű elrendezni. A tapasztalatból tudhatjuk a 20 lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

nagyszülők száma					
4	6.0	12.0	9.0	3.0	
3	8.0	16.0	12.0	4.0	
2	3.0	6.0	4.5	1.5	
1	2.0	4.0	3.0	1.0	
0	1.0	2.0	1.5	0.5	
	0	1	2	3	gyerekek száma

Táblázat: *Gyermekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás százalékokban*
(A százalék értékek összege 100)

Ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{gyerekek száma}, \quad Y = \text{nagyszülők száma}$$

akkor az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó 20 lehetséges értéke mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az (X, Y) **kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásá**t:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyermekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*
(A valószínűségek összege 1)

2. Példa: Hány piros, hány kék? – ismét. Az 1. fejezet 5. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – gyakorlat – Valószínűségek, diszkrét valószínűségi változók

Akkor ott kiszámoltuk annak a valószínűségét, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz. A válasz ez volt:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x -re és y -ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \le x \le 8$$

$$0 \le y \le 8$$

$$0 \le 8 - x - y \le 8$$

Ezekből a valószínűségekből az alábbi táblázatot raktuk ott össze:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.031	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Hány piros, hány kék? – kétdimenziós eloszlás*

Vegyük észre, hogy a fenti képlet, illetve ez a táblázat nem más, mint az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása matematikai képlettel, illetve táblázattal megadva..

Kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy $Y < 2X$, azaz a kihúzott kékek száma kevesebb mint a kihúzott pirosak számának a kétszerese?

Válasz: Ha előszedjük középiskolás tudásunkat, és meggondoljuk, hogy az $y < 2x$ egyenlőtlenség milyen (x, y) -okra teljesül, akkor könnyen ellenőrizhetjük, hogy azokra az (x, y) -okra teljesül, amilyen helyekre 1 -eket tettünk az alábbi táblázatban:

y										
8	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
7	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
6	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
5	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
4	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
3	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
2	. . 0 . .	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
1	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
0	. . 0 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	. . 1 . .	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az $y < 2x$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza*

A kérdezett valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk azokat a valószínűségeket az (X, Y) eloszlásának a táblázatában, melyek az 1 -eknek megfelelő helyen vannak. Ezt az összeadást az Excelben a `SUMPRODUCT` (magyarul: `SZORZATÖSSZEG`) utasítással nagyon egyszerű végrehajtani.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész – Valószínűségi diszkrét valószínűségi változók

2.8. Kétdimenziós eloszlás és súlyfüggvény

Ha egy kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.), akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a **kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásá**t.

Ha (mindenféle valószínűségi változóra való tekintet nélkül) egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen síkbeli halmaz (x, y) elemeihez nemnegatív $p(x, y)$ számokat rendelünk úgy, hogy azok összege 1 :

$$\sum_{(x,y)} p(x, y) \;=\; 1$$

akkor azt mondjuk, hogy megadunk egy **kétdimenziós (más szóval: síkbeli) valószínűségi eloszlás**t, más kifejezéssel kétdimenziós (más szóval: síkbeli) **normált eloszlás**t. A $p(x, y)$ függvényt **súlyfüggvény**nek (vagy **valószínűségi függvény**nek) nevezzük.

Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó esetén $p(x, y)$ annak a valószínűségét adja meg, hogy a véletlen (X, Y) érték (x, y) -szel egyenlő, vagyis a véletlen X érték x -szel egyenlő, és a véletlen Y érték pedig y -nal egyenlő:

$$p(x, y) \;=\; \mathrm{P}(\; X = x, Y = y \;)$$

2.9. Módusz

Egy diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei közül a legvalószínűbbet a valószínűségi változó **módusz**ának nevezzük. Ha több ilyen érték is van, akkor több módusz is van. Ha egy eloszlást csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor azt az x értéket, mely(ek)re $p(x)$ maximális, **az eloszlás móduszá(i)**nak nevezzük.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – módusz. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 1. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolvashatjuk:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – módusz*

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 7 . Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok összege – módusz*

Vizier András – Valószínűségszámítás – Jegyzet: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak két módusza van: a 6 és a 12. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok szorzata – módusz*

2.10. Valószínűségek megadása súlyokkal

Ócska a pénztárcám. Egyrészt kevés benne a papírpénz (ez talán nem a pénztárca hibája), másrészt – és most erre kell odafigyelni – az aprópénz kihullik belőle, és a táskám alját nyomja. Kis unokám nagyon élvezi, ha ott turkálhat. Véletlenszerűen választ és kivesz egy érmét, aztán tanulmányozza, nézegeti. Vagy visszateszi, vagy nem. Aztán ugyanezt teszi megint, megint, és így tovább. Tegyük fel, hogy a választáskor egy-egy érme esélye arányos az érme súlyával. Ez a feltevés vitatható, de eléggé elfogadhatónak tűnik. Hogy igazából mi a valószínűség legelfogadhatóbb numerikus értéke, az kis unokámat sem érdekli, és most itt minket sem.

Eléggé érzékeny mérleggel megmértem az érméket. A tizedgrammnyi pontossággal mért tömegek és – az elfogadott arányossági elv szerinti – valószínűségek így festenek:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5	42.5	tömegek összege
vsz	**0.10**	**0.14**	**0.17**	**0.18**	**0.19**	**0.22**	1.00	vsz-ek összege

Táblázat: *Tömegek és valószínűségek*

Minden egyes érme valószínűségét úgy számoltuk ki, hogy a tömegét elosztottuk az érmék tömegeinek összegével. Ez az egyszerű művelet az arányokat megtartja, és garantálja azt, hogy a valószínűségek összege 1 legyen.

Más elvek szerint is felvehetjük a valószínűségeket. Lehet, hogy valakinek az a hipotézis tűnik elfogadhatóbbnak, hogy az érmék valószínűségei az átmérőikkel arányosak. Másvalaki azt gondolhatja, hogy – az érméket korongoknak tekintve – a korongok területei a meghatározóak a valószínűségeik szempontjából, és ezért a valószínűségeket a területekkel arányosnak tekinti. Tolómércével nem volt nehéz megmérni az érmék átmérőit és kiszámolni a korongok területét, majd pedig ezekből az adatokból a valószínűségeket meghatározni. Íme ezeknek az adatoknak a táblázata:

Szabó Szabolcs – Valószínűségszámítás – 1. rész: valószínűségi kísérletek, eseményalgebrák, valószínűségi változók

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
átmérő (mm)	21.2	24.5	26.3	27.5	23.8	28.3	151.6	átmérők összege
vsz	**0.14**	**0.16**	**0.17**	**0.18**	**0.16**	**0.19**	1.00	vsz-ek összege

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
terület (mm^2)	353.0	471.4	543.3	594.0	444.9	629.0	3035.5	területek összege
vsz	**0.12**	**0.15**	**0.18**	**0.19**	**0.15**	**0.21**	1.00	vsz-ek összege

Táblázat: *Átmérők és valószínűségek – Területek és valószínűségek*

Kicsit furcsa módon, de mégis így van: ha – mondjuk – azok az átmérők azok az adatok, melyekkel arányosan vesszük fel a valószínűségeket, akkor is **súlyok**nak nevezzük ezeket az adatokat. Tehát ilyenkor az átmérők adják a súlyokat. Ha pedig a korongok területeivel arányosan vesszük fel a valószínűségeket, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségek felvételéhez a korongok területei **adják a súlyokat**. Figyelem! A súly szó ilyen értelmű használata nem tévesztendő össze a valószínűségek eloszlását jellemző, korábban definiált súlyfüggvény fogalmával.

Mivel a 100 forintos érme súlyosabb, mint az 50 -es, de az 50 -es átmérője nagyobb, mint a 100 forintosé, a valószínűségek szempontjából nem mindegy, hogy miket tekintünk súlyoknak. Ha a valószínűségeket az érmék tömege alapján vesszük fel, akkor a 100 forintos érme valószínűbb, mint az 50 -es. Ha viszont az érmék átmérője vagy korongjuk területe alapján, akkor az 50 forintos érme valószínűbb, mint a 100 forintos.

Feladat: Érmét kotorászok a táska aljából. Táskám aljában 5 darab 50 forintos, 1 darab 100 forintos, 2 darab 200 forintos érme lapul. Az érmék tömegei:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Az érmék tömegei*

Feltételezzük, hogy az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 forintost vagy 200 forintost húzunk?

Megoldás:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Diszk.: Diszkrét és diszkrét valószínűségi változók

érme	**5 darab 50 Ftos**	**1 darab 100 Ftos**	**2 darab 200 Ft-os**		
	5 x 7.7 =	1 x 8.0 =	2 x 9.5 =		
tömeg (g)	38.3	8.0	19	65.3	súlyok összege
vsz	**0.59**	**0.12**	**0.29**	1.00	vsz-ek öszege

Táblázat: *Tömegek és valószínűségek*

A kérdezett valószínűség: $\mathbf{0.12} + \mathbf{0.29} = \mathbf{0.41}$, amit természetesen úgy is megkaphattunk volna, hogy a $\mathbf{0.59}$ valószínűséget 1 -ből kivonjuk.

2.11. Konstans értékű valószínűségi változók

A valószínűségi változók közé soroljuk azokat a véletlentől függő számokat is, amelyek úgy függenek a véletlentől, hogy nem függenek tőle. Ha egy dobókocka minden oldalára a 6 -os számot írjuk, akkor ezzel a dobókockával csak 6 -ost lehet dobni. Egy ilyen "konstans értékű" valószínűségi változó

- súlyfüggvénye a szóban forgó konstans helyen 1 -gyel egyenlő,
- az eloszlásfüggvénye a szóban forgó konstans előtt 0 -val, utána 1 -gyel egyenlő,
- az eloszlásáról pedig azt mondjuk, hogy a szóban forgó helyre *koncentrálódik*.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

3. Folytonos egyenletes eloszlás

Bár a könyvnek az első részében diszkrét valószínűségi változókkal foglalkozunk, ebben a fejezetben folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni. Egyelőre csak a legegyszerűbb folytonos problémákat ismerjük meg. Bonyolultabb folytonos problémákat a könyv későbbi részeiben fogunk tárgyalni.

3.1. Folytonos egyenletes eloszlás

Egyenletes eloszlás intervallumon: Tekintsünk egy véges, pozitív hosszúságú I intervallumot. Tegyük fel, hogy valaki az intervallumban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az I intervallum pontjai, azaz az eseménytér az I intervallum. Ha az I intervallum bármely részintervalluma esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részintervallumba esik

$$\textit{részintervallum valószínűsége} = \frac{\textit{részintervallum hossza}}{\textit{az I intervallum hossza}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az I intervallumon. Ilyenkor egy részintervallum valószínűsége csak a részintervallum hosszától függ, de attól, hogy maga a részintervallum, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részintervallumot eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részintervallum valószínűsége nem változik meg. Ez e két tény indoklja az "egyenletes eloszlás" elnevezést.

Egyenletes eloszlás síkbeli halmazon: Tekintsünk egy véges, pozitív területű S halmazt a síkon. Tegyük fel, hogy valaki a halmazban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az S halmaz pontjai, azaz az eseménytér az S halmaz. Ha az S halmaz bármely részhalmaza esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részhalmazba esik

$$\textit{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\textit{részhalmaz területe}}{\textit{az S halmaz területe}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az S halmazon. Ilyenkor egy részhalmaz valószínűsége csak a részhalmaz területétől függ, de attól, hogy maga a részhalmaz, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részhalmazt eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részhalmaz valószínűsége nem változik meg.

Egyenletes eloszlás térbeli halmazon: Anélkül, hogy részleteznénk, megemlítjük, hogy egy véges, pozitív térfogatú S térrészen vett egyenletes eloszlás esetén:

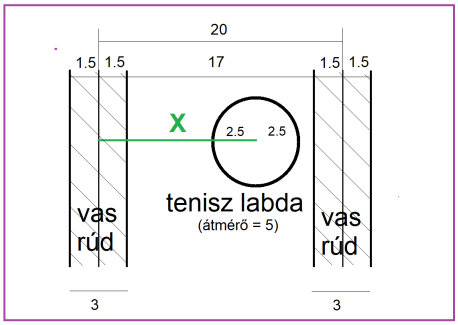
$$\textit{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\textit{részhalmaz térfogata}}{\textit{az S halmaz térfogata}}$$

Tekinteve, hogy a hosszúság, a terület, a térfogat számítása általában a geometria körébe tartozik, az ilyen valószínűségszámítási problémákat **geometriai problémák**nak is nevezzük.

Egyenletes eloszlású, független koordináták. Megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy ha egy síkbeli, illetve térbeli pont koordinátáit egymástól függetlenül választjuk meg egy-egy intervallumban, akkor a pont egyenletes eloszlású lesz az intervallumok által (direktszorzatként) meghatározott téglalapban, illetve téglatestben.

1. Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a kerítésünkön? Kerítésünk 3 cm átmérőjű függőleges, hosszú rudakból áll. A rudak 20 cm periódussal ismétlődnek, a köztük lévő rések 17 cm-esek. A kerítésnek háttal állva, néhány méterről, merőlegesen nekidobok a kerítésnek egy 5 cm átmérőjű teniszlabdát. Mi a valószínűsége, hogy a teniszlabda a vasrudak érintése nélkül átrepül közöttük?

Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné az oszlopok síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága véletlentől függ. Jelöljük a cm-ekben vett távolságot X -szel. X lehetséges értékei a $[\,0\,,\,20\,]$ intervallumot teszik ki, és X nyilván egyenletes eloszlást követ ezen az intervallumon.



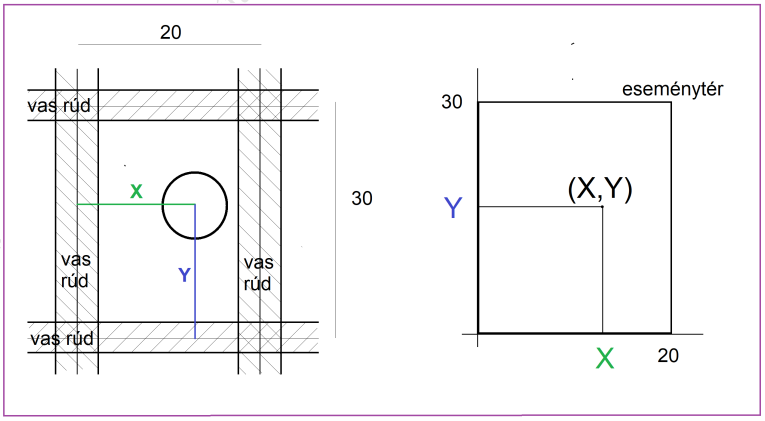
14. ábra. *Az X valószínűségi változó értelmezése*

Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy a $4 < X < 16$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. A $(\,4\,,\,16\,)$ intervallum hossza 12. Így a keresett valószínűség:

$$\text{P(érintés nélkül átrepül)} \;=\; \frac{12}{20} \;=\; 0.6$$

2. Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a szomszéd kerítésén? A szomszéd kerítése ugyanilyen függőleges rudakbkól áll, mint a miénk, de az ő kerítésében vízszintes rudak is vannak 30 cm-es periódussal. Mi a valószínűsége, hogy a szomszéd kerítésén átrepül a teniszlabda?

Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné a kerítés síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága legyen X, az alatta lévő vízszintes rúd középvonalától való távolsága legyen Y .



15. ábra. *Az X és az Y valószínűségi változók értelmezése*

Az (X,Y) lehetséges értékei a $[\,0\,,\,20\,]$ és a $[\,0\,,\,30\,]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és $(\,X,Y\,)$ nyilván egyenletes eloszlást követ. Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy a $4 < X < 16$, $4 < Y < 26$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis (X,Y) egy kisebb téglalapban legyen. Ennek a téglalapnak a területe $12 \cdot 22$, ezért:

$$\text{P(érintés nélkül átrepül)} \;=\; \frac{12 \cdot 22}{600} \;=\; 0.44$$

Vetier András – Egész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Megjegyzés: X és Y függetlensége miatt így is okoskodhattunk volna:

$$\text{P(érintés nélkül átrepül)} =$$

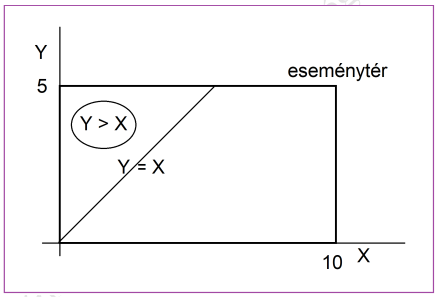
$$= \text{P}(\ 4 < X < 16 \text{ és } 4 < Y < 26\ ) = \text{P}(\ 4 < X < 16\ ) \cdot \text{P}(\ 4 < Y < 26\ ) = \frac{12}{20} \cdot \frac{22}{30} = 0.44$$

3. Feladat: Utazás busszal, metróval. Reggelente busszal és metróval megyek az egyetemre, és átszállás közben még a reggelimet is megveszem. A busz 10 percenként jár, a metró 5 percenként. Mivel az induláskor nem taktikázok, a megállóban a buszra való X várakozási időm egyenletes eloszlású 0 és 10 perc között. Kiszámíthatatlan, hogy a reggeli vásárlásom hogyan alakul, ezért a metró állomáson a várakozással eltöltött Y időm egyenletes eloszlású 0 és 5 perc között, akármennyi is az X értéke .

- Mi a valószínűsége, hogy a metróra többet kell várnom, mint a buszra?
- Mi a valószínűsége, hogy a várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc?

Megoldás:

- Az (X, Y) lehetséges értékei a $[\ 0\ ,\ 10\ ]$ és a $[\ 0\ ,\ 5\ ]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és ezen a téglalapon (X, Y) egyenletes eloszlást követ. Az $Y > X$ esemény ebben a téglalapban egy háromszöget jelöl ki, melynek területe a téglalap területének a negyede.

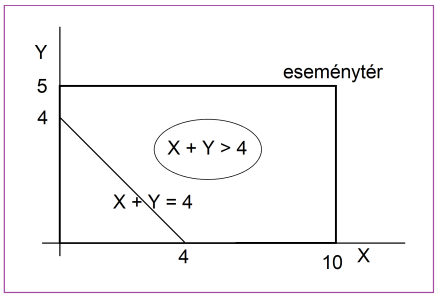


16. ábra. *Az $Y > X$ esemény a téglalapban egy háromszöget jelöl ki*

Ezért

$$\text{P(A metróra többet kell várnom, mint a buszra)} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Az $X + Y > 4$ esemény a téglalapban egy ötszöget határoz meg, melynek komplementere egy derékszögű háromszög.



17. ábra. *Az $X + Y > 4$ esemény a téglalapban egy ötszöget jelöl ki*

Vetítési utasítás – Valószínűségszámítás és statisztika – Diszkrét valószínűségi változók

A derékszögű háromszög területe 8 terület egység, ezért az ötszögé $50 - 8 = 42$ terület egység. A keresett valószínűség:

$$\text{P(A várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc)} = \frac{42}{50} = 0.84$$

4. Feladat: Randevú. Jancsi és Juliska déli 12 óra és 1 óra között randevúznak. Azonban a randevú menetébe és sikerébe beleszól a véletlen is: az 1 órás időtartam alatt egymástól független pillanatban érkeznek, mindketten egyenletes eloszlás szerint, és – megbeszélésük szerint – 20 percet várakoznak, aztán elmennek. Így aztán vagy találkoznak, vagy nem. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

Megoldás folytonos modellel: Jancsi érkezési pillanatát jelöljük X -szel, Juliskáét Y -nal. Mivel X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak 0 és 1 között, az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott négyzetben. Nyilvánvaló, hogy a találkozó létrejöttének feltétele, hogy az

$$Y \geq X - 1/3 \quad , \quad Y \leq X + 1/3$$

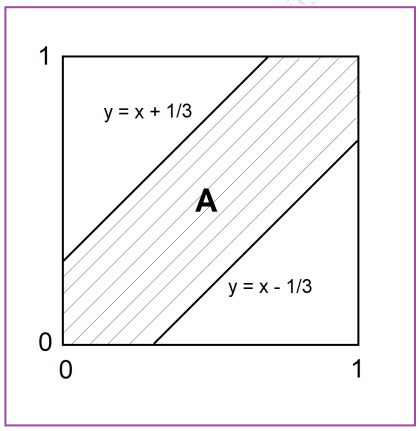
egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az (X, Y) pontnak az

$$y = x - 1/3$$

egyenletű egyenes és az

$$y = x + 1/3$$

egyenletű egyenes közötti A tartományban kell . Ez a tartomány egy hatszög.



18. ábra. *A kedvező kimenetelek halmaza az A -val jelölt hatszög*

A hatszög komplementere a négyzetben két derékszögű háromszög, melyeknek befogói $2/3$ hosszúak. A két háromszögből egy kis négyzetet lehet összerakni, melynek oldalhossza $2/3$. Ezért a két háromszög együttes területe $4/9$, hatszögé pedig $1 - 4/9 = 5/9$. A keresett valószínűség egyenlő a hatszög területe osztva a négyzet területével (ami 1), ezért:

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{5}{9} = 0.555\,6 = 0.57$$

Közelítés diszkrét modellel: Az előző megoldásban – helyesen – folytonos modellt használtunk, most – kissé pontatlan, de tanulságos – diszkrét modellt adunk a problémára: az időt egész percekben fogjuk mérni. Ilyen szemlélet mellett a fiatalok érkezési pillanatai (jelöljük ezeket most is X -szel és Y -nal) egyenletes eloszlást követnek az $\{1, 2, \ldots, 59, 60\}$ halmazon, és az (X, Y) számpár egyenletes eloszlást követ a $3\,600$ elemből álló halmazon, melyet az alábbi ábrán szemléltetünk:

Szántai András – Valószínűségszámítás és diszkrét valószínűségszámítás

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	55	56	57	58	59	60	X
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
55	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
56	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
57	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
58	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
59	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
60	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
Y																

Táblázat: *Az összes lehetséges kimenetel*

A találkozó létrejöttének feltétele most az, hogy az

$$Y \geq X - 20 \quad , \quad Y \leq X + 20$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az (X, Y) pontnak az az alábbi ábrán $*$ -gal jelölt pontok halmazába kell esni.

	1	.	.	.	20	21	.	.	.	40	41	.	.	.	60	X
1	*	*	*	*	*	*										
.	*	*	*	*	*	*	*									
.	*	*	*	*	*	*	*	*								
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*							
20	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*						
21	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					
.		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				
.			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
.				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
40					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
41						*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.							*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.								*	*	*	*	*	*	*	*	
.									*	*	*	*	*	*	*	
60										*	*	*	*	*	*	
Y																

Táblázat: *A kedvező kimenetelek*

Egyszerű elemi feladat megszámolni, hogy hány $*$ található ezen az ábrán: 2040 . Tehát a találkozó valószínűségére – ezzel a modellel – az alábbi eredményt kapjuk:

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{2\,040}{3\,600} = 0.566\,7 = 0.57$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Az eredményt összevetve a pontos megoldás eredményével látjuk, hogy a diszkrét modell kb. 0.01 -dal nagyobb valószínűséget ad, mint a folytonos modell. Ez a hiba nem nagy, de jelzi, hogy oda kell figyelni arra, hogy folytonos problémát folytonos modellel kezeljünk.

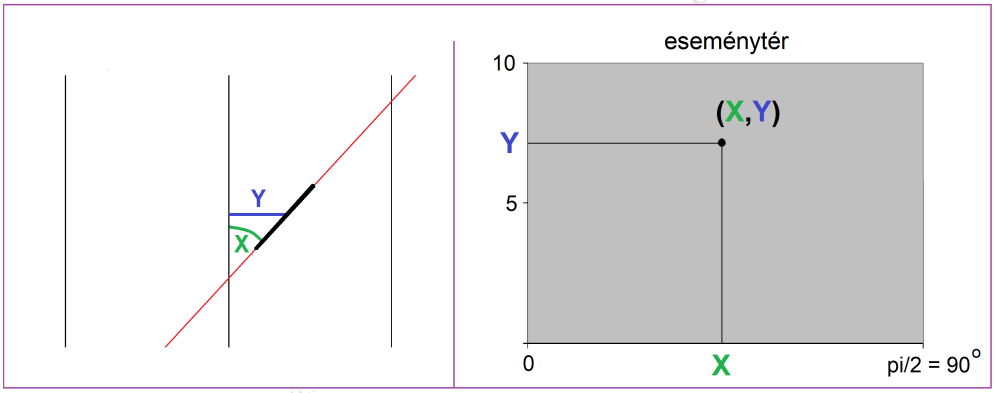
Megoldás aprólékosabb diszkrét modellel: Ha percek helyett másodpercekkel dolgozunk a modellben, akkor az összes esetek száma $3\,600$ -nak a négyzete, ami $12\,960\,000$, a kedvező esetek számára pedig $7\,202\,400$ adódik, amiből a

$$\mathrm{P}(\text{ találkoznak }) = \frac{7\,202\,400}{12\,960\,000} = 0.555\,7$$

valószínűséget kapjuk. Ezt az eredményt összevetve a folytonos megoldás eredményével látjuk, hogy ez a diszkrét modell már csak kb. 0.001 -del nagyobb valószínűséget ad mint a folytonos modell.

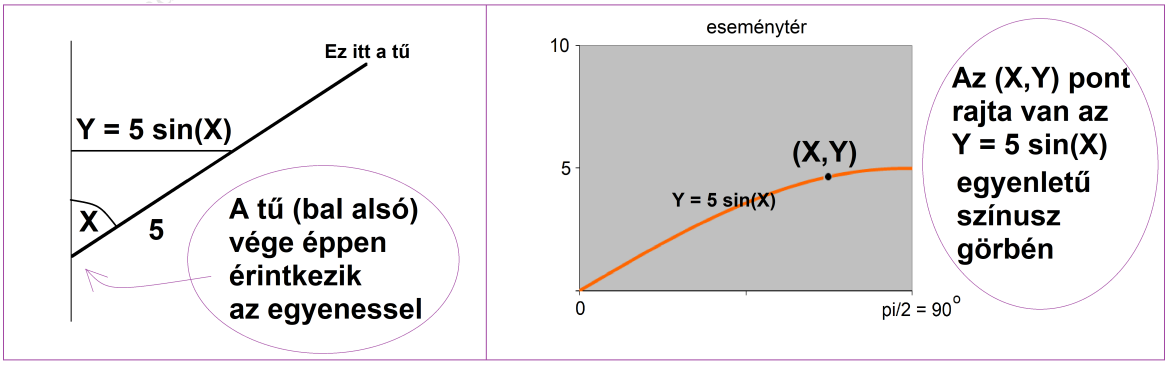
5. Feladat: Buffon féle tű probléma. Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra (vagy a földre) egymástól 20 cm távolságra. Egy 10 cm hosszú tűt elég magasról hetykén leejtünk. A tű vagy metszi valamelyik egyenest, vagy egyiket sem metszi. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Megoldás: Jelöljük X -szel a tű által meghatározott egyenesnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt hegyes szögét radiánban mérve, Y -nal pedig a tű középpontjának a hozzá legközelebb lévő egyenestől való távolságát. Nyilván $0 \le X \le \pi/2$, illetve $0 \le Y \le 10$. X és Y függetlensége miatt (X,Y) egyenletes eloszlású a $[0\,;\,\pi/2]$, illetve $[0\,;\,10]$ intervallumok által meghatározott 5π területű T téglalapon:



19. ábra. *A tű minden helyzete a téglalap egyik pontjának felel meg*

Egyszerű trigonometriai probléma annak ellenőrzése, hogy ha a tű vége éppen érintkezik valamelyik egyenessel, akkor $Y = 5\sin(X)$, azaz az (X,Y) pont az $y = 5\sin(x)$ egyenletű színusz görbén van:



20. ábra. *A tű vége éppen érintkezik valamelyik egyenessel*

Ezért metszés pontosan akkor áll fenn, ha $Y < 5\sin(X)$, azaz az (X, Y) pont az

$$y = 5\sin(x)$$

egyenletű görbe alatti A tarományba esik. Ezért a keresett valószínűség egyenlő ennek az A tartománynak a területe osztva a téglalap területével:

$$\text{P(metszés)} = \frac{A \text{ területe}}{T \text{ területe}} = \frac{\int_0^{\pi/2} 5\sin(x)\,dx}{5\pi} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

3.2. RAND utasítás

Az Excelben a 0 és 1 közötti értékeket felvevő

`RAND(), magyarul VÉL()`

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ a $[0; 1]$ intervallumon. Az üres zárójelpár nem elírás: az Excel formai szabályai szerint a `RAND` mögé oda kell írni a `()` üres zárójelpárt. A `RAND` utasítással generált véletlen számokat **random szám**oknak hívjuk. Ha valaki a `RAND.BETWEEN` utasítással generált véletlen számokat is **random szám**oknak hívja, akkor illik utalni rá, hogy 0 és 1 közötti, vagy egész értékű-e a véletlen szám.

Jelölés: Könyvünkben a `RAND` utasítás által előállított véletlen szám jelölésére RND -t írunk. Több véletlen szám használata esetén azokat – a matematika szokásai szerint – indexezéssel különböztetjük meg egymástól: az RND_1 és RND_2 jelölésekben az indexek arra utalnak, hogy két különböző véletlen számról van szó. Az Excel nem használ indexeket, az Excelben `RAND` utasítás többszöri alkalmazása különböző, független véletlen számokat jelentenek. Például a

```
2*RAND() + 3*RAND()
```

Excel utasításra könyvünkben az indexeket is tartalmazó

$$2\,\text{RND}_1 + 3\,\text{RND}_2$$

képlettel utalunk. Ha indexek nélkül

$$2\,\text{RND} + 3\,\text{RND}$$

írnánk, akkor matematikai

$$2\,\text{RND} + 3\,\text{RND} = 5\,\text{RND}$$

összevonás miatt a

```
2*RAND() + 3*RAND()
```

Excel utasítást helytelenül összekeverhetnénk a

```
5*RAND()
```

utasítással.

Vetter András – Valószínűségszámítás – Az egyszerű valószínűségi kísérlet valószínűségi változók

3.3. Random számok tulajdonságai

A `RAND` utasítást az Excelben úgy találták ki, hogy a random számokra igazak az alábbiak:

1. Akármilyen x szám esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám pontosan egyenlő x -szel, nulla:

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{RND}\ =\ x\ )\ =\ 0$$

2. $0\ \leq\ a\ \leq\ b\ \leq\ 1$ esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám az a és b által meghatározott intervallumba esik, egyenlő az intervallum hosszával. Az, hogy az intervallum zárt, nyitott vagy félig zárt, félig nyitott, közömbös:

$$\mathrm{P}(\ a \leq \mathrm{RND} \leq b\ )\ =\ b-a$$
$$\mathrm{P}(\ a \leq \mathrm{RND} < b\ )\ =\ b-a$$
$$\mathrm{P}(\ a < \mathrm{RND} \leq b\ )\ =\ b-a$$
$$\mathrm{P}(\ a < \mathrm{RND} < b\ )\ =\ b-a$$

3. Bármely x számra, ami 0 és 1 között van, igaz, hogy

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{RND} \leq x\ )\ =\ \mathrm{P}(\ \mathrm{RND} < x\ )\ =\ x$$

4. A random számok fontos tulajdonsága, hogy ha két random számból, mint koordinátákból egy számpárt rakunk össze, akkor az $(\ \mathrm{RND}_1\ ,\ \mathrm{RND}_2\ )$ pont egyenletes eloszlást követ az egységnyi oldalú négyzetben. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a négyzetnek akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\ (\ (\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2) \in A\ )\ =\ A \text{ területe}$$

5. Ha három random számból, mint koordinátákból egy $(\ \mathrm{RND}_1\ , \mathrm{RND}_2\ , \mathrm{RND}_3\ )$ pontot rakunk össze a 3 -dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ a tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2, \mathrm{RND}_3) \in A\ )\ =\ \text{az } A \text{ halmaz térfogata}$$

6. Ha n random számból, mint koordinátákból egy $(\ \mathrm{RND}_1\ , \mathrm{RND}_2\ , \ldots , \mathrm{RND}_n\ )$ pontot rakunk össze az n -dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ az n -dimenziós tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A az n -dimenziós kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\ (\ (\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2, \ldots , \mathrm{RND}_n) \in A\ )\ =\ \text{az } A \text{ halmaz } n\text{-dimenziós térfogata}$$

7. Megjegyezzük, hogy azok a tulajdonságok, melyeket az előző három pontban fogalmaztunk meg, igazából azt jelentik, hogy ha több random számot állítunk elő Excellel, akkor azoknak egymáshoz semmi közük sincsen, azok egymástól függetlenek. A függetlenség matematikai definícióját később tanuljuk.

Vetró – Valószínűségszámítás – A tananyag: Valószínűségi és diszkrét valószínűségi változók

3.4. Lineáris transzformációk

1. **Nyújtás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1-nél nagyobb a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $a\,\mathrm{RND}$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $a\,RND$ egyenletes eloszlást követ a $[0; a]$ intervallumon.

2. **Zsugorítás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél kisebb pozitív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $a\,\mathrm{RND}$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $a\,RND$ *egyenletes eloszlást követ a* $[0;a]$ *intervallumon.*

3. **Eltolás**
   Ha az RND random számhoz
   hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(RND+b)$ *egyenletes eloszlást követ a* $[b;b+1]$ *intervallumon.*

4. **Nyújtás és eltolás (vagy: zsugorítás és eltolás)**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy pozitív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ *egyenletes eloszlást követ a* $[b;a+b]$ *intervallumon.*

5. **Tükrözés az origóra**
   Ha az RND random számnak
   vesszük az ellentettjét (vagyis megszorozzunk (-1) -gyel),
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(-\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(-RND)$ *egyenletes eloszlást követ a* $[-1;0]$ *intervallumon.*

6. **Tükrözés és nyújtás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ *egyenletes eloszlást követ az* $[a;0]$ *intervallumon* $(a<0)$.

7. **Tükrözés és zsugorítás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy egy 1 -nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ *egyenletes eloszlást követ az* $[a;0]$ *intervallumon* $(a<0)$.

8. **Tükrözés, nyújtás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ *egyenletes eloszlást követ a* $[a+b;b]$ *intervallumon.*

9. **Tükrözés, zsugorítás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ *egyenletes eloszlást követ a* $[a+b;b]$ *intervallumon* $(a<0)$.

Szántai András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

4. További fogalmak és szabályok

4.1. További fogalmak eseményekre

Teljes eseményrendszer: Véges vagy végtelen sok egymást kizáró eseményeknek egy olyan rendszere, hogy ezeknek az eseményeknek az úniója a biztos esemény. Halmazelméleti nyelven mondva: az eseménytér "partíciója", azaz felbontása egymást kizáró halmazok úniójára.

Események növekvő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a későbbieket:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \dots$$

Események csökkenő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \dots$$

Egy növekedő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$A_1 \cup A_2 \;=\; A_2$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \;=\; A_3$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \;=\; A_4$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \;=\; A_5$$

Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$A_1 \cap A_2 \;=\; A_2$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \;=\; A_3$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \;=\; A_4$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \;=\; A_5$$

4.2. További szabályok eseményekre

Komplementer szabály: Bármely esemény komlementerének komplementere nem más, mint az eredeti esemény.

A sok egyéb, hasonlóan triviális szabály felsorolásától eltekintünk. Azonban – fontossága és furcsasága miatt – felhívjuk még a figyelmet a De Morgan szabályokra:

De Morgan szabály az únióra: Események úniójának komplementere egyenlő a komplementereik metszetével.

Két eseményre:

$$\overline{A_1 \cup A_2} \;=\; \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

Több eseményre:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} \;=\; \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

Vetter András – Valószínűségszámítás – 1. rész – Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

De Morgan szabály a metszetre: Események metszetének komplementere egyenlő a komplementereik úniójával:

Két eseményre:

$$\overline{A_1 \cap A_2} \;=\; \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

Több eseményre:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n} \;=\; \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

Tanácsoljuk, hogy ezeket a szabályokat rajzokkal, ún. Venn diagramokkal ellenőrizze az Olvasó.

4.3. Eloszlás transzformációja

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Hány tagú a nagycsalád? Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X \;=\; \text{gyerekek száma}, \quad Y \;=\; \text{nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*

Nézzük, hány tagú a nagycsalád, amikor a szülők, gyerekek mellett a nagyszülők is a családdal vannak. A nagycsalád létszáma nyilván $Z = 2 + X + Y$. Ha a fiatal házaspárt véletlenszerűen választjuk akkor X is, Y is valószínűségi változó. Z eloszlásának minden egyes tagját az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásából a megfelelő valószínűségek összegeként kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\,Z = 2\,) &= 0.010 \\
\mathrm{P}(\,Z = 3\,) &= 0.040 = 0.020 + 0.020 \\
\mathrm{P}(\,Z = 4\,) &= 0.085 = 0.030 + 0.040 + 0.015 \\
\mathrm{P}(\,Z = 5\,) &= 0.175 = 0.080 + 0.060 + 0.030 + 0.005 \\
\mathrm{P}(\,Z = 6\,) &= 0.275 = 0.060 + 0.160 + 0.045 + 0.010 \\
\mathrm{P}(\,Z = 7\,) &= 0.255 = 0.120 + 0.120 + 0.015 \\
\mathrm{P}(\,Z = 8\,) &= 0.130 = 0.090 + 0.040 \\
\mathrm{P}(\,Z = 9\,) &= 0.030
\end{aligned}$$

Táblázat: *Valószínűségek meghatározása összegzéssel*

Vetiére utalás – Valószínűségszámítás és diszkrét valószínűségi változók

Ha Z lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket egy táblázatba rendezzük, megkapjuk Z eloszlását. Ezzel az eloszlással kell modelleznünk azt a problémát, ha egy véletlenszerűen választott fiatal házaspárhoz tartozó nagycsalád létszámát akarjuk vizsgálni.

z	2	3	4	5	6	7	8	9
P($Z = z$)	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

Táblázat: *A nagycsalád létszámának eloszlása*

2. Példa: Mi a valószínűsége, hogy három színes (piros vagy kék) golyót húzunk? Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Tekintsük a $Z = X + Y$ valószínűségi változót, ami azt fejezi ki, hogy hány színes (piros vagy kék) golyó van a kihúzott 8 golyó között. **Kérdés:** Mi a valószínűsége annak, hogy $Z = 3$?

Első megoldás: Az (X, Y) eloszlását megadó

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.032	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Piros és kék golyók száma – kétdimenziós eloszlás*

táblázatban azokat a cellákat, melyek olyan (x, y) értkeknek felelnek meg, melyekre $x + y = 3$, és összadjuk a cellákban található valószínűségeket:

$$\mathrm{P}(\ Z = 3\ ) = 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 = 0.167$$

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, a 3 színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{3}\binom{45-25}{8-3}}{\binom{45}{8}} = 0.165$$

Vetier András: Valószínűségszámítás — 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

(A két megoldásban az utolsó tizedesjegyben az eltérés a kerekítési hibákból adódik.)

3. Példa: Színes (piros vagy kék) golyók. (Az előző példa folytatása.) Határozzuk meg a Z valószínűségi változó eloszlását!

Első megoldás: Az (X, Y) eloszlását megadó fenti táblázatban Z minden lehetséges értékével kapcsolatban egy összeg adja meg a keresett valószínűséget:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathrm{P}(\ Z = 0\ ) & = & 0.001 & = \quad 0.001 \\
\mathrm{P}(\ Z = 1\ ) & = & 0.005 + 0.004 & = \quad 0.009 \\
\mathrm{P}(\ Z = 2\ ) & = & 0.019 + 0.027 + 0.008 & = \quad 0.054 \\
\mathrm{P}(\ Z = 3\ ) & = & 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 & = \quad 0.165 \\
\mathrm{P}(\ Z = 4\ ) & = & 0.031 + 0.102 + 0.106 + 0.040 + 0.005 & = \quad 0.284 \\
\mathrm{P}(\ Z = 5\ ) & = & 0.016 + 0.072 + 0.108 + 0.067 + 0.017 + 0.001 & = \quad 0.281 \\
\mathrm{P}(\ Z = 6\ ) & = & 0.004 + 0.026 + 0.054 + 0.048 + 0.019 + 0.003 + 0.000 & = \quad 0.156 \\
\mathrm{P}(\ Z = 7\ ) & = & 0.001 + 0.005 + 0.013 + 0.015 + 0.009 + 0.002 + 0.000 + 0.000 & = \quad 0.047 \\
\mathrm{P}(\ Z = 8\ ) & = & 0.000 + 0.000 + 0.001 + 0.002 + 0.001 + 0.001 + 0.000 + 0.000 + 0.000 & = \quad 0.005
\end{array}
$$

Táblázat: *A valószínűségek meghatározása összegzéssel*

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, a z darab színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{z}\binom{45-25}{8-z}}{\binom{45}{8}} \qquad (0 \le z \le 8)$$

Ha z helyére behelyettesítjük a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

4.4. Síkbeli eloszlás vetületei

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Vetítés. Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása az alábbi táblázatban adott eloszlás:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: (X, Y) *eloszlása*

Nyilvánvaló, hogy az X eloszlásának minden egyes tagját a a megfelelő oszlopban található valószínűségek összegeként kapjuk meg:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ 0\ )\ =\ 0.060 + 0.080 + 0.030 + 0.020 + 0.010\ =\ 0.2$$

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ 1\ )\ =\ 0.120 + 0.160 + 0.060 + 0.040 + 0.020\ =\ 0.4$$

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ 2\ )\ =\ 0.090 + 0.120 + 0.045 + 0.030 + 0.015\ =\ 0.3$$

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ 3\ )\ =\ 0.030 + 0.040 + 0.015 + 0.010 + 0.005\ =\ 0.1$$

vagyis X eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *X eloszlása*

Könnyű látni, hogy az Y eloszlásának minden egyes tagját az (X, Y) eloszlásából a megfelelő sorban található valószínűségek összegeként lehet megkapni:

$$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 4\ )\ =\ 0.060 + 0.120 + 0.090 + 0.030\ =\ 0.30$$

$$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 3\ )\ =\ 0.080 + 0.160 + 0.120 + 0.040\ =\ 0.40$$

$$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 2\ )\ =\ 0.030 + 0.060 + 0.045 + 0.015\ =\ 0.15$$

$$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 1\ )\ =\ 0.020 + 0.040 + 0.030 + 0.010\ =\ 0.10$$

$$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 0\ )\ =\ 0.010 + 0.020 + 0.015 + 0.005\ =\ 0.05$$

2. Példa: Piros és kék golyók – vetítés. Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X\ =\ \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y\ =\ \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Ott meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán is, hogy hogyan lehet (X, Y) eloszlásából X, illetve Y eloszlását meghatározni!

Első megoldás: Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jelentő táblázat oszlopainak összegzésével kapjuk az X eloszlását:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ X\ =\ 0\ )\ &=\ 0.000 + 0.001 + 0.004 + 0.016 + 0.031 + 0.033 + 0.019 + 0.005 + 0.001\ &=\ 0.109\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 1\ )\ &=\ 0.000 + 0.005 + 0.026 + 0.072 + 0.102 + 0.076 + 0.027 + 0.004\ &=\ 0.312\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 2\ )\ &=\ 0.001 + 0.013 + 0.054 + 0.108 + 0.106 + 0.049 + 0.008\ &=\ 0.339\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 3\ )\ &=\ 0.002 + 0.015 + 0.048 + 0.067 + 0.040 + 0.009\ &=\ 0.181\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 4\ )\ &=\ 0.001 + 0.009 + 0.019 + 0.017 + 0.005\ &=\ 0.051\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 5\ )\ &=\ 0.001 + 0.002 + 0.003 + 0.001\ &=\ 0.008\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 6\ )\ &=\ 0.000 + 0.000 + 0.000\ &=\ 0.001\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 7\ )\ &=\ 0.000 + 0.000\ &=\ 0.000\\
\mathrm{P}(\ X\ =\ 8\ )\ &=\ 0.000\ &=\ 0.000
\end{aligned}$$

Valószínűségszámítás – 1. rész: valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Táblázat: X *eloszlásának meghatározása*

Teljesen hasonló módon – a táblázat sorainak összegzésével – kapjuk az Y eloszlását:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 8\ ) = & 0.000 & = 0.000 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 7\ ) = & 0.001 + 0.000 & = 0.001 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 6\ ) = & 0.004 + 0.005 + 0.001 & = 0.010 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 5\ ) = & 0.016 + 0.026 + 0.013 + 0.002 & = 0.057 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 4\ ) = & 0.031 + 0.072 + 0.054 + 0.015 + 0.001 & = 0.174 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 3\ ) = & 0.033 + 0.102 + 0.108 + 0.048 + 0.009 + 0.001 & = 0.301 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 2\ ) = & 0.019 + 0.076 + 0.106 + 0.067 + 0.019 + 0.002 + 0.000 & = 0.289 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 1\ ) = & 0.005 + 0.027 + 0.049 + 0.040 + 0.017 + 0.003 + 0.000 + 0.000 & = 0.142 \\
\mathrm{P}(\ Y\ =\ 0\ ) = & 0.001 + 0.004 + 0.008 + 0.009 + 0.005 + 0.001 + 0.000 + 0.000 + 0.000 & = 0.027
\end{array}
$$

Táblázat: Y *eloszlásának meghatározása*

Második megoldás: Az X eloszlásának meghatározása közvetlenül is történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 10 piros golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, akkor az x darab piros golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{45-10}{8-x}}{\binom{45}{8}} \qquad (0\ \leq\ x\ \leq\ 8)$$

Ha x helyére behelyettesítjük a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

Az Y eloszlásának meghatározása is hasonlóan történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 15 kék golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, akkor az y darab kék golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{45-15}{8-y}}{\binom{45}{8}} \qquad (0\ \leq\ y\ \leq\ 8)$$

Ha y helyére behelyettesítjük a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

4.5. További szabályok valószínűségekre

1. **Összegzési szabály három tetszőleges eseményre**: Ha A, B, C tetszőleges események, akkor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A \cup B \cup C\ ) \ =\ & \\
& \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ ) + \mathrm{P}(\ C\ ) \\
-\ & \mathrm{P}(\ A \cap B\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap C\ ) - \mathrm{P}(\ B \cap C\ ) \\
+\ & \mathrm{P}(\ A \cap B \cap C\ )
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldálán

- az első sorban $\binom{3}{1}\ =\ 3$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{3}{2}\ =\ 3$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel

Vetier András – Valószínűségszámítás és statisztika – A valószínűség és diszkrét valószínűségi változó

- a harmadik sorban $\binom{3}{3} = 1$ tag áll, a három esemény metszetének valószínűsége $+$ jellel

2. **Összegzési szabály több (tetszőleges) eseményre – avagy "Poincaré" vagy "szita" formula**: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\ ) = \\
& \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_n\ ) \\
- \ & \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2\ ) - \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_3\ ) - \ldots - \mathrm{P}(\ A_{n-1} \cap A_n\ ) \\
+ \ & \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ) + \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_4\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\ ) \\
& \vdots \\
+ \ & (-1)^{n+1}\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\ )
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldálán

- az első sorban $\binom{n}{1} = n$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{n}{2}$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel
- a harmadik sorban $\binom{n}{3}$ tag áll, az eseményekből alkotható hármasok metszeteinek valószínűségei $+$ jelekkel
- az utolsó sorban $\binom{n}{n} = 1$ tag áll, az összes esemény metszetének valószínűsége $+$ vagy $-$ jellel attól függően, hogy n páratlan vagy páros

3. **Határérték szabályok** *(Extra tananyag)*:

- **Határérték szabály események növekvő sorozatára:**
  Tegyük fel, hogy az $A_1, , A_2, \ldots$ események növekvő sorozatot alkotnak, és A az ő úniójuk:

  $$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \qquad \text{és} \qquad A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

  Ekkor a $\mathrm{P}(\ A_n)$ valószínűségek növekedő módon tartanak P(A) -hoz.

  Tehát *ha eseményeknek egy növekvő sorozatával van dolgunk, akkor annak a valószínűsége, hogy az események közül valamelyik is bekövetkezik, egyenlő az események növekedő valószínűségeinek a határértékével.*

- **Határérték szabály események csökkenő sorozatára:**
  Tegyük fel, hogy az $A_1, , A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük:

  $$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \qquad \text{és} \qquad A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

  Ekkor a $\mathrm{P}(A_n)$ valószínűségek csökkenő módon tartanak P(A) -hoz.

  Tehát *ha eseményeknek egy csökkenő sorozatával van dolgunk, akkor annak a valószínűsége, hogy az összes esemény bekövetkezik, egyenlő az események csökkenő valószínűségeinek a határértékével.*

Vetien Ádám – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségszámítás és kiszkrét valószínűségi változók

Feladat: Annak esélye, hogy mindenki hűtlenkedik. *(Extra tananyag)*: Egy mulatságon, melyen 10 házaspár rock and roll számokra táncol, azt eszelik ki, hogy a változatosság kedvéért minden szám előtt kisorsolják, hogy ki kivel táncoljon. Minden férj nevét cédulára írják. Minden szám előtt a cédulákat kalapba teszik, minden feleség kihúz egy cédulát, és a soron következő számot azzal táncolja, akinek a nevét kihúzta. Vajon mi a valószínűsége annak, hogy minden feleség "hűtlenkedik", azaz nem a saját férjével táncol?

Megoldás: Aki elsőnek húz, az 10 cédula közül választ. Aki másodiknak húz, az 9 cédula közül választ. És így tovább, aki utolsónak húz, az csak 1 cédula közül válszt. Ezért a 10 hölgy és a 10 férfi

$$10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \;=\; 10\,!$$

darab – nyilván egyformán valószínű – felállásban táncolhat. Tehát egy klasszikus problémával van dolgunk, ahol az elemi események a lehetséges felállások a táncparketten.

Definiáljuk az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ eseményeket a következőképpen: A_1 az az esemény, hogy a legidősebb feleség a férjével táncol, A_2 az az esemény, hogy a második legidősebb feleség a férjével táncol, és így tovább. A feladat a

$$\text{minden feleség hűtlenkedik} \;=\; \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}$$

esemény valószínűségét kérdezi. A De Morgan azonosság felhasználásával

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}} \right) \;=\; 1 - \mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10} \right)$$

A $\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10} \right)$ valószínűséget a Poincaré formula felhasználásával fogjuk meghatározni. A Poincaré formula jobb oldalán szereplő tagok közül először kiragadjuk a

$$\mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \,)$$

tagot, és a benne szereplő eseményt jellemezzük. A $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ esemény jelentése: a legidősebb, a második legidősebb, és a harmadik legidősebb feleség a saját férjével táncol, a többi feleség pedig a többi 7 férj akármelyikével. Ez $7\,!$ lehetőséget jelent, ezért

$$\mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \,) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

Hasonlóképpen

$$\mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_4 \,) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(\, A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n \,) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldalának 3 -ik sora ezeknek a tagoknak az összege:

$$\mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \,) + \mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_4 \,) + \ldots + \mathrm{P}(\, A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n \,)$$

Mivel az összegnek minden tagja egyenlő $\frac{7\,!}{10\,!}$ -sal, és a tagok száma $\binom{10}{3}$, az összeg értéke

$$\binom{10}{3} \cdot \frac{7\,!}{10\,!} \;=\; \frac{1}{3\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldalának r -ik sora hasonlóan meghatározható. Az értéke

$$\binom{10}{r} \cdot \frac{(10-r)\,!}{10\,!} \;=\; \frac{1}{r\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldala ezeknek a valószínégeknek a váltakozó előjellel vett összege. Ezért

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10} \right) \;=$$

Vatter András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és kiszkrét valószínűségi változók

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{10!}$$

A keresett valószínűséget a komplementer szabállyal kapjuk:

$$\mathrm{P}\,(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) = 1 - \mathrm{P}\,(\, A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10}\,) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!}$$

1. Megjegyzés: A megoldás gondolatmenetéből világos, hogy ha nem 10 , hanem n házaspár van a mulatságon, akkor

$$\mathrm{P}\,(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Mint – a Taylor sorok elméletéből – jól ismert, ennek a kifejezésnek a határérétke $n \to \infty$ esetén e^{-1}, ahol $\mathrm{e} = 2.71...$ a természetes logaritmus alapja. Ezért sok házaspár esetén

$$\mathrm{P}\,(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) \approx \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 0.37\,)$$

2. Megjegyzés: Közösségekben gyakran sorsolnak – például karácsonykor – abból a célból, hogy ki kit ajándékozzon meg. Mindenki felírja a nevét egy-egy cédulára, a cédulákat kalapba teszik, aztán mindenki húz egy cédulát, hogy a kihúzott embernek adjon majd ajándékot. Meg szoktak lepődni az emberek, amikor valaki saját magát húzza! Pedig egyáltalán nem kellene ezen meglelődni, hiszen annak az esélye, hogy senki sem húzza ki önmagát (azaz mindenki "hűtlenkedik") – mint kiszámoltuk – körülbelül 0.37, a komplementer eseményé, azaz hogy legalább egy ember önmagát húzza, ennél lényegesen nagyobb, $1 - 0.37 = 0.63$.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

5. Feltételes valószínűség és eloszlás

5.1. Feltételes valószínűség

Legyenek A és B események valamely véletlen jelenséggel kapcsolatban. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk a jelenségre. Jelöljük N_A -val, hogy hányszor következik be az A esemény, és jelöljük $N_{A\cap B}$ -vel, hogy hányszor következik be az A -val együtt a B is. Másképpen mondva: N_A az A esemény gyakorisága, $N_{A\cap B}$ az $A \cap B$ esemény gyakorisága. A következő hányadost **feltételes relatív gyakorság**-nak nevezzük:

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$$

Részletesebben kifejeze a hányados neve: **a B eseménynek az A eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakorsága**. A tört értéke azt mutatja, hogy azok között az esetek között, amikor A bekövetkezik, hányad részben, milyen arányban következik be A -val együtt a B is.

A számlálót is és a nevezőt is N -nel osztva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \approx \frac{\mathrm{P}(\ A \cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

vagyis – sok kísérlet esetén – a feltételes relatív gyakorság körülbelül egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\frac{\mathrm{P}(\ A \cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

Ezt az értéket nevezzük **a B esemény feltételes valószínűségének, feltéve, hogy A bekövetkezik**. A feltételes valószínűséget $\mathrm{P}(B|A)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A \cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

Ezt a formulát a **valószínűségek osztási szabály**ának is nevezzük. Ha $\mathrm{P}(A) = 0$, akkor a a hányados nem definiált. Ilyenkor a feltételes valószínűség ezzel a hányadossal nem értelmezhető.

1. Megjegyzés: Ha B maga után vonja A -t, vagyis $B \subset A$, akkor $A \cap B = B$. Ilyenkor az osztási szabály így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )} \qquad \text{ha} \quad B \subset A$$

2. Megjegyzés: Hasonlóképpen értelmezhető az A feltételes valószínűsége, feltéve, hogy a B bekövetkezik:

$$\mathrm{P}(\ A \mid B\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A \cap B\ )}{\mathrm{P}(\ B\ )}$$

Ha A maga után vonja B -t, vagyis $A \subset B$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \mid B\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A\ )}{\mathrm{P}(\ B\ )} \qquad \text{ha} \quad A \subset B$$

3. Megjegyzés: A $\mathrm{P}(\ A \mid B\ )$ és a $\mathrm{P}(\ B \mid A\ )$ feltételes valószínűségek lehetnek egymással egyenlők is, de általában nem egyenlőek. Pédául ha A azt jelenti, hogy a szabályos dobókockával 5 -nél kisebbet dobok, B azt, hogy 3 -nál nagyobbat, akkor $\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) = \frac{1}{4}$, illetve $\mathrm{P}(\ A \mid B\ ) = \frac{1}{3}$. Világos, hogy $\mathrm{P}(\ A \mid B\ ) = \mathrm{P}(\ B| A)$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{P}(\ A\ ) = \mathrm{P}(\ B\ )$.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész – Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

4. Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy ha $A = S$, vagyis A a biztos esemény, akkor $\mathrm{P}(\, B \mid S \,) = \mathrm{P}(\, B \,)$.

5. Megjegyzés: Az is nyilvánvaló, hogy ha A és B kizáró események, akkor $\mathrm{P}(B|A) = 0$ és $\mathrm{P}(\, A \mid B \,) = 0$.

6. Megjegyzés: Az is nyilvánvaló, hogy ha $A \subset B$, vagyis A maga után vonja B -t, akkor $\mathrm{P}(\, B \mid A \,) = 1$.

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? Ha egy véletlenszerűen választott kétgyerekes családban van fiú, akkor mi a valószínűsége annak, hogy lány is van? (Feltételezzük, hogy minden gyerek, függetlenül a többi gyerektől, 0.5 valószínűséggel születik fiúnak, 0.5 valószínűséggel lánynak.)

Megoldás:

$$\mathrm{P}(\text{ van lány} \mid \text{van fiú }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ van fiú és van lány })}{\mathrm{P}(\text{ van fiú })} = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{3}$$

1 . Megjegyzés: Egy véletlenszerűen választott kétgyerekes család gyerekeit – statisztikai szempontból – helyettesíthetjük két szabályos érmével: mondjuk a fej jelentsen "fiú"-t, az írás jelentsen "lány"-t. Dobjuk fel a két érmét sokszor (100 -szor, 200 -szor, még többször), és azon esetek között, amikor van fej (azaz van fiú a családban), megnézhetjük, hogy hányadrészben van írás is (azaz van lány a családban). Az arány körülbelül $2/3$ lesz.

2. Megjegyzés: Ha az érméket számítógéppel szimuláljuk, akkor a nagy számú kísérlet elvégzése sem jelent gondot. Hajrá!

5.2. Szorzási szabályok

Szorzási szabály két eseményre:

$$\mathrm{P}(\, A \cap B \,) = \mathrm{P}(\, A \,) \cdot \mathrm{P}(\, B \mid A \,)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy két esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett.

Szorzási szabály három eseményre:

$$\mathrm{P}(\, A \cap B \cap C \,) = \mathrm{P}(\, A \,) \cdot \mathrm{P}(\, B \mid A \,) \cdot \mathrm{P}(\, C \mid A \cap B \,)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy három esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett.

Szorzási szabály több, pl. öt eseményre:

$$\mathrm{P}(\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \,) =$$

$$= \mathrm{P}(\, A_1 \,) \cdot \mathrm{P}(\, A_2 \mid A_1 \,) \cdot \mathrm{P}(\, A_3 \mid A_1 \cap A_2 \,) \cdot \mathrm{P}(\, A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \,) \cdot \mathrm{P}(\, A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \,)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy öt esemény mindegyike bekövetkezik, úgy lehet kiszámolni, hogy

Vetter András – Valószínűségszámítás – rész: Valószínűségek és statisztikai szimulációs valószínűségi változók

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadikekövetkezik, feltéve, hogy az első, a második és a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bek bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bövetkezik, feltéve, hogy az első, a második, a harmadik és a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés: A szorzási szabályokban az események sorrendje tetszőleges lehet. Például az A, B sorrrend helyett lehet a sorrend B, A :

$$\mathrm{P}(\ B \cap A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ B\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ A \mid B\ )$$

Az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend A, C, B :

$$\mathrm{P}(\ A \cap C \cap B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ C \mid A\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ B \mid A \cap C\ )$$

De az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend akár C, B, A is:

$$\mathrm{P}(\ C \cap B \cap A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ C\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ B \mid C\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ A \mid B \cap C\ )$$

Feladat: Születésnapok paradoxona. Tegyük fel, hogy n embert véletlenszerűen kiválasztunk, és belőlük alkotunk társaságot. Ezek után a társaság tagjai egymás után hangosan bemondják, hogy az év melyik napján van a születésnapjuk. (Az egyszerűség kedvéért a szökőévektől eltekintünk, az éveket 365 naposnak vesszük.) Ha n értéke nagyobb, mint 365 , akkor biztos, hogy a társaság tagjai között vannak olyanok, akiknek a születésnapja egybe esik. Ha n értéke kisebb vagy egyenlő, mint 365 , akkor az is lehet, hogy a születésnapok különböző napokra esnek, de az is lehet, hogy vannak olyanok, akiknek a születésnapja egybe esik.

Első a kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy a társaság tagjai között vannak, akiknek a születésnapja egybe esik?

Második kérdés: Mi az a legkisebb n érték, hogy ez a valószínűség $\frac{1}{2}$ -nél már nagyobb?

Megoldás: Az A_k eseményt így definiáljuk:

$$A_k\ =\ \text{a bemondáskor az első } k \text{ ember születésnapja között nincs egybeesés} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{P}(A_1)\ =\ 1$.

Az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események szűkülő sorozatot alkotnak. Abból a célból, hogy az $\mathrm{P}(A_k|A_{k-1})$ feltételes valószínűséget meghatározzuk, tegyük fel, hogy az A_{k-1} esemény bekövetkezik, vagyis az első $k-1$ bemondott születésnap különbözik. Nyilvánvaló, hogy ilyen feltétel mellett az A_k esemény akkor és csak akkor következik be, ha a k -ik születésnap különbözik az korábbi $k-1$ születésnaptól, azaz a k -ik születésnap a maradék $365-(k-1)$ nap valamelyikére esik. Ezért

$$\mathrm{P}(A_k|A_{k-1})\ =\ \frac{365-(k-1)}{365} \qquad (k \geq 1)$$

azaz

$$\mathrm{P}(A_2|A_1)\ =\ \frac{364}{365}\ =\ 0.997\,3$$

$$\mathrm{P}(A_3|A_2)\ =\ \frac{363}{365}\ =\ 0.994\,5$$

$$\mathrm{P}(A_4|A_3) \;=\; \frac{362}{365} \;=\; 0.991\,8$$

$$\vdots$$

A szorzási szabállyal kapjuk, hogy

$$\begin{array}{lclclclcl}
\mathrm{P}(A_1) & = & 1 & & & & & & \\
\mathrm{P}(A_2) & = & \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) & = & 1 & \cdot 0.997\,3 & = & 0.997\,3 \\
\mathrm{P}(A_3) & = & \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3|A_2) & = & 0.997\,3 & \cdot 0.994\,5 & = & 0.991\,8 \\
\mathrm{P}(A_4) & = & \mathrm{P}(A_3) \cdot \mathrm{P}(A_4|A_3) & = & 0.991\,8 & \cdot 0.991\,8 & = & 0.983\,6 \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Táblázat: *A szorzási szabály alkalmazása*

Az A_k esemény komplementere:

$$\overline{A_k} \;=\; \text{a bemondáskor az első } k \text{ ember születésnapjai között van egybeesés} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

A komplementer események valószínűségei:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1 - \mathrm{P}(A_1) = 1 - 1 & = 0 \\
\mathrm{P}\left(\overline{A_2}\right) = 1 - \mathrm{P}(A_2) = 1 - 0.997\,3 & = 0.002\,7 \\
\mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right) = 1 - \mathrm{P}(A_3) = 1 - 0.991\,8 & = 0.008\,2 \\
\mathrm{P}\left(\overline{A_4}\right) = 1 - \mathrm{P}(A_4) = 1 - 0.983\,6 & = 0.016\,4 \\
\vdots &
\end{array}$$

Táblázat: *A komplementer szabály alkalmazása*

A képletek alapján a valószínűségek numerikus értékét kiszámoljuk, és az eredményeket táblázatba rendezzük:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

n	$\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right)$
1	0.000 0
2	0.002 7
3	0.008 2
4	0.016 4
5	0.027 1
6	0.040 5
7	0.056 2
8	0.074 3
9	0.094 6
10	0.116 9
⋮	⋮
20	0.411 4
21	0.443 7
22	0.475 7
23	0.507 3
24	0.538 3
25	0.568 7
26	0.598 2
27	0.626 9
28	0.654 5
29	0.681 0
30	0.706 3
⋮	⋮
40	0.891 2
41	0.903 2
42	0.914 0
43	0.923 9
44	0.932 9
45	0.941 0
46	0.948 3
47	0.954 8
48	0.960 6
49	0.965 8
50	0.970 4
⋮	⋮

Táblázat: *Valószínűségek*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

A táblázatból látjuk, hogy

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_{22}}\right) = 0.4757$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_{23}}\right) = 0.5073$$

vagyis a második kérdésre a válasz: 23.

5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva

Feltételes valószínűségekkel kapcsolatos problémák esetén gyakran segít a gondolkodásban, számolásban, ha rajzolunk a problémához kapcsolódóan egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráfot. Egy *valószínűségekkel súlyozott fa-gráf* valami ehhez hasonlót jelent:

- Rajzolj egy papír aljára egy pontot. Ezt a pontot *a fa gyökeré*nek nevezzük.
- Most húzzál a pontból valahány – mondjuk három – szakaszt felfelé. Ezeket a szakaszokat a *gyökérből kiinduló ágak*nak nevezzük. Írd az első ág mellé – mondjuk – a 0.2 értéket, a második ág mellé – mondjuk – a 0.3 értéket, a harmadik ág mellé – mondjuk – a 0.5 értéket. Ezeket az értékeket *súlyok*nak nevezzük. Képzeld el, hogy egy bogár a gyökérből indulva mászik felfelé, és amikor egy elágazáshoz ér, a súlyoknak megfelelő valószínűségekkel választ az egyes ágak közül, hogy aztán azon az ágon másszon tovább felfelé.
- Az első ág végénél legyen megint egy elágazás – mondjuk – két ággal. Írd az ágak mellé – mondjuk – a 0.4 , illetve a 0.6 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy rá a bogár ezekre az ágakra.
- A második ág végénél legyen szintén egy elágazás – mondjuk – négy ággal. Írd minden ág mellé – mondjuk – a 0.25 súlyokat. Ilyen valószínűséggel megy a bogár minden egyes ágra.
- A harmadik ág végénél is legyen egy elágazás – mondjuk – hat ággal. Írd az ágak mellé a 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.5 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy a bogár ezekre az ágakra.
- Vegyük észre. hogy minden elágazásnál az odaírt súlyok összege 1.
- Elképzelhetünk még további elágazásokat és súlyokat. A bogár mindig a fa teteje felé megy (távolodik a gyökértől), és minden elágazásnál az ott megadott súlyoknak megfelelő valószínűségek szerint választja meg, hogy merre menjen tovább, amíg egyszercsak nem tud továbbmenni, mert ág már nincs tovább.
- A szorzási szabály alapján kézenfekvő, hogy milyen valószínűséggel jut el a bogár a fa egyes végződéseibe: *azokat a súlyokat kell összeszorozni, melyek a gyökérből kiindulva a szóban forgó végződéshez vezető út mentén találhatóak.*

Ha netán ez így leírva nem volt érthető vagy meggyőző, akkor – sebaj – majd órán elmondjuk, megmutatjuk, akkor szép lesz.

5.4. További szorzási szabályok

Megjegyzés: Van, amikor eseményeknek olyan sorozatával van dolgunk, hogy a sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat, azaz

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \ldots$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy eseményeknek egy **csökkenő sorozat**ával van dolgunk. Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cap A_2 \\ A_3 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \\ A_4 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \\ A_5 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \end{aligned}$$

Ezért a szorzási szabály pl. öt eseményre így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(A_5) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3|A_2) \cdot \mathrm{P}(A_4|A_3) \cdot \mathrm{P}(A_5|A_4)$$

Tehát csökkenő esemény sorozat esetén annak a valószínűségét, hogy ötödik esemény bekövetkezik, úgy lehet kiszámolni, hogy

Vekerdi András: Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bekövetkezik, feltéve, hogy a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bekövetkezik, feltéve, hogy a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés. *(Extra tananyag)*: Végtelen sok esemény csökkenő sorozata esetén a szorzási szabály így fest: Ha A -val jelöljük a végtelen sok esemény metszetét, akkor

$$\mathrm{P}(A) \;=\; \mathrm{P}(A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_2|A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_3|A_2)\ldots$$

Tehát annak az eseménynek a valószínűségét hogy

a végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \ldots$ esemény mindegyike bekövetkezik

úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- szorzunk a másodiknak az elsőre vonatkozó feltételes valószínűségével,
- szorzunk a harmadiknak a másodikra vonatkozó feltételes valószínűségével,
- és így tovább folytatjuk a szorozgatást a végtelenségig úgy, hogy
- mindig a soron következő eseménynek az őt megelőzőre vonatkozó feltételes valószínűségével szorzunk.

Technikailag egy ilyen végtelen sok tényezőből álló szorzatot ahhoz hasonlóan kell kezelni, mint ahogy a végtelen sok tagból álló összegeket kezeljük: a véges sok tényezőből álló

$$\mathrm{P}(A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_2|A_1) \;\cdot\; \ldots \;\cdot\; \mathrm{P}(A_n|A_{n-1})$$

szorzatnak $n \to \infty$ mellett a határértéket veszünk, vagyis

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_2|A_1)v \ldots \;\cdot\; \mathrm{P}(A_n|A_{n-1})$$

5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes formula

Teljes esemény rendszer: Azt mondjuk, hogy a (véges vagy végtelen sok) $A_1, A_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást kizáróak és uniójuk a biztos esemény. A teljes eseményrendszer tagjai közül a 0 valószínűségűeket eldobhatjuk, ezért feltételezzük, hogy $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$ minden i -re.

Teljes valószínűség formulája: Legyen $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, B pedig tetszőleges esemény. Ekkor:

$$\mathrm{P}(B) \;=\; \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(B|A_2) + \ldots$$

Bayes formula: Ha a jelenség lezajlása során valahogyan megtudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett, akkor kérdezhetjük: Ez a feltétel hogyan módosítja az egyes A_i események esélyeit? A választ a $\mathrm{P}(A_i|B)$ feltételes valószínűség adja, amit az alábbi képlettel számolhatunk ki:

Vetter András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$$\mathrm{P}(A_i|B) \;=\; \frac{\mathrm{P}(A_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \;=\; \frac{\mathrm{P}(A_i)\cdot \mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\cdot \mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot \mathrm{P}(B|A_2) + \ldots}$$

Példa: Valószínűségek helyett százalékok. Ebben a példában semmi véletlen sincs, mégis segíthet a fenti két formula megemésztésében. Tegyük fel, hogy egy ládában sok, mondjuk 1000, fából és vasból készült színes golyó van. Tegyük fel, hogy a golyók

50%-a piros,	30%-a zöld,	20%-a kék,	továbbá, hogy
a pirosak 40%-a,	a zöldek 70%-a,	a kékek 90%-a	fából készült (a többi vasból).

1. Segítség a teljes valószínűség formulájának megemésztéséhez: Könnyű kiszámolni, hogy az összes golyó hányad része készült fából:

$$0.5\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.9 \;=\; 0.59$$

2. Segítség a Bayes formula megemésztéséhez: Azt is könnyű látni, hogy a fából készült golyóknak

- hányad része piros:
$$\frac{0.5\cdot 0.4}{0.59} \;=\; \frac{0.5\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.9} \;=\; 0.34$$
- hányad része zöld:
$$\frac{0.3\cdot 0.7}{0.59} \;=\; \frac{0.3\cdot 0.7}{0.5\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.9} \;=\; 0.36$$
- hányad része kék:
$$\frac{0.2\cdot 0.9}{0.59} \;=\; \frac{0.2\cdot 0.9}{0.5\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.9} \;=\; 0.31$$

Feladat: Dobókocka, dobozok, színes golyók. Van három dobozunk. Az elsőben egy piros és egy fehér golyó van, a másodikban két piros és egy fehér, a harmadikban egy piros és három fehér. A véletlenre bízzuk, hogy melyik dobozból húzunk egy golyót. Ha a dobókockánkkal 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, akkor a első dobozból, ha 4-est vagy 5-öst, akkor másodikból, ha 6-ost, akkor a harmadikból. Kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott dobozból kihúzott golyó piros?

Megoldás: Az alábbi valószínűségek és feltételes valószínűségek a feladat szövegéből adódnak:

$$\mathrm{P}(\text{ első doboz }) \;=\; \frac{3}{6} \qquad \mathrm{P}(\text{ második doboz }) \;=\; \frac{2}{6} \qquad \mathrm{P}(\text{ harmadik doboz }) \;=\; \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(\text{ piros | első doboz}) \;=\; \frac{1}{2} \qquad \mathrm{P}(\text{ piros | második doboz }) \;=\; \frac{2}{3} \qquad \mathrm{P}(\text{ piros | harmadik doboz }) \;=\; \frac{1}{4}$$

A teljes valószínűség formuláját alkalmazva:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{piros}) \;=\; & \\
& \mathrm{P}(\text{ első doboz }) \cdot \mathrm{P}(\text{ piros | első doboz }) + \\
& \mathrm{P}(\text{ második doboz }) \cdot \mathrm{P}(\text{ piros | második doboz }) + \\
& \mathrm{P}(\text{ harmadik doboz }) \cdot \mathrm{P}(\text{ piros | harmadik doboz }) \;=\; \\
& \qquad \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} \;=\; 0.514
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A képletekkel leírt gondolatmenetet le is lehet rajzolni egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráf segítségével. Olvasás közben tessék a rajzolni!

A fa gyökeréből kiindul három ág.

Vetró Ábrahám: Valószínűségszámítás és statisztika: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

- Az első ág annak felel meg, hogy a dobókockával 1 -est, 2 -est vagy 3 -ast dobunk, azaz az első dobozhoz jutunk.
- A második ág annak felel meg, hogy a dobókockával 4 -est vagy 5 -öst dobunk, azaz a második dobozhoz jutunk.
- A harmadik ág annak felel meg, hogy a dobókockával 6 -ost dobunk, azaz a harmadik dobozhoz jutunk.

Az egyes ágakhoz súlyok tartoznak.

- Az első doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{3}{6}$.
- A második doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{2}{6}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{1}{6}$.

Mindegyik ág kétfelé ágazik. Mindegyik elágazásnál az első ág a piros, a második ág a fehér húzásának felel meg.

- Az első doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.
- A második doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{2}{3}$ illetve $\frac{1}{3}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{4}$ illetve $\frac{3}{4}$.

Feladat *(az előző feladat folytatása:)* Tegyük fel, hogy valaki az előző feladatban leírtaknak megfelelően a másik szobában végrehajtja a kísérletet úgy, ahogy kell, aztán átjön a mi szobánkba, és közli, hogy piros golyót húzott. De nem mondja meg, hogy melyik dobozból húzta. Természetes módon merül fel bennünk a három kérdés:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót az 1. dobozból húzta?
2. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót a 2. dobozból húzta?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót a 3. dobozból húzta?

Megoldás:

1.
$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 1. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{piros })} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.49$$

2.
$$\mathrm{P}(\text{ 2. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 2. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{piros })} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.43$$

3.
$$\mathrm{P}(\text{ 3. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 3. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{ piros })} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.08$$

Látjuk, hogy ezek a

$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz } \mid \text{piros }) = 0.49 \qquad \mathrm{P}(\text{ 2. doboz } \mid \text{piros }) = 0.43 \qquad \mathrm{P}(\text{ 3. doboz } \mid \text{piros }) = 0.08$$

feltételes valószínűségek különböznek a feltétel nélküli

$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz }) = 0.50 \qquad \mathrm{P}(\text{ 2. doboz }) = 0.33 \qquad \mathrm{P}(\text{ 3. doboz }) = 0.17$$

valószínűségektől.

Feladat *(az előző feladat folytatása:)* És mi van akkor, ha az ember azt közli, hogy fehér golyót húzott? A három kérdés most:

Vetter András – Valószínűségszámítás – Tartalmazza a vázlatot és egészkrét valószínűségi változók

- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót az 1. dobozból húzta?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót a 2. dobozból húzta?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót a 3. dobozból húzta?

Megoldás: Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz } \mid \text{fehér }) \;=\; 0.51 \qquad \mathrm{P}(\text{ 2. doboz } \mid \text{fehér }) \;=\; 0.23 \qquad \mathrm{P}(\text{ 3. doboz } \mid \text{fehér }) \;=\; 0.26$$

Ezek a valószínűség értékek is különböznek azoktól, melyeket az előző megoldás végén kiírtunk.

Az alábbi formula a teljes valószínűség formulájának egyszerű általánosítása.

Feltételes valószínűség kiszámítása a feltétel finomításával: Ha az A esemény az egymást kizáró $A_1, A_2, \ldots$ események uniójaként áll elő, B pedig tetszőleges esemény, akkor

$$\mathrm{P}(B|A) \;=\; \mathrm{P}(A_1|A)\cdot\mathrm{P}(B|A_1) \;+\; \mathrm{P}(A_2|A)\cdot\mathrm{P}(B|A_2) \;+\; \ldots$$

Egyszerű következmény:

Amikor a finomítással nyert feltételes valószínűség nem függ a finomított feltételtől: Ha az A esemény az egymást kizáró $A_1, A_2, \ldots$ események uniójaként áll elő, B pedig tetszőleges esemény, és

$$\mathrm{P}(B|A_1) \;=\; \mathrm{P}(B|A_2) \;=\; \ldots \;=\; c$$

akkor

$$\mathrm{P}(B|A) \;=\; c$$

5.6. Feladatok vizsgálatokról

1. Feladat: Barátom tényleg beteg? Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég vizsgálták, és a vizsgálat betegnek jelezte. Ő nagyon megijedt. Nyugtassuk meg barátomat, hogy nem kell megijednie: a vizsgálat eredményének ismeretében sem túl valószínű, hogy a kérdéses betegségben szenved.

Megoldás:

$$\mathrm{P}(\text{ beteg} \mid \text{betegnek diagnosztizálják })$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják })}{\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják })}{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják }) \;+\; \mathrm{P}(\text{ egészséges és betegnek diagnosztizálják })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják} \mid \text{beteg })}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják} \mid \text{beteg }) \;+\; \mathrm{P}(\text{ egészséges })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják} \mid \text{egészséges })}$$

$$= \frac{0.001\cdot 0.8}{0.001\cdot 0.8 + 0.999\cdot 0.1}$$

$$= 0.008$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűség, és diszkrét valószínűségi változók

Látjuk, hogy annak az esélye, hogy a barátom beteg, ilyen információk mellett csak 8 ezred, ami még 1 százaléknál is kisebb, tehát egyáltalán nem sok.

Ilyen rosszul működő teszt esetén – ha nincs más lehetőség, és megengedhető, akkor – természetes ötlet, hogy több viszágalatot hajtsunk végre, és azok eredményéből következtessünk a helyzetre. Íme:

2. Feladat: Több vizsgálat jobb eredményt ad. Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég többször is vizsgálták, és minden vizsgálat betegnek jelezte. A vizsgálatok számának függvényében adjuk meg, hogy mennyire jogos, hogy aggódik?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a vizsgálatok száma n . A szorzási szabály miatt igazak az alábbiak:

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer | beteg)} = (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | beteg) })^n$$

illetve

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer | egészséges)} = (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | egészséges) })^n$$

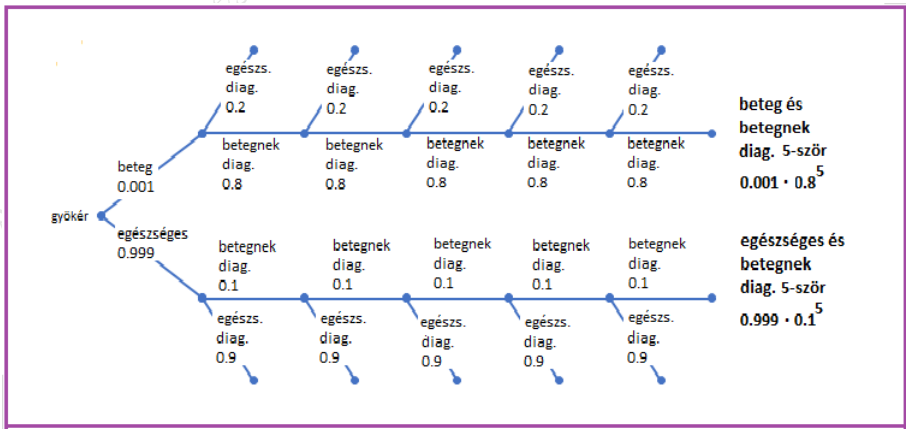
ezért

$$\text{P(beteg ÉS betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer)} =$$
$$= \text{P(beteg)} \cdot (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | beteg) })^n =$$
$$= 0.001 \cdot 0.8^n$$

illetve

$$\text{P(egészséges ÉS betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer)} =$$
$$= \text{P(egészséges)} \cdot (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | egészséges) })^n =$$
$$= 0.999 \cdot 0.1^n$$

A felírt képletek megértését – remélhetőleg – segíti az alábbi ábra, mely az $n = 5$ esetről szól:



21. ábra. *Fa-gráf* 5 *vizsgálat lehetőségeinek szemléltetésére*

Ezeket felhasználva, barátom esélyei így festenek:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{ beteg} \mid \text{betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer }) \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer })}{\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer })} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer })}{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer }) + \mathrm{P}(\text{ egészséges és betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer })} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer} \mid \text{beteg })}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer} \mid \text{beteg }) + \mathrm{P}(\text{ egészséges })\cdot \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n\text{ -szer} \mid \text{egészséges })} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer} \mid \text{beteg })\ )^n}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer} \mid \text{beteg })\ )^n + \mathrm{P}(\text{ egészséges })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer} \mid \text{egészséges })\ )^n} \\
&= \frac{0.001 \cdot 0.8^n}{0.001 \cdot 0.8^n + 0.999 \cdot 0.1^n}
\end{aligned}
$$

Az alábbi táblázatban n függvényében adjuk meg a vizsgált feltételes valószínűség numerikus értékét:

n	P(beteg | betegnek diagnosztizálják n -szer)
1	0.008
2	0.060
3	0.339
4	0.804
5	0.970

Táblázat: *A feltételes valószínűségek numerikus értékei*

Láthatjuk, hogy ha a teszt 5-szöri ismétlése mind pozitív eredményt ad, akkor már nagy a gond!

Megjegyzés: Felmerülhet valakiben a kérdés, hogy mi az esélye a betegségnek, ha n tesztből k jelez betegséget, de $n-k$ nem. A kérdésre a választ a binomiális eloszlás segítségével tudjuk majd megadni – lásd a a binomiális eloszlásról szóló későbbi fejezetben!

5.7. Feladatok vizsgákról és bögrékről

Az alábbi három feladatban azt a problámát járjuk körbe, hogy – ***végtelen sok(!)*** *vizsga lehetőség mellett – milyen esélye van egy diáknak, hogy előbb-utóbb sikerrel vegye az akadályt, azaz elkerülje, hogy mindig csak megbukik.*

1. Feladat: Aki nem felejt, előbb-utóbb átmegy. Tegyük fel, hogy egy diák egy bizonyos tárgyból többször is vizsgázhat. Ismételt vizsgáin se többet, se kevesebbet nem tud, mint a korábbiakon – ezért minden vizsgáján ugyanazzal a fix p valószínűséggel megy át, $q = 1-p$ valószínűséggel pedig megbukik. Megmutatjuk, hogy ha p pozitív, és a diák vizsgáinak a száma nem korlátozott, akkor *biztos, hogy előbb-utóbb átmegy* (a siker előbb-utóbb bekövetkezik).

Más megfogalmazás: Jó tisztában lenni vele, hogy az életben általában, *ami be tud következni, az előbb-utóbb be is követikezik*.

Például, *ha mindig az asztalod sarkára teszed a bögrédet, akkor* – nem tudni, mikor – de *biztos, hogy a bögréd el fog törni*, mert valamikor valaki le fogja lökni! (Ebben a megfogalmazásban – kissé fanyar módon! – a bögre eltörése számít sikernek.)

Megoldás: Jelöljük A_n -nel azt az eseményt, hogy a diák az első n vizsga mindegyikén megbukik. Ennek az eseménynek a valószínűsége – a szorzási szabály miatt – nyilván:

$$\mathrm{P}(A_n) = q^n$$

Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik. Mivel az A esemény minden n esetén maga után vonja A_n -t

$$\mathrm{P}(A) \;\le\; \mathrm{P}(A_n) \quad \text{minden} \quad n\text{-re}$$

Mivel $n \to \infty$ esetén $\mathrm{P}(A_n) \;=\; q^n \to 0$, a jól ismert "rendőr elv" miatt $\mathrm{P}(A) \;=\; 0$, vagyis 0 a valószínűsége annak, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik, tehát 1 a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb átmegy.

2. Feladat: Ha a diák túl gyorsan felejt. *(Extra tananyag)*: Az alábbi, mesterségesen konstruált két példának az a célja, hogy érzékeltessék: bizony előfordulhat, hogy ha valakinek a tudása az idő múlásával nagy mértékben romlik (a siker valószínűsége nagy mértékben csökken), akkor *végtelen sok vizsga esetén sem biztos, hogy a siker valaha is bekövetkezik*, mert pozitív a valószínűsége annak a (diák számára szomorú) eseménynek, hogy a vizsgája soha sem sikerül. Sőt, az az esemény, hogy a vizsgája sosem sikerül, valószínűbb is lehet annál, hogy a vizsgája valaha is sikerül.

Más megfogalmazás: *Ha a biztonság kellő mértékben növekszik*, vagyis a törés sikerének az esélye kellő mértékben csökken (a bögrédet megfelelő módon egyre biztonságosabb helyekre teszed), *akkor pozitív a valószínűsége annak, hogy a bögre az idők végtelenségéig kitart*, azaz soha sem törik el (a törés fanyar sikere sose következik be).

Megoldás: Az alábbi két példában közös jelöléseket használunk: A_n -nel jelöljük azt az eseményt, hogy a diák az első n vizsga mindegyikén megbukik, és A -val azt az eseményt, hogy végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük.

Első példa: Gyorsan felejtő diák: Feltesszük, hogy az idő múlásával a diák fárad, tudása hanyatlik, ezért, ha arra sor kerül, az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége – mondjuk – az alábbi (mesterségesen kitalált) matematikai képlet szerint nő n függvényében:

$$\mathrm{P}(\text{ az } n\text{-ik vizsga sikertelen} \mid \text{az } n\text{-ik vizsgára sor kerül }) \;=\; \frac{0.6 + \frac{0.4}{n+1}}{0.6 + \frac{0.4}{n}} \qquad (\, n = 1, 2, \ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ az } 1\text{-ső vizsga sikertelen }) \;=\; \frac{0.6 + \frac{0.4}{2}}{0.6 + \frac{0.4}{1}} \;=\; 0.8$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 2\text{-ik vizsga sikertelen} \mid \text{a } 2\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; \frac{0.6 + \frac{0.4}{3}}{0.6 + \frac{0.4}{2}} \;=\; 0.916\,7$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 3\text{-ik vizsga sikertelen} \mid \text{a } 3\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; \frac{0.6 + \frac{0.4}{4}}{0.6 + \frac{0.4}{3}} \;=\; 0.954\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 4\text{-ik vizsga sikertelen} \mid \text{a } 4\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; \frac{0.6 + \frac{0.4}{5}}{0.6 + \frac{0.4}{4}} \;=\; 0.971\,4$$

$$\vdots$$

Bár a későbbi számítások szempontjából nincs rá szükség, de azért, hogy a lentebbi ábrán könnyebb legyen eligazodni, a komplementer valószínűségek numerikus értékeit is kiszámoljuk:

$$\mathrm{P}(\text{ az } 1\text{-ső vizsga sikeres }) \;=\; 1 - 0.8 \;=\; 0.2$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 2\text{-ik vizsga sikeres} \mid \text{a } 2\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; 1 - 0.916\,7 \;=\; 0.083\,3$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 3\text{-ik vizsga sikeres} \mid \text{a } 3\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; 1 - 0.954\,5 \;=\; 0.045\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 4\text{-ik vizsga sikeres} \mid \text{a } 4\text{-ik vizsgára sor kerül}) \;=\; 1 - 0.971\,4 \;=\; 0.028\,6$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségszámítás és statisztika

$$\vdots$$

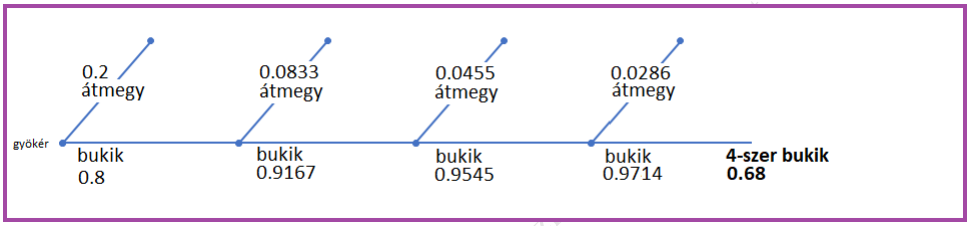
A szorzási szabály alkalmazásával és triviális egyszerűsítésekkel kapjuk, hogy a $\mathrm{P}(\ A_4\ )$ valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ A_4\ )\ =\ \mathrm{P}(\text{ az első }\ 4\ \text{ vizsga mindegyike sikertelen }) \ =$$

$$= \frac{0.6+\frac{0.4}{2}}{0.6+\frac{0.4}{1}} \cdot \frac{0.6+\frac{0.4}{3}}{0.6+\frac{0.4}{2}} \cdot \frac{0.6+\frac{0.4}{4}}{0.6+\frac{0.4}{3}} \cdot \frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{0.6+\frac{0.4}{4}} =$$

$$= \frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{0.6+\frac{0.4}{1}} =$$

$$= \frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{1} = 0.6+\frac{0.4}{5}\ \ (=\ 0.68)$$



22. ábra. *Fa-gráf az első 4 vizsga lehetőségeinek szemléltetésére*

Hasonlóan adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

$$\mathrm{P}(\ A_n\ )\ =\ \mathrm{P}(\text{ az első }\ n\ \text{ vizsga mindegyike sikertelen }) \ =\ 0.6+\frac{0.4}{n+1}$$

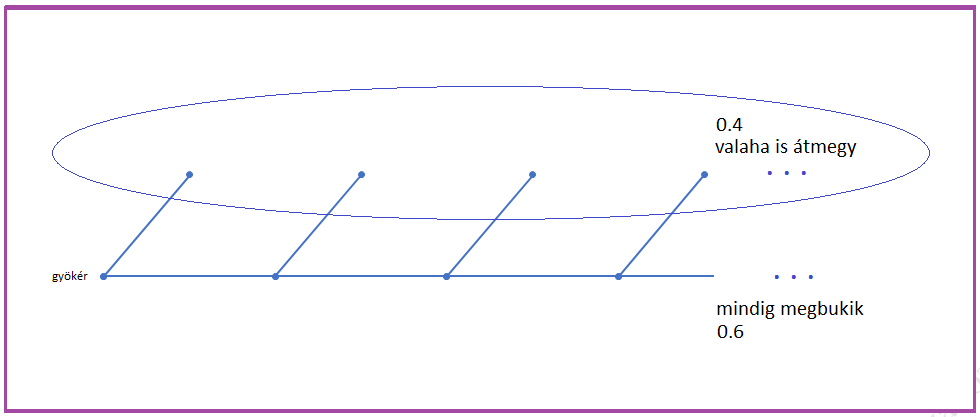
Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, ezen események A -val jelölt metszetére igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)\ =\ \lim_{n\to\infty}\left(0.6+\frac{0.4}{n+1}\right)\ =\ 0.6$$

vagyis $\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ 0.6$. Tehát

- annak az esélye, hogy a vizsgája sosem sikerül, 0.6 ,
- annak pedig, hogy valaha is sikerül, csak 0.4 .

Vetter András – Valószínűségszámítás – 1. rész: valószínűségi változók



23. ábra. *Fa-gráf annak szemléltetésére, hogy "valaha is átmegy" vagy "mindig megbukik"*

Megjegyzés: Annak a valószínűsége, hogy a diák éppen az n -ik vizsgán megy át, így számolható ki:

$$\text{P(a diák éppen az } n \text{ -ik vizsgán megy át)} =$$

$$= \text{P(az első } n-1 \text{ vizsga sikertelen)} - \text{P(az első } n \text{ vizsga sikertelen)} =$$

$$= \left(0.6 + \frac{0.4}{(n-1)+1}\right) - \left(0.6 + \frac{0.4}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{0.4}{n} - \frac{0.4}{n+1} =$$

$$= \frac{0.4}{n\,(n+1)}$$

Ez a képlet minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre igaz.

Második példa: Még gyorsabban felejtő diák: Ez a példa semmi újat nem ad az előzőhöz képest, csak más numerikus értékekkel dogozik. A célja az, hogy a következő 3. feladat stílusát előkészítse.

Az ábrákat kedvelő Kedves Olvasónak nagyon javasoljuk, hogy olvasás közben ragadjon papírt és ceruzát, és készítsen szép, egészséges fa-gráfokat. Ha képzeletében jól látja a fa-gráf struktúrát, akkor – természetesen – a papír és a ceruza nem szükséges.

Most is feltesszük, hogy az idő múlásával a diák, fárad, tudása hanyatlik, ezért, ha arra sor kerül, az – az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége ebben a megoldásban n függvényében az alábbi (ugyancsak mesterségesen kitalált) matematikai képlet szerint nő:

$$\text{P(az } n \text{ -ik vizsga sikertelen | az } n \text{ -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/n^2)} \quad (\, n = 1, 2, \ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\text{P(1. vizsga sikertelen)} = \mathrm{e}^{(-0.1/1^2)} = 0.904\,8$$

$$\text{P(2. vizsga sikertelen | a 2 -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/2^2)} = 0.975\,3$$

$$\text{P(3. vizsga sikertelen | a 3 -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/3^2)} = 0.989\,0$$

$$\text{P(4. vizsga sikertelen | a 4 -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/4^2)} = 0.993\,8$$

$$\vdots$$

A szorzási szabály alkalmazásával adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

$$\mathrm{P}(\ A_n\ )\ =\ \mathrm{P}(\text{ az első } n \text{ vizsga mindegyike sikertelen })\ =$$

$$=\ \mathrm{e}^{(-0.1/1^2)}\cdot\mathrm{e}^{(-0.1/2^2)}\cdot\ldots\cdot\mathrm{e}^{(-0.1/n^2)}\ =$$

$$=\ \mathrm{e}^{-(\,0.1/1^2+0.1/2^2+\ldots+0.1/n^2\,)}$$

Mint ismeretes, az

$$1/1^2\ +\ 1/2^2\ +\ldots+\ 1/n^2$$

kifejezés $n\to\infty$ esetén a

$$\pi^2/6\,(\ =\ 1.6449)$$

határértéket adja. Ezért a kitevőben álló

$$-(\,0.1/1^2\ +\ 0.1/2^2\ +\ldots+\ 0.1/n^2)$$

kifejezés határértéke $n\to\infty$ esetén

$$-0.1\ \left(\pi^2/6\right)\ \ (\ =\ -0.164\,5)$$

Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük, igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(A)\ =\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)\ =\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-(\,0.1/1^2+0.1/2^2+\ldots+0.1/n^2\,)}\ =\mathrm{e}^{-0.1\left(\pi^2/6\right)}\ =\ 0.8483$$

vagyis $\mathrm{P}(A)\ =\ 0.848\,3$. Tehát

- annak az esélye, hogy a vizsgája sosem sikerül, $0.848\,3$,
- annak pedig, hogy valaha is sikerül, csak $0.151\,7$.

3. Feladat: A lassabban felejtő diák esete: *(Extra tananyag)*: Az alábbi, mesterségesen konstruált példának az a célja, hogy érzékeltesse: előfordulhat, hogy – annak ellenére, hogy valakinek a tudása az idő múlásával lassan romlik, **mégis** – végtelen sok vizsga esetén is – *biztos, hogy előbb-utóbb átmegy a vizsgán* (a siker előbb-utóbb biztos bekövetkezik).

Más megfogalmazás: Vigyázat! *Ha a biztonságot ugyan növeled, de nem kellő mértékben* (azaz a törés sikerének az esélyét nem csökkented kellő mértékben), akkor a biztonság növelése semmit sem ér, mert *biztos, hogy a bögre előbb-utóbb eltörik* (a törés sikere előbb-utóbb biztos bekövetkezik).

Most is feltesszük, hogy az idő múlásával a diák fárad, tudása hanyatlik, ezért ha – ha arra sor kerül, akkor – az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége ebben a megoldásban n függvényében az alábbi képlet szerint nő:

$$\mathrm{P}(\text{ az } n \text{ -ik vizsga sikertelen })\ =\ \mathrm{e}^{(-1/n)}\quad(\ n=1,2,\ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ 1. vizsga sikertelen })\ =\ \mathrm{e}^{(-1/1)}\ =\ 0.367\,9$$

$$\mathrm{P}(\text{ 2. vizsga sikertelen })\ =\ \mathrm{e}^{(-1/2)}\ =\ 0.606\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ 3. vizsga sikertelen })\ =\ \mathrm{e}^{(-1/3)}\ =\ 0.716\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ 4. vizsga sikertelen })\ =\ \mathrm{e}^{(-1/4)}\ =\ 0.778\,8$$

$$\vdots$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségelmélet és vázlatok valószínűségi változók

A szorzási szabály alkalmazásával adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_n\ ) &= \mathrm{P}(\text{ az első } n \text{ vizsga mindegyike sikertelen }) = \\ &= \mathrm{e}^{(-1/1)} \cdot \mathrm{e}^{(-1/2)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{(-1/n)} = \\ &= \mathrm{e}^{-(\,1/1+1/2+\ldots+1/n\,)} \end{aligned}$$

Mint ismeretes, az

$$1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$$

kifejezés határértéke $n \to \infty$ esetén ∞ . Ezért a kitevőben álló

$$-(\,1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$$

kifejezés határértéke $n \to \infty$ esetén $-\infty$.

Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük, igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(\ A\ ) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\ A_n\ ) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-(\,1/1+1/2+\ldots+1/n\,)} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$

Ezért $\mathrm{P}(A) = 0$, vagyis 0 a valószínűsége annak, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik, tehát 1 a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb átmegy.

5.8. Elérhető-e az Örök Boldogság? *(Extra tananyag)*

Életünk során mindig újabb és újabb problémákkal szembesülünk: az egyik után jön a másik. Jó esetben a soron következő problémát megoldjuk (ez a "siker"), és akkor ez örömmel tölt el minket, rossz esetben a problémát ekbukjuk (ez a "kudarc"), és akkor elszomorodunk. Ebben a nagyon leegyszerűsített életfelfogásban az Örök Boldogság elérése azt jelenti, hogy az elénk tárulkozó végtelen sok problémával való küzdelmünk során valamikor bekövetkezik az, hogy onnantól kezdve már örökké csak sikerünk lesz, bukásunk pedig soha.

Felmerül több kérdés is:

- Tudunk-e a sikerek és a kudarcok valószínűségei segítségével olyan feltételt megfogalmazni, ami garantálja az Örök Boldogság elérését?
- Jó lenne tudni, hogy ha az Örök Boldogság elérése garantált, akkor mikor kezdődik. Természetesen nem lehet elvárni, hogy egy véletlen folyamatban pontosan és biztosan megmondjuk, hogy az Örök Boldogság mikor következik be. Meg kell elégednünk azzal, hogy meg tudjuk adni a bekövetkezés pillanatának eloszlását.
- Meg fogjuk vizsgálni azt is, hogy milyen feltételek mellett áll elő az a szomorú helyzet, hogy az Örök Boldogságot soha sem érjük el.

Szabó Árpád – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

5.8.1. Amikor biztos, hogy elérjük

Azt az eseményt, hogy az i -ik problémát sikerrel oldjuk meg, jelöljük A_i -vel. Ennek komplementerét, vagyis azt az eseményt, hogy az i -ik problémát elbukjuk, B_i -vel. Az az esemény, hogy az n -ik problémától kezdve csak sikerünk van, nyilván az $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ események metszete. Ezt az eseményt jelöljük S_n -nel:

$$S_n \;=\; \text{az } n\text{-ik problémától kezdve csak sikerünk van} \;=\; \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

Ennek komplementerét K_n -nel jelöljük:

$$K_n \;=\; \text{az } n\text{-ik problémától kezdve (sajnos) adódik kudarcunk} \;=\; \bigcup_{i=n}^{\infty} B_i$$

Az az esemény, hogy elérjük az Örök Boldogságot, nyilván azt jelenti, hogy van olyan n, hogy S_n bekövetkezik:

$$\text{elérjük az Örök Boldogságot} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

Ennek komplementere:

$$\text{nem érjük el az Örök Boldogságot} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

És akkor most bebizonyítjuk, hogy

Állítás: Ha a kudarcok valószínűségei összességükben annyira kicsik, hogy a belőlük alkotott végtelen sok tagból álló szumma véges értékű, azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) \;<\; \infty$$

akkor

$$P\left(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\right) \;=\; 0$$

$$P\left(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\right) \;=\; 1$$

Bizonyítás: A $K_1, K_2, \ldots$ események sorozata nyilván szűkülő sorozat, hiszen K_{n+1} bekövetkezése maga után vonja K_n bekövetkezését. Ezért

$$P\left(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} P\left(\, K_n \,\right)$$

Mivel

$$K_n \;=\; \bigcup_{i=n}^{\infty} B_i$$

K_n valószínűségére jogos a

$$P\left(\, K_n \,\right) \;\leq\; \sum_{i=n}^{\infty} P\left(\, B_i \,\right)$$

becslés. Nyilvánvaló tény, hogy ha egy pozitív tagokból álló végtelen sor konvergens, akkor a maradék-összegek sorozata 0 -hoz konvergál. Ezért a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\, B_i \,\right) \;<\; \infty$$

feltevés miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\left(B_i\right) \;=\; 0$$

Szántai András – Valószínűségszámítás – Part 2: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ezért

$$P\left(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} P\left(\,K_n\,\right) \;\le\; \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\left(\,B_i\,\right) \;=\; 0$$

vagyis

$$P\left(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\right) \;=\; 0$$

$$P\left(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\right) \;=\; 1$$

5.8.2. Mikor érjük el?

Ha az Örök Boldogság elérése garantált, akkor – természetesen – szeretnénk tudni, hogy mikor kezdődik. Véletlen folyamatról lévén szó, nyilván nem lehet elvárni, hogy egy pontosan és biztosan megmondjuk az Örök Boldogság kezdetét. Meg kell elégednünk azzal,hogy megadjuk a kezdőpillanat eloszlását.

Az alábbiakban szükségünk van a végtelen szorzat fogalmára:

Végtelen szorzatok: Ahogy végtelen összegeket értelmezhetünk véges összegek határértékeként, úgyanúgy végtelen szorzatokat is értelmezhetünk véges szorzatok határértékeként.

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Nyilvánvaló, hogy ha az a_n számok 1 -nél kisebb pozitív számok, akkor a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

határérték létezik, hiszen a $\prod_{i=1}^{n} a_i$ sorozat csökkenő és alulról korlátos.

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}
&\text{az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik} \;=\\
&\quad= \text{ az } (n-1)\text{-ik probléma kudarcos és az } n\text{-ik problémától kezdve mindig sikerünk van} \;=\\
&\quad= B_{n-1} \,\cap\, S_n \;=\; B_{n-1} \,\cap\, \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)
\end{aligned}$$

Így hát

$$\mathrm{P}\left(\text{ az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik }\right) \;=\; \mathrm{P}\left(\; B_{n-1} \,\cap\, \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)\right)$$

Ennek a végtelen sok tényezőből álló metszetnek a valószínűségét a feltételes valószínűségek szorzási szabálya segítségével lehet felírni egy végtelen sok tényezőből álló szorzat alakjában.

Ha az A_i események függetlenek, akkor a független események metszetére vonatkozó szabály alapján ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}\left(\text{ az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik }\right) \;=$$

Vetier András – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

$$= \mathrm{P}(\, B_{n-1}\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,) =$$

$$= (\, 1 - \mathrm{P}(\, A_{n-1}\,)\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,)$$

Mostantól kezdve – ebben az egész fejezetben – feltesszük, hogy az A_i események függetlenek.

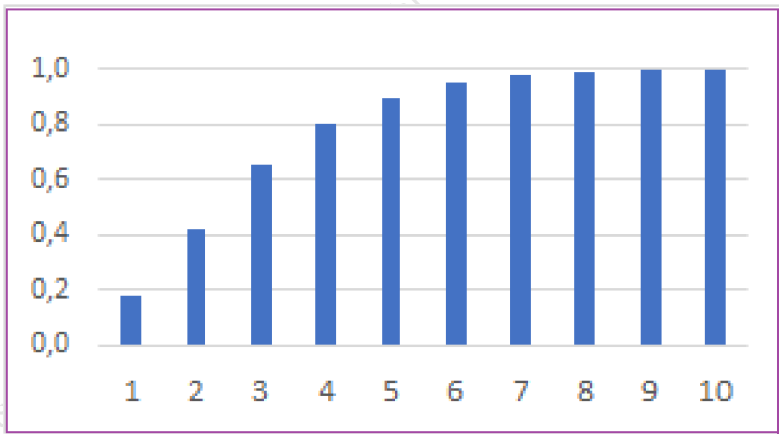
1. Példa: Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{P}(\, A_i\,) = (\, 0.5\,)^{\frac{5}{2^i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Táblázattal és ábrával is megadjuk a $\mathrm{P}(\, A_i\,)$ siker-valószínűségeket:

probléma sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
siker valószínűsége	0.18	0.428	0.65	0.81	0.90	0.95	0.97	0.99	0.99	1.0

Táblázat: *A sikerek valószínűségei az 1. Példában*



24. ábra. *A sikerek valószínűségei az 1. Példában*

Szorzás helyett – mint jól tudjuk – a kitevőben összeget vehetünk:

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,) = \prod_{i=n}^{\infty} (\, 0.5\,)^{\frac{5}{2^i}} = (\, 0.5\,)^{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{5}{2^i}}$$

Itt a kitevőben lévő összeg zárt alakban is megadható:

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{5}{2^i} = \frac{10}{2^n} = \frac{5}{2^{n-1}}$$

Vetier Andrá lószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ezért

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; (\,0.5\,)^{\frac{5}{2^{n-1}}}$$

Tehát

$$\mathrm{P}\Big(\text{ az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik }\Big) \;=$$

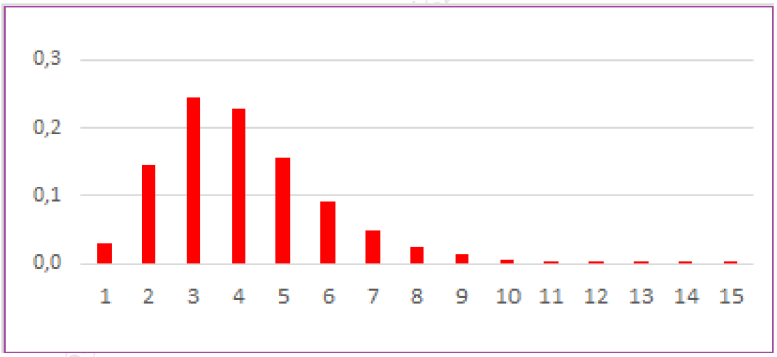
$$= \mathrm{P}(\,B_{n-1}\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=$$

$$= \left(1 \;-\; (\,0.5\,)^{\frac{5}{2^{n-1}}}\right) \cdot (\,0.5\,)^{\frac{5}{2^{n-1}}}$$

Itt pedig táblázattal és ábrával is megadjuk az Örök Boldogság kezdetének eloszlását:

probléma sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
siker valószínűsége	0.03	0.15	0.24	0.23	0.16	0.09	0.05	0.03	0.01	0.01

Táblázat: *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása az 1. Példában*



25. ábra. *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása az 1. Példában*

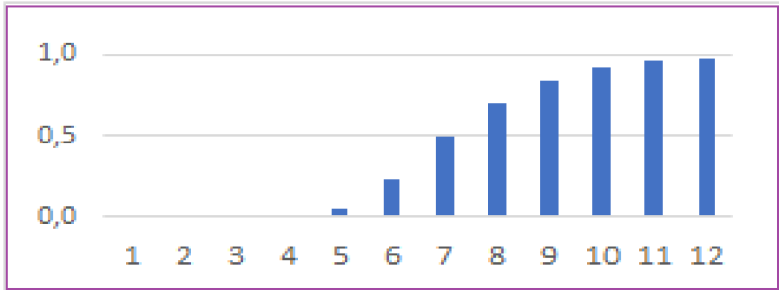
2. Példa: Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Táblázattal és ábrával is megadjuk a $\mathrm{P}(\,A_i\,)$ siker-valószínűségeket:

probléma sorszáma	4	5	6	7	8	9	10	11	12
siker valószínűsége	0.00	0.06	0.24	0.49	0.70	0.84	0.91	1.00	1.00

Táblázat: *A sikerek valószínűségei a 2. Példában*



26. ábra. *A sikerek valószínűségei a 2. Példában*

Szorzás helyett – mint jól tudjuk – a kitevőben összeget vehetünk:

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; \prod_{i=n}^{\infty} (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^i}} \;=\; (\,0.01\,)^{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{20}{2^i}}$$

Itt a kitevőben lévő összeg zárt alakban is megadható:

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{20}{2^i} \;=\; \frac{10}{2^n} \;=\; \frac{20}{2^{n-1}}$$

Ezért

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}$$

Tehát

$$\mathrm{P}\Big(\text{ az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik }\Big) \;=$$

$$= \mathrm{P}(\,B_{n-1}\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=$$

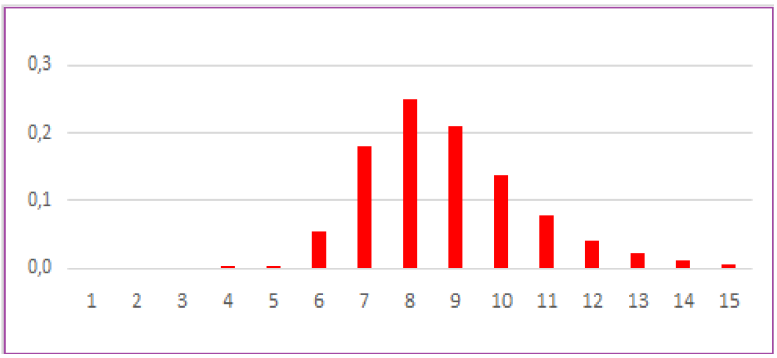
$$= \left(1 \;-\; (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}\right) \cdot (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}$$

Itt pedig táblázattal és ábrával is megadjuk az Örök Boldogság kezdetének eloszlását:

probléma sorszáma	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
siker valószínűsége	0.00	0.05	0.18	0.25	0.21	0.14	0.08	0.04	0.02	0.01	0.01

Táblázat: *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása a 2. Példában*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók



27. ábra. *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása a 2. Példában*

5.8.3. Amikor biztos, hogy nem érjük el

Végtelen szorzatokkal kapcsolatban igaz a következő egyszerű szabály:

Állítás: Ha a_n és b_n egymást 1 -re kiegészítő pozitív számok, (vagyis $a_n + b_n = 1$) minden n -re, akkor a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor egyenlő egy pozítív számmal (vagyis különbözik 0 -tól), ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás: Világos, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_i$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor különbözik nullától, ha a logaritmusokból alkotott

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n)$$

végtelen sor értéke különbözik mínusz végtelentől. Írjunk most a_n helyére $(1 - b_n)$ -t:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - b_n)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\frac{\ln(1+x)}{x}$$

hányados $x \to 0$ esetén 1 -hez tart. Ezért a

$$\ln(1 - b_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségi és diszkrét valószínűségi változók

sorozat aszimptotikusan egyenlő a

$$(-b_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozattal, amiből következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - b_n)$$

sor és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n)$$

sor ekvikonvergens, azaz a két sor egyidejűleg konvergens vagy divergens. Tehát a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor egyenlő egy pozítív számmal (vagyis különbözik nullától), ha a

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n$$

sor konvergens.

Heurisztikus magyarázat: Ahogy az 1-nél kisebb pozitív $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokat összeszorozgatjuk, egy csökkenő $\prod_{i=1}^{n} a_i$ sorozatot kapunk. Ahhoz, hogy ennek a sorozatnak ne 0 legyen a határértéke, nyilván az kell, hogy az a_n számok "közel legyenek" az 1 -hez, vagyis a b_n számok "közel legyenek" a 0 -hoz. Ez – a fenti állítás szerint – abban nyilvánul meg, hogy a b_n számokból álló végtelen sor konvergens.

Állítás: Ha életünk során elénk tárulkozó problémákkal kapcsolatban a sikereink egymástól függetlenül adódnak, azaz az A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ események egymástól függetlenek, és a a kudarcok valószínűségeiből alkotott végtelen sor divergens, azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \;=\; \infty$$

akkor

$$P\big(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\big) \;=\; 0$$

Bizonyítás:

Ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \;=\; \infty$$

akkor bármely n -re

$$\sum_{i=n}^{\infty} P(B_i) \;=\; \infty$$

is teljesül. Ezért, az előző állítás miatt

$$\mathrm{P}(\, S_n \,) \;=\; \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\,=\,n}^{\infty} A_i \right) \;=\; 0$$

Mivel megszámlálhatóan végtelen sok 0 valószínűségű esemény úniója is 0 valószínűségű, kapjuk, hogy

$$P\big(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\big) \;=\; P\left(\bigcup_{n\,=\,1}^{\infty} S_n \right) \;=\; 0$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – egyetemi jegyzet: A valószínűségszámítás alapfogalmai és diszkrét valószínűségi változók

5.9. Optimális taktika előre nem látható helyzetekben *(Extra tananyag)*

5.9.1. Segédfeladat

Számtalanszor fordul elő az életünkben, hogy előre nem látható helyzetekben kell döntenünk. Például amikor használt autót akarunk venni (természetesen jót és olcsót!), és meglehetősen tapasztalatlanul kezdjük nézegetni a kínálatot, akkor egy ideig csak nézegetünk, "szimatolgatunk", aztán egyszercsak ráakadunk egy olyan vételi lehetőségre, ami jobbnak tűnik, mint az összes korábbi, és akkor erre gyorsan lecsapunk, és megvesszük.

Egy ilyen probléma természtesen nagyon összetett lehet: a véletlen jelentős szerepet játszhat benne, és pszichológiai és sok egyéb tényező is beleszólhat a problémába. Mégis, egy egyszerű valószínűségszámítási modell segítségével meglepően érdekes és szép eredményre juthatunk. Ezzel a modellel foglalkozunk ebben a részben. Előkészítésként vesszük az alábbi problámát.

Tekintsünk 10 cédulát, 1-től 10 -ig számozva őket. A 10 -es cédulát, a legnagyobb számot nevezzük: *királynő*nek. Rakjuk le a cédulákat balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintsünk egy véletlenszerű permutációt. Például egy lehetséges permutáció:

$$6,\ 5,\ 7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 2,\ 10,\ 9,\ 3$$

A királynő, ebben a permutációban a 8 -ik pozícióra került. Keressük meg most a királynő előtti legnagyobb számot! Ez most a 8 -as, ami a 6 -ik pozíción áll. A királynő előtti legnagyobb számot *szolgáló lány*nak nevezzük. Tehát most a szolgáló lány a 8-as, és ő a 6 -ik pozíción áll. Jelöljük X -szel a királynő pozícióját, Y -nal a szolgáló lány pozícióját. A fenti példában tehát $X = 8, Y = 6$. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1-ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0 -nak vesszük.

Segédfeladat: Rögzítsünk egy c számot, mely eleget tesz az $1 \leq c \leq 9$ egyenlőtlenségeknek. Kiszámoljuk a

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ )$$

valószínűséget, vagyis annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a királynő pozíciója nagyobb c -nél, és a szolgálólány pozíciója kisebb vagy egyenlő c -nél. Ez a valószínűség – természetesen – függ c -től, ezért a valószínűséget c -vel kifejezve adjuk meg.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ X = k \ \text{ és } \ Y \leq c\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ X = k\ )\ \mathrm{P}(\ Y \leq c \mid X = k\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \frac{1}{10}\ \frac{c}{k-1} \\
&= \frac{1}{10} \sum_{k=c+1}^{10} \frac{c}{k-1}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: 10 cédula helyett vegyünk most 100 cédulát, megszámozva őket 1 -től 100 -ig. Most a 100 -as cédulát hívjuk királynőnek. Ha lerakjuk a 100 cédulát balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintünk egy véletlenszerű permutációt, akkor a királynő előtti számok között a legnagyobbat hívjuk szolgálólánynak. Jelöljük

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségszámítás diszkrét valószínűségi mezőkben

X -szel a királynő pozícióját, Y -nal a szolgáló lány pozícióját. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1 -ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0 -nak vesszük. Válasszunk most is egy c számot, mely eleget tesz az $1 \leq c \leq 99$ egyenlőtlenségeknek.

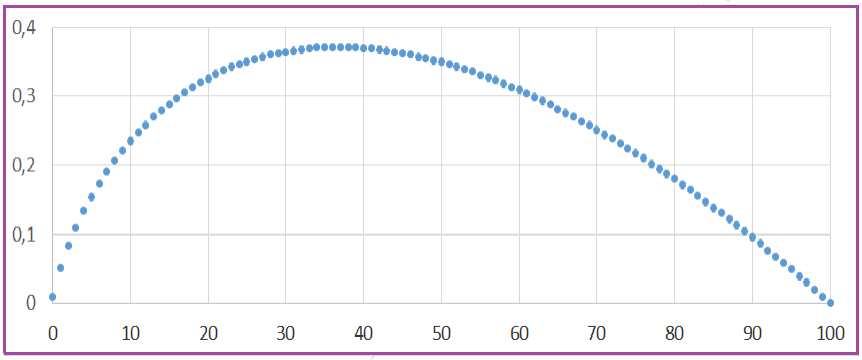
100 cédula esetén is kiszámoljuk a a hasonlóképpen értelmezett

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ )$$

valószínűséget. Az eredmény kézenfekvő:

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ ) = \frac{1}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{c}{k-1}$$

Ez a képlet fontos lesz a következő példa megoldásában, ezért minden 0 és 100 közötti c -re kiszámoltuk Excellel, és a numerikus eredményeket táblázatba foglaltuk. A táblázat alapján grafikont is készítettünk, ezt láthatjuk "A kiszámított valószínűség c függvényében" című ábrán. Magát a táblázatot – a hellyel való spórolás miatt – csak rövidítve adjuk meg. A táblázatnak csupán az elejét, a közepének egy részét és a végét mutatjuk:



28. ábra. *A kiszámított valószínűség c függvényében*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. – ... – ... – ...

c	$\frac{1}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{c}{k-1}$
0	0.010
1	0.052
2	0.084
3	0.110
4	0.134
5	0.155
$\vdots$	$\vdots$
35	0.370 71
36	0.371 01
37	0.371 04
38	0.370 80
39	0.370 30
40	0.369 53
$\vdots$	$\vdots$
95	0.049
96	0.039
97	0.030
98	0.020
99	0.010
100	0.000

Táblázat: *Valószínűségek*

Veigl Árpád – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Az ábráról és a táblázatból látjuk, hogy a maximális valószínűség $c = 37$ -nél adódik, és hogy a maximális valószínűség értéke hat tizedesre kerekítve 0.371043 , két tizedesre kerekítve 0.37 . Ezt a tényt használni fogjuk a következő – világhírnek örvendő – feladatban.

5.9.2. Szindbád és a háremhölgyek

Egyszer a török szultán – jutalomképpen – felajánlotta Szindbádnak, a híres nőcsábásznak, hogy 100 gyönyörű hármehölgye közül választhat egyet, és a kiválsztott hölggyel eltölhet egy éjszakát.

Szindbád soha nem látta korábban a hölgyeket, most is csak nagyon korlátozott körülmények között találkozhat velük, és nagyon szigorú szabályok szerint választhat közülük:

- A hölgyek egyesével jelennek meg Szindbád előtt véletlenszerű sorrendben. (Minden lehetséges sorrend ugyanakkora valószínűségű – ezt a tényt Szindbádnak előre megmondták.)
- Szindbád csak egyszer mondhatja az előtte éppen mutatkozó hölgyre, hogy "őt választom".
- Akit Szindbád nem választ ki a megjelenésekor, azt már később "visszamenőleg" nem kérheti. Választását később nem módosíthatja.

Feltételezzük, hogy a háremhölgyek között létezik egy jól definiált – mindenki számára nyilvánvaló – szépség sorrend: van közöttük egy legszebb, egy második legszebb, és így tovább egy 100-ik legszebb. Bármely két hölgy esetében egyértelmű, hogy melyikük a szebb.

Szindbád, aki – ismételjük – nem ismeri a hölgyeket, és most is csak a megjelenésükkor látja őket, arra törekszik, hogy elcsípje a legszebbet. Ha a procedúra végén kiderül, hogy ez sikerült neki, akkor – hiúsága beteljesül, és akcióját sikeresnek könyveli el, ha nem, akkor az akció nem ért semmit a számára . (Szindbád ilyen. Úgy kell neki!)

Hogyan válasszon Szindbád? Úgy tűnhet, hogy a siker elérésének nagyon kicsi az esélye. Valóban, ha csak úgy véletlenszerűen választ egy hölgyet, mondjuk a legelsőt, vagy kisorsolja előre, hogy hányadikat, akkor 0.01 az esélye annak, hogy a legszebb jut neki.

Ha viszont okosan taktikázik, akkor a bölcsesség meglepően nagy valószínűséggel sikerre viheti akcióját! Ez fog kiderülni az itt következő megoldásból! Ilyen bölcsesség jól jön mindenkinek – nézzük máris a megoldást!

Megoldás: Szindbád így gondolkodhat: Képzeletben választ egy c számot $(0 \leq c \leq 99)$, és előre eldöni magában, hogy az első c hölgy közül semmiképpen sem választ, csak megfigyeli őket, és megjegyzi, milyen szép volt közülük a legszebb. Aztán a $(c+1)$ -iknek megjelenő hölgytől kezdve már csak arra figyel, hogy felbukkan-e olyan hölgy, akinek szépsége meghaladja az első c hölgy során kifigyelt maximumális szépséget. Ha felbukkan ilyen hölgy, akkor arra lecsap, ha nem, akkor nem választ senkit. Nevezzük ezt a taktikát c *-taktikán*ak!

A segédfeladatunkra támaszkodva könnyű megadni, hogy ezzel a c -taktikával mi a valószínűsége annak, hogy Szindbád elcsípi a legszebb hölgyet. Felhasználva a korábban definiált királynő és szolgálólány fogalmát, és a velük kapcsolatban bevezetett X és Y valószínűségi változókat, azt kell az Olvasónak meggondolni, hogy

az az esemény, hogy

Szindbád a c -taktikával elcsípi a legszebb hölgyet

akkor és csak akkor következik be, ha

a királynő pozíciója $> c$ és a szolgálólány pozíciója $\leq c$

esemény bekövetkezik.

Ennek az eseménynek a valószínűségét a segédfeladathoz fűzött megjegyzésben megadtuk:

$$\frac{c}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{1}{k-1}$$

A képlettel kapcsolatban készített táblázatból és ábrából világosan kiderül, hogy ha Szindbád a $c = 37$ -es taktikát alkalmazza, akkor 0.37 valószínűséggel elcsípi a legszebb hölgyet.

A 0.37 valószínűség – bizony – nincs túl közel az áhított 1 -hez, de

- lényegesen nagyobb az "ész nélküli taktika" 0.01 -es siker valószínűségénél, és
- be lehet bizonyítani, hogy nem létezik olyan taktika, ami 0.37 -nél nagyobb valószínűséggel vezetne sikerre.

Be lehet látni, hogy hasonló helyzetekben is a követendő optimális taktika így fest: a lehetőségek 37 % -át csak nézegetni kell úgy, hogy közülük nem választunk, de megjegyezzük a "szépség", "jóság" maximumát, a 37 % elengedése után viszont arra kell lecsapni, amikor a "szépség", "jóság" meghaladja a korábban kifigyelt maximumot. Ezzel a taktikával 0.37 valószínűséggel elcsípjük a lehetőségek közül a "legszebbet", "legjobbat".

5.10. Feltételes eloszlás egy eseményen belül

Példa: Fiatal házaspár egy vagy több gyerekkel. Korábbi példánk szerint, ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az

$$X = \text{gyerekek száma}$$

valószínűségi változót, akkor a valószínűségi változó eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Gyerekek számának eloszlása*

Egyszerű összeadással kapjuk, hogy a $X \geq 1$ esemény valószínűsége $P(\ X \geq 1\ ) = 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8$.

Ha a véletlenszerűen választott fiatal párról tudjuk, hogy van gyerekük, de nem tudjuk, hogy hány, akkor a gyerekek számának lehetséges értékei $1, 2, 3$. Ezeknek a lehetséges értékeknek a feltételes valószínűségeit táblázatba rendezve jutunk az X valószínűségi változó $X \geq 1$ **feltétel melletti (feltételen belüli) feltételes eloszlás**ához:

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{0.4}{0.8}$	$\frac{0.3}{0.8}$	$\frac{0.1}{0.8}$

azaz

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Táblázat: *A gyerekek számának eloszlása, ha van gyerek*

Általánosan is megfogalmazzuk a példában leírtakat: Egy

$$\{p(x),\ x \in S\}$$

eloszlás és egy $A \subseteq S$ halmaz esetén a

$$\{\frac{p(x)}{P(\ A\ )},\ x \in A\}$$

eloszlást **az** A **esemény bekövekezése melletti feltételes eloszlás**ának nevezzük. Ha az eredeti eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor a feltételes eloszlást **az** X **valószínűségi változónak az** A **-n belüli eloszlásá**nak is hívjuk.

Nyilvánvaló, hogy egyenletes eloszlás esetén minden feltételes eloszlás ugyancsak egyenletes.

Példa: Pédául ha szabályos dobókocka esetén A azt jelenti, hogy 5 -nél kisebbet dobok, akkor e feltétel melletti feltételes eloszlás így fest:

Vrabecz András — Valószínűségszámítás — rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi eloszlások

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Táblázat: *Szabályos dobókockával dobott szám feltételes eloszlása, ha feltétel az, hogy 5-nél kisebbet kapunk*

5.11. Feltételes eloszlások rendszere síkbeli eloszlás esetén

Először konkrét példákat veszünk, aztán megismerkedünk a feltételes eloszlások rendszerének általános fogalmával.

5.11.1. Példák feltételes eloszlások meghatározására

1. Példa: Kékek számának eloszlása, ha tudjuk, hogy hány pirosat húztunk (visszatevés nélkül). Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Ott meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán, hogy hogyan lehet (X, Y) eloszlásából meghatározni Y feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy X értéke adott konkrét x érték?

1. Megoldás (numerikus táblázattal): A feltételes eloszlások tagjai feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy (X, Y) eloszlásának táblázatából (melyet korábban már megadtunk) a megfelelő $\mathrm{P}(X = x, Y = y)$ valószínűséget elosztottuk X eloszlásának táblázatából (melyet korábban szintén megadtunk) a megfelelő $\mathrm{P}(X = x)$ tagjával.

Y feltételes eloszlásai adott X értékek mellett:

y										
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.040	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.145	0.085	0.037	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.281	0.231	0.160	0.084	0.026	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.300	0.328	0.320	0.266	0.174	0.070	0.000	0.000	0.000	
2	0.173	0.242	0.313	0.369	0.381	0.321	0.176	0.000	0.000	
1	0.049	0.086	0.143	0.224	0.327	0.435	0.504	0.429	0.000	
0	0.005	0.012	0.024	0.048	0.093	0.174	0.319	0.571	1.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Y feltételes eloszlásai adott X értékek mellett*

Vetier András – Valószínűségszámítás és statisztika – Valószínűségi és diszkrét valószínűségi változók

Megjegyzés: Ebben a táblázatban – természetesen – minden oszlopra igaz, hogy az oszlopban lévő számok összege 1 -gyel egyenlő.

2. Megoldás (a feltételes valószínűség definíciója alapján):

Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget:

$$\mathrm{P}(\,Y\,=\,2\,|\,X\,=\,3\,)\,=\,\frac{\mathrm{P}(\,X\,=\,3\,,\,Y\,=\,2\,)}{\mathrm{P}(\,X\,=\,3\,)}\,=\,\frac{\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{3}\binom{35}{5}}{\binom{45}{8}}}\,=\,\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{35}{5}}\,=\,\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{35}{8-3}}$$

Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy y darab kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y\,=\,y$, ugyanaz a képlet, csak a 2-es helyére y -t írunk:

$$\mathrm{P}(\,Y\,=\,y\,|\,X\,=\,3\,)\,=\,\frac{\mathrm{P}(\,X\,=\,3\,,\,Y\,=\,y\,)}{\mathrm{P}(\,X\,=\,3\,)}\,=\,\frac{\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{y}\binom{20}{8-3-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{3}\binom{35}{8-3}}{\binom{45}{8}}}\,=\,\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-3-y}}{\binom{35}{8-3}}$$

Ha az $X\,=\,3$ feltételt kicseréljük az általánosabb $X\,=\,x$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűséget így adhatjuk meg:

$$\mathrm{P}(\,Y\,=\,y\,|\,X\,=\,x\,)\,=\,\frac{\mathrm{P}(\,X\,=\,x\,,\,Y\,=\,y\,)}{\mathrm{P}(\,X\,=\,x\,)}\,=\,\frac{\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{x}\binom{35}{8-x}}{\binom{45}{8}}}\,=\,\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

3. Megoldás (finomítással nyert feltételes valószínűségekkel): Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget. Például az $X\,=\,3$ feltétel azt jelenti, hogy a kivett golyók között 3 darab piros van. Most finomítsuk a feltételt azzal, hogy megszabjuk, melyik 3 piros golyó legyen a kivettek között, és melyik 5 maradjon a dobozban. Ez a feltétel csak annyi teret hagy a véletlennek, mintha 35 darab golyó lenne a dobozban, közülük 15 darab lenne kék, 20 darab lenne fehér, és kivennénk 5 darab golyót visszatevés nélkül. Eme finomabb feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 2 kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y\,=\,2$, a jól ismert képlet:

$$\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{5-2}}{\binom{35}{5}}$$

Mivel a felírt valószínűség nem függ attól, hogy melyik 3 piros golyó van a kihúzottak között, az $X\,=\,3$ feltétel melletti feltételes valószínűséget is a felírt képlet adja meg. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy y darab kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y\,=\,y$, ugyanez a képlet, csak a 2-es helyére y -t írunk:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{5-y}}{\binom{35}{5}}$$

Ha az $X\,=\,3$ feltételt kicseréljük az általánosabb $X\,=\,x$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűségre ez adódik:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

2. Példa: Pirosak számának eloszlása, ha tudjuk, hogy hány kéket húztunk? Gondoljuk meg, hogy hogyan lehet (X,Y) eloszlásából meghatározni X feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy Y értéke adott konkrét y érték.

Vetier András – Valószínűségszámítás – Valószínűségelmélet és diszkrét valószínűségi változók

1. Megoldás: A feltételes eloszlások tagjai nyilván feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy (X, Y) eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(\ X = x, Y = y\ )$ valószínűséget elosztottuk Y eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(Y = y)$ tagjával:

X feltételes eloszlásai adott Y értékek mellett:

y										
8	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.667	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.437	0.460	0.103	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.281	0.468	0.222	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.177	0.416	0.312	0.088	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.109	0.340	0.360	0.160	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	
2	0.065	0.261	0.367	0.230	0.067	0.008	0.000	0.000	0.000	
1	0.038	0.190	0.343	0.286	0.118	0.024	0.002	0.000	0.000	
0	0.022	0.132	0.298	0.318	0.174	0.049	0.007	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *X feltételes eloszlásai adott Y értékek mellett*

Megjegyzés: Ebben a táblázatban – természetesen – minden sorra igaz, hogy a sorban lévő számok összege 1.

2. Megoldás (a feltételes valószínűség definíciója alapján): Az előző feladat második megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett az $X = x$ esemény feltételes valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X = x \mid Y = y\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ X = x\ ,\ Y = y\ )}{\mathrm{P}(\ Y = y\ )} = \frac{\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{15}{y}\binom{30}{8-y}}{\binom{45}{8}}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

3. Megoldás (finomítással nyert feltételes valószínűségekkel): Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget. Például az $Y = 2$ feltétel azt jelenti, hogy a kivett golyók között 2 darab kék van. Most finomítsuk a feltételt azzal, hogy megszabjuk, melyik 2 kék golyó legyen a kivettek között, és melyik 13 maradjon a dobozban. Ez a feltétel csak annyi teret hagy a véletlennek, mintha 30 darab golyó lenne a dobozban, közülük 10 darab lenne piros, 20 darab lenne fehér, és kivennénk 6 darab golyót visszatevés nélkül. Eme finomabb feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 3 piros golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $X = 3$, a jól ismert képlet:

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{20}{6-3}}{\binom{30}{6}}$$

Mivel a felírt valószínűség nem függ attól, hogy melyik 2 kék golyó van a kihúzottak között, az $Y = 2$ feltétel melletti feltételes valószínűséget is a felírt képlet adja meg. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy x darab piros golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $X = x$, ugyanez a képlet, csak a 3-as helyére x -t írunk:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{20}{6-x}}{\binom{30}{6}}$$

Ha az $Y = 2$ feltételt kicseréljük az általánosabb $Y = y$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűségre ez adódik:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

Vetter András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségszámítás diszkrét valószínűségi változók

5.11.2. Általános összefüggések

Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók, akkor együttesen egy kétdimenziós diszkrét (X, Y) valószínűségi változót határoznak meg. Ennek a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változónak a súlyfüggvényét jelöljük $p(x, y)$ -nal, vagyis

$$p(x, y) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;=\; x, Y \;=\; y)\;)$$

X súlyfüggvényét $p_1(x)$ -szel, Y súlyfüggvényét $p_2(y)$ -nal jelöljük.

Feltételes súlyfüggvény. Ha feltételezzük, hogy $X \;=\; x$, akkor az Y valószínűségi változó $p_{2|1}(y|x)$ feltételes súlyfüggvénye osztással adódik:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{p(x, y)}{p_1(x)}$$

Hasonlóan, ha feltételezzük, hogy $Y \;=\; y$, akkor az X valószínűségi változó $p_{1|2}(x|y)$ feltételes súlyfüggvénye is osztással adódik:

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{p(x, y)}{p_2(y)}$$

Példa: Az előző oldalakon meghatároztuk az ottani problémához tartozó feltételes súlyfüggvények képleteit:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

Annak a valószínűsége, hogy Y értéke egy $[y_1, y_2]$ intervallumba esik, feltéve, hogy $X \;=\; x$, nyilván így számolható ki:

$$\mathrm{P}(\; y_1 \;\leq\; Y \;\leq\; y_2 \mid X \;=\; x\;) \;=\; \sum_{y=y_1}^{y_2} p_{2|1}(y|x)$$

Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy X értéke egy $[x_1, x_2]$ intervallumba esik, feltéve, hogy $Y \;=\; y$, nyilván így számolható ki:

$$\mathrm{P}(\; x_1 \;\leq\; X \;\leq\; x_2 \mid Y \;=\; y\;) \;=\; \sum_{x=x_1}^{x_2} p_{1|2}(x|y)$$

Feltételes eloszlások (súlyfüggvények) rendszere

Ha minden x mellett tekintjük a $p_{2|1}(y|x)$ feltételes eloszlást (súlyfüggvényt), akkor eloszlásoknak (súlyfüggvényeknek)egy rendszerét kapjuk, amit az Y valószínűségi változó X -re vonatkozó **feltételes eloszlásai (súlyfüggvényei) rendszerének** nevezünk.

Ha minden y mellett tekintjük a $p_{1|2}(x|y)$ feltételes eloszlást (súlyfüggvényt), akkor eloszlásoknak (súlyfüggvényeknek)egy rendszerét kapjuk, amit az X valószínűségi változó Y -ra vonatkozó **feltételes eloszlásai (súlyfüggvényei) rendszerének** nevezünk.

Móri András – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

5.12. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól!

A valószínűségszámítás tanulása során szinte biztos, hogy a tanuló találkozik olyan feladattal, melyben a feltételek, körülmények nincsenek pontosan megadva. Ebből persze félreértések adódnak, viták támadnak, melyek során a diák önbizalma alaposan sérülhet. Erre a kellemetlen lehetőségre mutatunk itt egy példát.

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? *(Ilyen címmel szerepelt már egy feladat ennek a fejezetnek az elején, az 5.1 alfejezetben. Most ennek a feladatnak egy módosításával egy másik, de a korábbihoz hasonló, eléggé elterjedt és népszerű változatával foglalkozunk. Amikor két hasonló, de mégis különböző feladatot összekevernek, összemosnak, vagy egy feladat nincs pontosan megfogalmazva, és ezért többféleképpen is lehet azt érteni, komoly nézeteltérések, viták, "élet-halál harcok" szoktak támadni még valószínűségszámításban járatos emberek között is!)*

Feladat:*(Ajtó nyitogatós változat.)* Egy véletlenszerűen választott ismeretlen kétgyerekes családhoz becsönget valaki. A sors úgy hozza, hogy fiú nyit ajtót. Mi a valószínűsége annak, hogy a testvére lány, vagyis a fiú mellett lány is van a családban?

Első megoldás: Ha fiú nyit ajtót, akkor ez a tény jelzi, hogy a családban van fiú. A fejezet elején kiszámoltuk, hogy ilyen feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $2/3$ -dal egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; 2/3$$

Másodi megoldás: Az ajtót nyitó gyerek testvérének neme független az ajtót nyitó gyerek nemétől. Ezért annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $1/2$ -del egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; 1/2$$

Kérdés: Melyik a jó megoldás?

Válasz: Mindkét megoldás jó lehet, ha a feladatot megfeleően pontosítjuk.

1. Ha olyan társadalomban élünk, ahol a fiúk udvariasak, és – fiú-lány testvérpár esetén – lánytesvérüket megelőzve pattannak ajtót nyitni, akkor az A) megoldás a jó:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; 2/3$$

2. Ha mindig az idősebb gyerek megy ajtót nyitni, vagy ha mindig a fiatalabb, vagy ha igazságos sorsolással döntik el, hogy ki menjen ajtót nyitni, akkor a B) megoldás a jó:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; 1/2$$

3. Ha pedig a társadalmi szokások miatt – fiú-lány testvérpár esetén – a lányok nyitnak ajtót, akkor nyilván a kérdéses feltételes valószínűség 0 :

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; 0$$

4. Kis fantáziával – ennyi fantázia a valószínűségszámítás tanulása során nélkülözhetetlen! – el lehet képzelni olyan társadalmat is, ahol fiú-lány testvérpár esetén p valószínűséggel a fiú, $(1-p)$ valószínűséggel a lány megy ajtót nyitni.

   Ez a "véletlenítés" megvalósulhat például úgy, hogy

   (a) p értékének megfelelően a fiú és a lány sorsot húz, és úgy is, hogy

   (b) feltételezzük, hogy a társadalomban a kétgyerekes családok p -ed részében a fiú az ajtó nyitogató, $(1-p)$ -ed részében a lány.

Vetese András – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ekkor – mint mindjárt megmutatjuk – a szóban forgó feltételes valószínűség 0 és $2/3$ között akármilyen értékű is lehet, hiszen az értékét az alábbi képlet adja meg:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} \;=\; \frac{2p}{1+2p}$$

Nyilvánvaló, hogy $p = 0$ esetén ez a képlet 0 -t ad, $p = 1$ esetén $2/3$ -ot.

A képlet levezetése:

$$\text{P(van lány | fiú nyit ajtót)} \;=$$

$$= \frac{\text{P(van lány ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(két fiú van)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | két fiú van)} + \text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}$$

$$= \frac{0.5 \cdot p}{0.25 \cdot 1 + 0.5 \cdot p} = \frac{2\,p}{1\;+\;2\,p}$$

Konklúzió: Jobb, ha elkerüljük az ilyen – nem kellően pontosan definiált – feladatokat! Természetesen az is jó – ha van rá idő és lehetőség – ha megfelelő nehézségű példákon megtanítják a diákoknak, hogy egyrészt észrevegyék, amikor egy feladatban a feltételek nincsenek pontosan megadva, másrészt érezzék, hogy mit is kell pontosítani ahhoz, a hogy a feladat korrekt legyen.

Vetró Ambrus – Valószínűségszámítás – Ész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

6. Függetlenség

6.1. Események függetlensége

Két esemény függetlensége: Azt mondjuk, hogy a B esemény független az A eseménytől, ha az A, illetve az $\overline{A}$ bekövetkezésének feltétele mellett a B esemény feltételes valószínűsége megegyezik a feltétel nélküli valószínűségével:

$$\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ B\ )$$

$$\mathrm{P}(\ B \mid \overline{A}\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ B\ )$$

B -nek A -tól való függetlensége azt fejezi ki, hogy A bekövetkezése, illetve nem bekövetkezése sem nem növeli, sem nem csökkenti a B bekövetkezésének az esélyét.

A definícióban A és $\overline{A}$ egyforma szerepet töltenek be, ezért az, hogy B független A -tól, ugyanazt jelenti, mint az, hogy B független $\overline{A}$ -től. Sőt, a fenti egyenlőségek nyilván ekvivalensek a komplementerekre vonatkozó

$$\mathrm{P}(\ \overline{B} \mid A\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ \overline{B}\ )$$

$$\mathrm{P}(\ \overline{B} \mid \overline{A}\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ \overline{B}\ )$$

egyenlőségekkel, vagyis az a tény, hogy B független A, tól, illetve $\overline{A}$ -től együtt jár azzal, hogy $\overline{B}$ is független A -tól, illetve $\overline{A}$ -től. Ezért beszélhetünk úgy is, hogy a B, $\overline{B}$ pár független az A, $\overline{A}$ pártól.

Nem nehéz megmutatni, hogy a fenti $2+2 \ = \ 4$ egyenlőség közül akármelyik implikálja a többit, ezért a függetlenség definiciójául szolgálhat az egyetlen

$$\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ B\ )$$

egyenlőség is. Ha itt a baloldali feltételes valószínűséget hányadosként írjuk fel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{P}(\ A \cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )} \ = \ \mathrm{P}(\ B\ )$$

amiből szorzással az A -ra, B -re nézve szimmetrikus

$$\mathrm{P}(\ A \cap B\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ A\ ) \cdot \mathrm{P}(\ B\ )$$

egyenlőség adódik. Tehát a függetlenség szimmetrikus reláció: ha B független A -tól, akkor A is független B -től. Ezért függetlenség esetén azt mondhatjuk, hogy az események **függetlenek egymástól**. Könnyű belátni, hogy a

$$\mathrm{P}(A \cap B) \ = \ \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

egyenlőségből következnek a

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \ = \ \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})$$

$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) \ = \ \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \ = \ \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})$$

egyenlőségek is. Ezért a függetlenség definíciójául az egyetlen

$$\mathrm{P}(A \cap B) \ = \ \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

egyenlőség, vagy alábbi négy egyenlőség

$$\mathrm{P}(A \cap B) \ = \ \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \ = \ \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})$$

Vetier András – Valószínűségszámítás I. rész: Valószínűségelmélet és diszkrét valószínűségi változók

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}) \end{aligned}$$

is szolgálhat.

Három esemény függetlensége: Kettőnél több eseménnyel kapcsolatban a függetlenség fogalmának definíciója bonyolultabb. Ugyanis már három esemény kapcsán is előfordulhat, hogy *közülük bármely kettő független egymástól, de a három esemény között determinisztikus kapcsolatban áll fenn*. Erre a lehetőségre a fejezet végén található feladatok között egy példával is felhívjuk a figyelmet.

Az A_1, A_2, A_3 események sorozatát akkor nevezzük függetlennek, ha

- A_2 független A_1 -től, és
- A_3 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2 eseményekből előállítható az eseményekre vonatkozó komplementer képzéssel és metszet képzés művelettel, ami – részletesen kiírva – az alábbiakat jelenti:
  - A_3 független az $A_1 \cap A_2$ eseménytől, azaz
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_3 \mid A_1 \cap A_2\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1 \cap A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \end{aligned}$$
  - A_3 független az $A_1 \cap \overline{A_2}$ eseménytől, azaz
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_3 \mid A_1 \cap \overline{A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1 \cap \overline{A_2}}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \end{aligned}$$
  - A_3 független az $\overline{A_1} \cap A_2$ eseménytől, azaz
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1} \cap A_2\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{\overline{A_1} \cap A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \end{aligned}$$
  - A_3 független az $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ eseménytől, azaz
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \end{aligned}$$

Akit az ilyesfajta logikai okoskodások érdekelnek, figyelmes elemzéssel kigondolhatja, hogy mindennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az alábbi 8 egyenlőség kell teljesüljön:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \end{aligned}$$

Ezért a függetlenség definíciójául ez a 8 egyenlőség szolgálhat. Ezek az egyenlőségek A_1, A_2, A_3 -re nézve szimetrikusak, ezért az A_1, A_2, A_3 események sorozatának felsorolásában a sorrendnek nincs szerepe. Ezért ha a felsorolt szorzási szabályok fennállnak, egyszerűen csak azt mondhatjuk, hogy az A_1, A_2, A_3 események rendszere független rendszer, vagy – rövidebben fogalmazva - az A_1, A_2, A_3 események függetlenek egymástól.

Több esemény függetlensége: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események sorozatát akkor nevezzük függetlennek, ha

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

- A_2 független A_1 -től, és
- A_3 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2 eseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel,
- A_4 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2, A_3 eseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel,

$\vdots$

- és így tovább, A_n független minden olyan eseménytől, ami az $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ eeseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel.

Akit az ilyesfajta logikai okoskodások érdekelnek, figyelmes elemzéssel kigondolhatja, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy teljesüljön az a 2^n egyenlőség, melyek közül az első így fest:

$$\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A_1\ )\,\mathrm{P}(\ A_2\ )\,\mathrm{P}(\ A_3\ )\,\mathrm{P}(\ A_4\ )\ \ldots\ \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

a többi pedig úgy, hogy bizonyos A_i -k helyett mindkét oldalon azok komplementerét vesszük, például így:

$$\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n\ )\ =\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ )\,\mathrm{P}(\ A_2\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ )\,\mathrm{P}(\ A_4\ )\ \ldots\ \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

a legutolsó, 2^n -ik egyenlőség pedig az alábbi:

$$\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \ldots \overline{A_n}\ )\ =\ \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_4}\ )\ \ldots\ \mathrm{P}(\ \overline{A_n}\ )$$

Ezek az egyenlőségek $A_1, A_2, \ldots A_n$ -re nézve szimetrikusak, ezért az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események sorozatának felsorolásában a sorrendnek nincs szerepe. Egyszerűen csak azt mondhatjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események függetlenek, ha a felsorolt szorzási szabályok fennállnak.

1. Megjegyzés: Amikor azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események függetlenek, akkor ez a kijelentés nem az egyes eseményeket minősíti külön-külön, hanem az eseményeknek a rendszerét, a köztük lévő viszonyt ahhoz hasonlóan, mint amikor azt mondjuk, hogy János, Józsi és Jakab jó barátok.

2. Megjegyzés: Egyes helyzetekben az események függetlensége magától értetődik, a valóságos körülményekből fakad. Ilyenkor ha az egyes események valószínűségeit ismerjük, akkor a szorzási szabály segítségével az események és komlementereik metszeteinek a valószínűségeit ki tudjuk számolni. Például ha három szabályos dobókockával szabályosan gurítunk, egy pirossal, egy fehérrel és egy zölddel, akkor

- a *pirossal hatost dobunk*,
- a *fehérrel nem hatost dobunk*,
- a *zölddel párosat dobunk dobunk*

események érezhetően függetlenek, hiszen a három dobókocka között semmi kölcsönhatás nincs: nincsenek összekötve, nem vonzzák vagy taszítják egymást. Ezért

- *"a pirossal hatost dobunk, és a fehérrel nem hatost dobunk és a zölddel párosat dobunk"*

esemény valószínűsége: $\frac{1}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{6}\ =\ \frac{15}{216}$

3. Megjegyzés: Más esetekben valamilyen számolás eredményeképpen adódik ki, hogy az eseményeink függetlenek, és ez a tény esetleg meglephet minket, vagy akár fontos is lehet egy bennünket érdeklő probléma szempontjából.

Példa a Fibonacci számokkal: Unokám még alsó tagozatos kisdiák, de egy – a matematika iránt érdeklődő – társa elbűvölte a Fibonacci számok szépségeivel. Mint ismeretes, az első két Fibonacci szám az 1 és a 2 , a többit pedig úgy kapjuk, hogy az őt megelőző kettőt összeadjuk. Íme az első néhány Fibonacci szám:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

Vetró – Indák — Valószínűség és statisztika — Valószínűségszámítás és diszkrét valószínűségi változók

Amikor társasjátékot játszunk, és a dobókockával valaki Fibonacci számot dob, unokám örül ennek. Annak a valószínűsége, hogy a dobókockával Fibonacci számot dobunk, nyilván $4/6$, hiszen az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok között négy Fibonacci szám rejlik: $1, 2, 3, 5$.

Gyakran játszunk olyan társasjátékot, amikor a dobott számok összege szerint halad a játék. Unokám látja, hogy ezekben a játékokban a 7 a 2 és a 12 között félúton van, és az örömöt adó Fibonacci számokat is jól tudja: $2, 3, 5, 8$.

Igaz, nem tudja még, hogy hogyan kell valószínűségeket számolni, de a sok játék alapján érzi, hogy a Fibonacci számok esélye nagyobb, mint a 7 -é.

Arra alapozva, hogy az öt lehetséges Fibonacci szám közül csak a 8 -as nagyobb a 7 -nél, pár napja azt súgta nekem, hogy ha valaki csak annyit mondana el neki, hogy 7 -nél nagyobb számot kapott, akkor ő kevesebb esélyt érezne arra, hogy Fibonacci szám jött ki, mintha az ellenkezőjét mondaná, vagy semmit sem mondana az összegről. Ön győződjön meg róla, hogy unokám itt nem jól érzi az esélyeket: *az az esemény, hogy két kockával dobva az összeg Fibonacci szám, és az az esemény, hogy az összeg 7 -nél nagyobb,* ***függetlenek egymástól****!*

Megoldás: A számolás legyen az Olvasó feladata! A megoldáshoz ötletként csak annyit súgunk, hogy a két kockával kapcsolatos táblázatba mindenhova beírtuk a dobott számok összegét, és vastagon írtuk a Fibonacci számokat:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	7
2	**3**	4	**5**	6	7	**8**
3	4	**5**	6	7	**8**	9
4	**5**	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

Táblázat: *A dobott számok összege*

4. Megjegyzés: A felületes diák, aki gyakran a hétköznapi szóhasználatból próbálja kitalálni a matematikai fogalmak jelentését, az események függetlenségére esetleg – hibásan – úgy gondol, mintha azt jelentené, hogy "az eseményeknek nincs közük egymáshoz", nem tudnának egyidejűleg bekövetkezni, kizárják egymást. Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy **pozitív valószínűségű független események nem lehetnek kizáróak**, hiszen metszetük valószínűsége a valószínűségek szorzata, vagyis pozitív, tehát a metszet nem a lehetetlen esemény.

Vetier András: Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

6.2. Valószínűségi változók függetlensége

Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó független az X valószínűségi változótól, ha minden x és y lehetséges érték esetén az $Y = y$ esemény független az $X = x$ eseménytől, azaz

$$\mathrm{P}(\, Y = y \mid X = x \,) = \mathrm{P}(\, Y = y \,)$$

Ha itt a baloldali feltételes valószínűséget hányadosként írjuk fel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{P}(\, X = x \cap Y = y \,)}{\mathrm{P}(\, X = x \,)} = \mathrm{P}(\, Y = y \,)$$

amiből szorzással az A -ra, B -re nézve szimmetrikus

$$\mathrm{P}(\, X = x \cap Y = y \,) = \mathrm{P}(\, X = x \,)\, \mathrm{P}(\, Y = y \,)$$

egyenlőség adódik. Tehát a függetlenség szimmetrikus reláció: ha Y független X -től, akkor X is független Y -tól. Ezért függetlenség esetén azt mondhatjuk, hogy a valószínűségi változók **függetlenek egymástól**.

6.3. Direktszorzat

1. Példa: Fiatal házaspár gyerekeinek száma és a nagyszülők száma függetlenek egymástól. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \quad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását. (X, Y) eloszlása mellett feltüntetjük X és Y eloszlását is:

y	$\mathrm{P}(\, Y = y \,)$					
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	$\mathrm{P}(X = x)$
		0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*

Vegyük észre, hogy (X, Y) eloszlásának minden tagját szorzatként kaptuk meg X és Y eloszlásának megfelelő tagjaiból:

$$\mathrm{P}(\, X = x, Y = y \,) = \mathrm{P}(\, X = x \,)\, \mathrm{P}(\, Y = y \,)$$

Definíció: Ha egy kétdimenziós eloszlás minden tagja úgy képződik két egydimenziós eloszlás tagjaiból, hogy a megfelelő tagokat összeszorozzuk, akkor a síkbeli eloszlást a két egydimenziós eloszlás **direktszorzat**ának nevezzük.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

6.4. Konvolúció

1. Példa: Gyerekek száma plusz nagyszülők száma. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X \;=\; \text{gyerekek száma}, \qquad Y \;=\; \text{nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlása*

Az előző alpontban észrevettük, hogy (X, Y) eloszlása X eloszlásából és Y eloszlásából direktszorzatként adódik:

y	P($Y = y$)					
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	P$(X = x)$
		0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás, mint direktszorzat*

Ha – valamilyen rejtélyes okból – a gyerekek számának és a nagyszülők számának az összege érdekel minket, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó eloszlával kell foglalkoznunk. Nyilván igazak az alábbiak:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\,Z = 0\,) &= 0.010 \\
\mathrm{P}(\,Z = 1\,) &= 0.040 \;=\; 0.020 + 0.020 \\
\mathrm{P}(\,Z = 2\,) &= 0.085 \;=\; 0.030 + 0.040 + 0.015 \\
\mathrm{P}(\,Z = 3\,) &= 0.175 \;=\; 0.080 + 0.060 + 0.030 + 0.005 \\
\mathrm{P}(\,Z = 4\,) &= 0.275 \;=\; 0.060 + 0.160 + 0.045 + 0.010 \\
\mathrm{P}(\,Z = 5\,) &= 0.255 \;=\; 0.120 + 0.120 + 0.015 \\
\mathrm{P}(\,Z = 6\,) &= 0.130 \;=\; 0.090 + 0.040 \\
\mathrm{P}(\,Z = 7\,) &= 0.030
\end{aligned}$$

Táblázat: *Valószínűségek számolása összegzéssel*

Vetter András – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Ha Z lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket táblázatba rendezzük, megkapjuk Z eloszlását:

z	0	1	2	3	4	5	6	7
P($Z = z$)	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

Táblázat: *Gyerekek száma plusz nagyszülők száma – egydimenziós eloszlás*

Z eloszlását egy egyszerű, **konvolúció**nak nevezett művelettel kaptuk meg X és Y eloszlásából: először vettük X eloszlásának és Y eloszlásának a direktszorzatát, majd a kapott síkbeli eloszlást a $z = x + y$ transzformációval a számegyenesre képeztük.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt

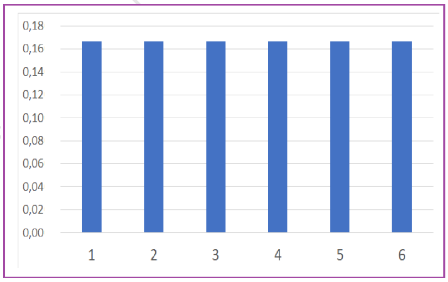
Amikor független valószínűségi változókból sokat adunk össze, az összeg eloszlása mindig ugyanolyan alakúnak bizonyul. Az eloszlás alakja egy szép szabályos harangra emlékeztet. Ezt a tényt fogjuk most bemutatni két példasorozattal, melyekben – az egyszerűség és a könnyebb elképzelhetőség kedvéért – azt képzeljük el, mintha dobókockákkal dobnánk, és mindig a dobott számok összegét vizsgálnánk. Az első alfejezetben szabályos dobókockákkal foglalkozunk, a másodikban hamisakkal. Mint látni fogjuk, szabályos dobókockák esetén már 4 lépésben eljutunk a harang alakhoz, hamis kockák esetén ehhez több lépésre van szükség: csak 10 lépésben jutunk el a harang alakhoz.

7.1. Szabályos dobókockák esete

1. Feladat: A dobott szám eloszlása – egyetlen szabályos dobókocka esetén. Ez a feladat nagyon egyszerű, mert nem kell csinálni semmi mást, mint ránézni arra a nem is izgalmas táblázatra és ábrára, ami a dobott szám eloszlását mutatja, amikor egy szabályos dobókockával dobunk.

1	1/6	0.167
2	1/6	0.167
3	1/6	0.167
4	1/6	0.167
5	1/6	0.167
6	1/6	0.167

Táblázat:
A dobott szám eloszlása – szabályos dobókocka esetén



29. ábra. *A dobott szám eloszlása – egyetlen szabályos dobókocka esetén*

2. Feladat: Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén. Kiindulásként vegyük fel a dobott számok eloszlásait külön-külön egy táblázat baloldali és felső peremén:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
1	1/6						
2	1/6						
3	1/6						
4	1/6						
5	1/6						
6	1/6						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első dobókockával dobott szám eloszlása
A vízszintes sorban: a második dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt a dobott két szám együttes eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
1	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
2	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
3	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
4	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
5	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
6	1/6	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

A dobott számok összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

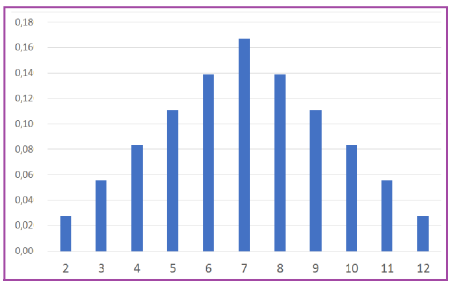
Táblázat: *A dobott számok összege – két dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

2	$1/6^2$	0.028
3	$2/6^2$	0.056
4	$3/6^2$	0.083
5	$4/6^2$	0.111
6	$5/6^2$	0.139
7	$6/6^2$	0.167
8	$5/6^2$	0.139
9	$4/6^2$	0.111
10	$3/6^2$	0.083
11	$2/6^2$	0.056
12	$1/6^2$	0.028

Táblázat:
Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén

Vetier András – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók



30. ábra. *Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén*

3. Feladat: Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén. A három dobókocka közül az első kettővel dobott számok összegét nevezük X -nek, a harmadikkal dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$1/6^2$						
3	$2/6^2$						
4	$3/6^2$						
5	$4/6^2$						
7	$6/6^2$						
8	$5/6^2$						
9	$4/6^2$						
10	$3/6^2$						
11	$2/6^2$						
12	$1/6^2$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első két dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a harmadik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$1/6^2$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$
3	$2/6^2$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$
4	$3/6^2$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$
5	$4/6^2$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$
6	$5/6^2$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$
7	$6/6^2$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$
8	$5/6^2$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$
9	$4/6^2$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$
10	$3/6^2$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$
11	$2/6^2$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$
12	$1/6^2$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

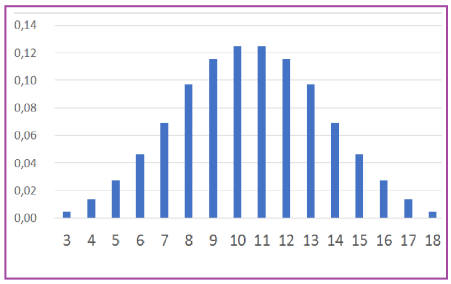
	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18

Táblázat: *A dobott számok összege – három dobókocka esetén*

X és Y összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

3	$1/6^3$	0.005
4	$3/6^3$	0.014
5	$6/6^3$	0.028
6	$10/6^3$	0.046
7	$15/6^3$	0.069
8	$21/6^3$	0.097
9	$25/6^3$	0.116
10	$27/6^3$	0.125
11	$27/6^3$	0.125
12	$25/6^3$	0.116
13	$21/6^3$	0.097
14	$15/6^3$	0.069
15	$10/6^3$	0.046
16	$6/6^3$	0.028
17	$3/6^3$	0.014
18	$1/6^3$	0.005

Táblázat:
Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén



31. ábra. *Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén*

Vetier András – Valószínűségszámítás – Egy, kettő, sok esemény és diszkrét valószínűségi változók

4. Feladat: Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén. A négy dobókocka közül az első hárommal dobott számok összegét nevezük X -nek, a negyedikkel dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
3	$1/6^3$						
4	$3/6^3$						
5	$6/6^3$						
6	$10/6^3$						
7	$15/6^3$						
8	$21/6^3$						
9	$25/6^3$						
10	$27/6^3$						
11	$27/6^3$						
12	$25/6^3$						
13	$21/6^3$						
14	$15/6^3$						
15	$10/6^3$						
16	$6/6^3$						
17	$3/6^3$						
18	$1/6^3$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első három dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a negyedik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
3	$1/6^3$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$
4	$3/6^3$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$
5	$6/6^3$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$
6	$10/6^3$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$
7	$15/6^3$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$
8	$21/6^3$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$
9	$25/6^3$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$
10	$27/6^3$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$
11	$27/6^3$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$
12	$25/6^3$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$
13	$21/6^3$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$
14	$15/6^3$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$
15	$10/6^3$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$
16	$6/6^3$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$
17	$3/6^3$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$
18	$1/6^3$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24

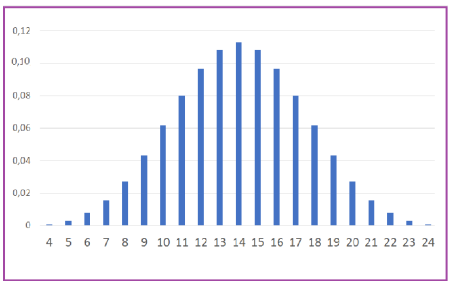
Táblázat: *A dobott számok összege – négy dobókocka esetén*

X és Y összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

4	$1/6^4$	0.001
5	$4/6^4$	0.003
6	$10/6^4$	0.008
7	$20/6^4$	0.015
8	$35/6^4$	0.027
9	$56/6^4$	0.043
10	$80/6^4$	0.062
11	$104/6^4$	0.080
12	$125/6^4$	0.096
13	$140/6^4$	0.108
14	$146/6^4$	0.113
15	$140/6^4$	0.108
16	$125/6^4$	0.096
17	$104/6^4$	0.080
18	$80/6^4$	0.062
19	$56/6^4$	0.043
20	$35/6^4$	0.027
21	$20/6^4$	0.015
22	$10/6^4$	0.008
23	$4/6^4$	0.003
24	$1/6^4$	0.001

Táblázat:
Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén

Vetier András – Valószínűségszámítás I. rész: Valószínűség és diszkrét valószínűségi változók



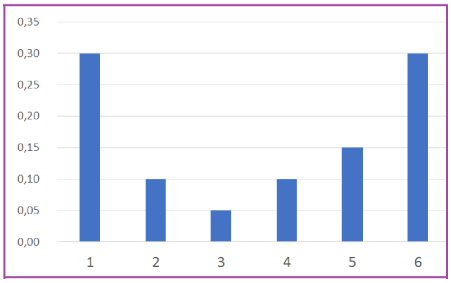
32. ábra. *Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén:* GYÖNYÖRŰ HARANG ALAK!

7.2. Hamis dobókockák esete

1. Feladat: A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén. Ez a feladat nagyon egyszerű, mert nem kell csinálni semmi mást, mint ránézni arra a kissé már izgalmas táblázatra és ábrára, ami a dobott szám eloszlását mutatja, amikor egy ilyen hamis dobókockával dobunk. Vegyük észre, hogy a feltételezett dobókockán az 1 és a 6 a legvalószínűbb, a 2, 3, 4, 5 értékek valószínűsége kisebb.

1	6/20	0.30
2	2/20	0.10
3	1/20	0.05
4	2/20	0.10
5	3/20	0.15
6	6/20	0.30

Táblázat: *A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén*



33. ábra. *A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén*

2. Feladat: Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén. Kiindulásként vegyük fel a dobott számok eloszlásait külön-külön egy táblázat baloldali és felső peremén:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Diszkrét valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

		1	2	3	4	5	6
		6/20	2/20	1/20	2/20	3/20	6/20
1	6/20						
2	2/20						
3	1/20						
4	2/20						
5	3/20						
6	6/20						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első dobókockával dobott szám eloszlása
A vízszintes sorban: a második dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt a dobott két szám együttes eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		6/20	2/20	1/20	2/20	3/20	6/20
1	6/20	$36/20^2$	$12/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$	$18/20^2$	$36/20^2$
2	2/20	$12/20^2$	$4/20^2$	$2/20^2$	$4/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$
3	1/20	$6/20^2$	$2/20^2$	$1/20^2$	$2/20^2$	$3/20^2$	$6/20^2$
4	2/20	$12/20^2$	$4/20^2$	$2/20^2$	$4/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$
5	3/20	$18/20^2$	$6/20^2$	$3/20^2$	$6/20^2$	$9/20^2$	$18/20^2$
6	6/20	$36/20^2$	$12/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$	$18/20^2$	$36/20^2$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

A dobott számok összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

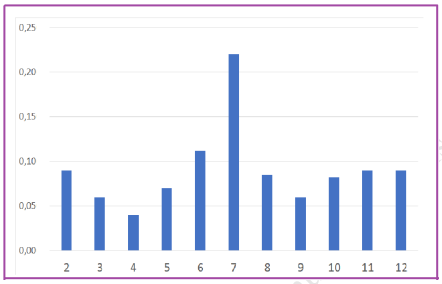
Táblázat: *A dobott számok összege*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségi mezők, diszkrét valószínűségi változók

2	$36/20^2$	0.090
3	$24/20^2$	0.060
4	$16/20^2$	0.040
5	$28/20^2$	0.070
6	$43/20^2$	0.113
7	$88/20^2$	0.220
8	$34/20^2$	0.085
9	$24/20^2$	0.060
10	$33/20^2$	0.083
11	$36/20^2$	0.090
12	$36/20^2$	0.090

Táblázat: *Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén*



34. ábra. *Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén*

3. Feladat: Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén. A három dobókocka közül az első kettővel dobott számok összegét nevezük X -nek, a harmadikkal dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		$6/20$	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$3/20$	$6/20$
2	$36/20^2$						
3	$24/20^2$						
4	$16/20^2$						
5	$28/20^2$						
6	$45/20^2$						
7	$88/20^2$						
8	$34/20^2$						
9	$24/20^2$						
10	$33/20^2$						
11	$36/20^2$						
12	$36/20^2$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első két dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a harmadik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$
2	$36/20^2$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$
3	$24/20^2$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$
4	$16/20^2$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$
5	$28/20^2$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$
6	$45/20^2$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$
7	$88/20^2$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$
8	$34/20^2$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$
9	$24/20^2$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$
10	$33/20^2$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$
11	$36/20^2$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$
12	$36/20^2$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18

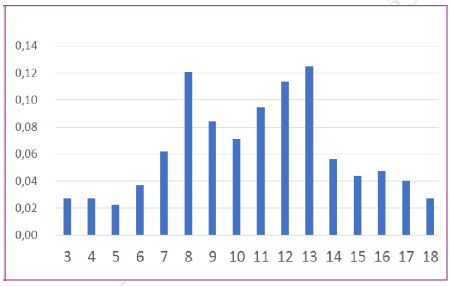
Táblázat: *A dobott számok összege – három dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Várható érték és diszkrét valószínűségi változók

3	$216/20^3$	0.027
4	$216/20^3$	0.027
5	$180/20^3$	0.023
6	$296/20^3$	0.037
7	$498/20^3$	0.062
8	$966/20^3$	0.121
9	$673/20^3$	0.084
10	$570/20^3$	0.071
11	$759/20^3$	0.095
12	$908/20^3$	0.114
13	$999/20^3$	0.125
14	$450/20^3$	0.056
15	$351/20^3$	0.044
16	$378/20^3$	0.047
17	$324/20^3$	0.041
18	$216/20^3$	0.027

Táblázat: *Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén*



35. ábra. *Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén*

4. Feladat: Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén. A négy dobókocka közül az első hárommal dobott számok összegét nevezük X -nek, a negyedikkel dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

Vetier András – Valószínűségszámítás – ... és diszkrét valószínűségi változók

		1	2	3	4	5	6
		1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
3	$216/20^3$						
4	$216/20^3$						
5	$180/20^3$						
6	$296/20^3$						
7	$498/20^3$						
8	$966/20^3$						
9	$673/20^3$						
10	$570/20^3$						
11	$759/20^3$						
12	$908/20^3$						
13	$999/20^3$						
14	$450/20^3$						
15	$351/20^3$						
16	$378/20^3$						
17	$324/20^3$						
18	$216/20^3$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első három dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a negyedik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
3	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$
4	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$
5	$180/20^3$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$
6	$296/20^3$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/1296$	$296/6^4$
7	$498/20^3$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$
8	$966/20^3$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$
9	$673/20^3$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$
10	$570/20^3$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$
11	$759/20^3$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$
12	$908/20^3$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$
13	$999/20^3$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$
14	$450/20^3$	$999/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$
15	$350/20^3$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$
16	$378/20^3$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$
17	$324/20^3$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$
18	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24

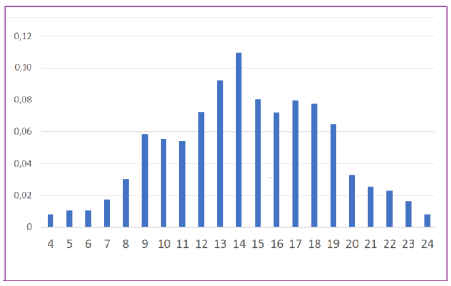
Táblázat: *A dobott számok összege – négy dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

4	$1\,296/20^4$	0.008
5	$1\,728/20^4$	0.011
6	$1\,728/20^4$	0.011
7	$2\,784/20^4$	0.017
8	$4\,840/20^4$	0.030
9	$9\,392/20^4$	0.059
10	$8\,896/20^4$	0.062
11	$8\,696/20^4$	0.054
12	$11\,569/20^4$	0.072
13	$14\,768/20^4$	0.092
14	$17\,524/20^4$	0.110
15	$12\,872/20^4$	0.080
16	$11\,518/20^4$	0.072
17	$12\,696/20^4$	0.079
18	$12\,396/20^4$	0.077
19	$10\,368/20^4$	0.065
20	$5\,265/20^4$	0.033
21	$4\,104/20^4$	0.026
22	$3\,672/20^4$	0.022
23	$2\,592/20^4$	0.016
24	$1\,296/20^4$	0.008

Táblázat: *Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén*

Vetier András – Valószínűségszámítás – A valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

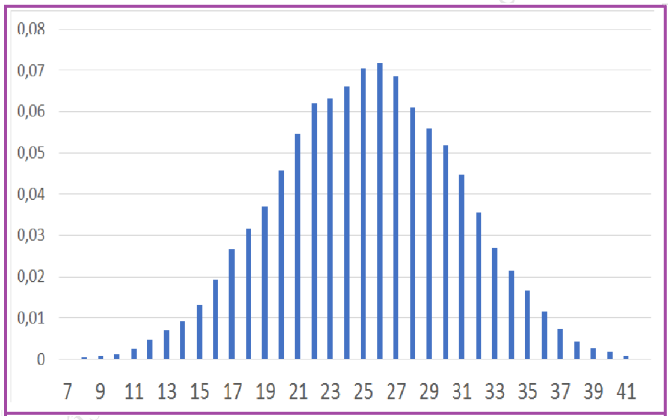


36. ábra. *Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén*

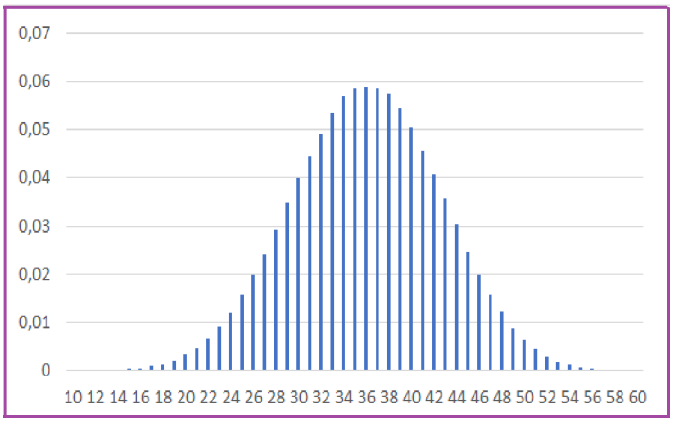
A számolást – terjedelmessége és unalmas mivolta miatt – itt a könyvben nem folytatjuk tovább. Az Excelben elvégézett számítások alapján csak ábrákkal adjuk meg

- 7 hamis dobókocka összegének és
- 10 hamis dobókocka összegének

az eloszlását. Látható, hogy 7 dobókocka esetén az összeg eloszlása még nem igazán harang alakú, de 10 dobókocka esetén már gyönyörű harang alakot kapunk.



37. ábra. *Az összeg eloszlása – hét hamis dobókocka esetén*



38. ábra. *Az összeg eloszlása – tíz hamis dobókocka esetén:* GYÖNYÖRŰ HARANG ALAK!

Vetier András – Valószínűs és diszkrét valószínűségi változók

7.3. Különböző dobókockák esete

Az előző két alfejeztben a dobókockák mindkét esetben egyformák voltak. Először egyformán szabályosak, azután pedig egyformán hamisak. Ahhoz, hogy a dobókockákkal dobott számok összegének eloszlása harang alakot öltsön, nem kell, hogy a kockák egyformák legyenek. Ha a dobókockáink nem egyformák, mert

- a lapjaik száma más-más, vagy
- a cinkelésük más-más,

de **a kockák egymástól függetlenül működnek, akkor – elég sok dobókocka esetén – az összeg eloszlása közelítőleg harang alakú lesz**. A harang elhelyezkedése és alakja (keskenyebb, csúcsosabb vagy szélesebb, laposabb) természetesen függ attól, hogy a dobókockák milyenek, a velük dobott számok várható értéke és szórása mekkora, de az a tény, hogy az összeg eloszlása közelítőleg harang alakú, elég sok dobókocka esetén teljesülni fog. Ennek illusztrációjától itt most eltekintünk, a számolás Excellel való elvégzése legyen az Olvsó munkája és öröme!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban

Amikor az X és Y valószínűségi változókból alkotunk egy kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változót, kézenfekvő, hogy X, Y és (X,Y) súlyfüggvényei között kapcsolatokat fedezhetünk fel. A most következő általános formulákban x és y a súlyfüggvények változóit jelölik. Az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó súlyfüggvényét $p(x,y)$, az X valószínűségi változó súlyfüggvényét $p_1(x)$, az Y valószínűségi változó súlyfüggvényét $p_2(y)$ jelöli. Emlékeztetünk a súlyfüggvények jelentésére:

$$p_1(x) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;=\; x \;)$$

$$p_2(y) \;=\; \mathrm{P}(\; Y \;=\; y \;)$$

$$p(x,y) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;=\; x,\; Y \;=\; y \;)$$

8.1. Összegzési szabály vetület eloszlásokkal kapcsolatban

Nyilvánvalóak az alábbi összegzési szabályok:

$$p_1(x) \;=\; \sum_y p(x,y)$$

$$p_2(y) \;=\; \sum_x p(x,y)$$

8.2. Szorzási szabály független koordináták esetére

Ha X és Y függetlenek, akkor

$$p(x,y) \;=\; p_1(x) \;\cdot\; p_2(y)$$

A $p(x,y)$ súlyfüggvényt (eloszlást) a $p_1(x)$ és $p_2(y)$ súlyfüggvények (eloszlások) **direktszorzat**ának nevezzük.

8.3. Osztási és szorzási szabályok feltételes súlyfüggvényekkel

Ha x lehetséges értéke X-nek, akkor az $X \;=\; x$ feltétel mellett Y feltételes súlyfüggvényét $p_{2|1}(y|x)$-szel jelöljük. Tehát $p_{2|1}(y|x)$ annak a valószínűségét jelöli, hogy az $X \;=\; x$ feltétel mellett bekövetkezik az $Y \;=\; y$ esemény:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \mathrm{P}(\; Y \;=\; y \mid X \;=\; x \;)$$

Nyilván teljesül az alábbi osztási szabály:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{p(x,y)}{p_1(x)}$$

Hasonlóképpen, ha y lehetséges értéke Y-nak, akkor az $Y \;=\; y$ feltétel mellett X feltételes súlyfüggvényét $p_{1|2}(x|y)$-nal jelöljük, azaz

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;=\; x \mid Y \;=\; y \;)$$

Vatter András – Valószínűségszámítás 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Nyilván teljesül az alábbi osztási szabály:

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$$

A felírt osztási szabályok így írhatók át szorzási szabályokká:

$$p(x,y) \;=\; p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$
$$p(x,y) \;=\; p_2(y)\, p_{1|2}(x|y)$$

8.4. Eloszlások keverése

Az összegzési és a szorzási szabályok kombinálásával adódnak az alábbi formulák:

$$p_1(x) \;=\; \sum_y p_2(y)\, p_{1|2}(x|y)$$

$$p_2(y) \;=\; \sum_x p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$

Ezek a formulák a korábban vett

$$\mathrm{P}(B) \;=\; \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B|A_2) + \ldots$$

teljes valószínűség formulájának speciális esetei. Ezért hivatkozhatunk rájuk úgy is mint a **teljes valószínűség formulái kétdimenziós diszkrét valószínűségi változókra**. A jobboldali kifejezéseket egyfajta **keverés**nek is felfoghajuk. Például a

$$p_2(y) \;=\; \sum_x p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$

formula azt mutatja, hogy a $p_2(y)$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, hogy a a $p_{2|1}(y|x)$ függvényértékeket a $p_1(x)$ súlyfüggvény szerint keverjük. Tehát

- **az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az Y feltételes súlyfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az X súlyfüggvénye (eloszlása) szerint.**

Hasonlóképpen

- **az X valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes súlyfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az Y súlyfüggvénye (eloszlása) szerint.**

8.5. Eloszlás transzformációja egydimenzióban

Tegyük fel, hogy adott egy $y \;=\; t(x)$ függvény. Ha az X valószínűségi változó értékét behelyettesítjük az $y \;=\; t(x)$ függvénybe, akkor a kapott $t(X)$ érték egy új Y valószínűségi változót definiál:

$$Y \;=\; t(X)$$

Y súlyfüggvényének az értékét egy adott y helyen az X súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:

$$r(y) \;=\; \sum_{x:\; t(x) \,=\, y} p(x)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $r(y)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az x helyeket, melyekre $t(x) \;=\; y$, és az ilyen x helyekhez tartozó $p(x)$ értékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az új $r(y)$ súlyfüggvényt (eloszlást) az eredeti $p(x)$ súlyfüggvényből (eloszlásból) az $y \;=\; t(x)$ **transzformációval kaphatjuk meg**.

Vetítő András: Valószínűségszámítás és statisztika – rész: Valószínűségi és diszkrét valószínűségi változók

8.6. Eloszlás transzformációja kétdimenzióból egydimenzióba

A most következő fejezetekben végzett számítások elvileg papír-ceruza technikával is elvégezhetők. E könyv szerzője Excel segítségével számolt. Tanulságos, ha az Olvasó is elvégzi a számításokat Excellel, és megtapasztalja a számolás eleganciáját és erejét.

Kétdimenziós esetben, ha adott $z = t(x,y)$ függvény, és az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó értékét behelyettesítjük a $z = t(x,y)$ függvénybe, akkor a kapott $t(X,Y)$ érték egy új Z valószínűségi változót definiál: $Z = t(X,Y)$.

*A Z **súlyfüggvényét** (X,Y) súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:*

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ t(x,y) = z} p(x,y)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $r(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x,y) helyeket, melyekre $t(x,y) = z$, és az ilyen (x,y) helyekhez tartozó $p(x,y)$ értékeket összeadjuk.

*A Z **eloszlásfüggvényét** (X,Y) súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:*

$$R(z) = \sum_{(x,y):\ t(x,y) \le z} p(x,y)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $R(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x,y) helyeket, melyekre $t(x,y) \le z$, és az ilyen (x,y) helyekhez tartozó $p(x,y)$ értékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az új eloszlást az eredeti eloszlásból a $z = t(x,y)$ **transzformációval kaphatjuk meg**.

8.7. Példák

Mindegyik példa azzal a feladattal kapcsolatos, melyet az 1. fejezet "Kombinatorikus alapképletek" című 8. pontjában vettünk: Egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 piros, 15 kék, 20 fehér. Kiveszünk 8 golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kihúzottak között hány piros és hány kék lesz. Az így kapott X és Y valószínűségi változókból adódó (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó $p(x,y)$ súlyfüggvényének táblázatát akkor meghatároztuk (bár akkor még a súlyfüggvény folgalmát nem ismertük – most már ismerjük). A táblázatot idemásoljuk:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.0756	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat:
A valószínűségek numerikus értékei
(3 tizedes pontossággal; az üres helyeken nullák állnak)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

(Mivel a táblázatba írt számok 3 tizedes pontosságúak, az alábbi számításokban a 3. tizedesjegyben adódhatnak "hibának tűnő" eltérések. Ezeken a pontatlanságokon nem szabad fennakadni.)

1. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *szorzatának* súlyfüggvénye (eloszlása).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *szorzatait*. Íme:

y										
8	0									
7	0	7								
6	0	6	12							
5	0	5	10	15						
4	0	4	8	12	16					
3	0	3	6	9	12	15				
2	0	2	4	6	8	10	12			
1	0	1	2	3	4	5	6	7		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat:
A szorzat értékei
(Az üres helyek 0 valószínűségűek, azokkal nem kell foglalkozni.)

A szorzat súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából a szorzat lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.136
1	0.027
2	0.124
3	0.143
4	**0.195**
5	0.030
6	0.180
8	0.074
9	0.048
10	0.015
12	0.025
15	0.002
16	0.001

Táblázat: *A szorzat súlyfüggvénye (eloszlása)*

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0.195** érték hogyan jött ki:

- Először "A szorzat értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x \cdot y = 4$. Ezeket találtuk:

$$(1, 4) \qquad (2, 2) \qquad (4, 1)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$\begin{aligned} p(1,4) &= 0.072 \\ p(2,2) &= 0.106 \\ p(4,1) &= 0.017 \end{aligned}$$

valószínűségeket összeadtuk:

$$r(4) \;=\; 0.072 \;+\; 0.106 \;+\; 0.017 \;=\; \mathbf{0.195}$$

2. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *eltérésének* súlyfüggvénye (eloszlása)
(eltérés = különbség abszolút értéke).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *eltéréseit*. Íme:

y										
8	8									
7	7	6								
6	6	5	4							
5	5	4	3	2						
4	4	3	2	1	0					
3	3	2	1	0	1	2				
2	2	1	0	1	2	3	4			
1	1	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az eltérések értékei*

Az eltérés súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából az eltérés lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.183
1	0.332
2	0.245
3	**0.145**
4	0.066
5	0.022
6	0.005
7	0.001
8	0.000

Táblázat: *Az eltérés súlyfüggvénye (eloszlása)*

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0,145** érték hogyan jött ki:

Vetier András – Valószínűségszámítás – I. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

- Először "Az eltérés értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $|x - y| = 3$. Ezeket találtuk:

$$(2,5) \qquad (1,4) \qquad (0,3) \qquad (3,0) \qquad (4,1) \qquad (5,2)$$

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$\begin{aligned} p(2,5) &= 0.013 \\ p(1,4) &= 0.072 \\ p(0,3) &= 0.033 \\ p(3,0) &= 0.009 \\ p(4,1) &= 0.017 \\ p(5,2) &= 0.002 \end{aligned}$$

valószínűségeket összeadtuk:

$$r(3) = 0.013 + 0.072 + 0.033 + 0.009 + 0.017 + 0.002 = \mathbf{0.145}$$

3. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *összegének* súlyfüggvénye (eloszlása).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *összegeit*. Íme:

y										
8	8									
7	7	8								
6	6	7	8							
5	5	6	7	8						
4	4	5	6	7	8					
3	3	4	5	6	7	8				
2	2	3	4	5	6	7	8			
1	1	2	3	4	5	6	7	8		
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az összeg értékei*

Az összeg súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából az összeg lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.001
1	0.009
2	0.054
3	**0.165**
4	0.284
5	0.281
6	0.156
7	0.045
8	0.005

Táblázat: *Az összeg súlyfüggvénye (eloszlása)*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0,165** érték hogyan jött ki:

- Először "Az összeg értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x + y = 3$. Ezeket találtuk:

$$(0,3) \qquad (1,2) \qquad (2,1) \qquad (3,0)$$

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$\begin{aligned} p(0,3) &= 0.033 \\ p(1,2) &= 0.076 \\ p(2,1) &= 0.049 \\ p(3,0) &= 0.009 \end{aligned}$$

valószínűségeket összeadtuk:

$$r(3) = 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 = \mathbf{0.165}$$

8.8. Független valószínűségi változók összege – konvolúció

Az összegre vonatkozó korábbi képletnek egy speciális esetét külön kihangsúlyozzuk. Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $X + Y$ súlyfüggvénye:

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ x+y\,=\,z} p_1(x) \cdot p_2(y)$$

vagy

$$r(z) = \sum_{x} p_1(x) \cdot p_2(z - x)$$

vagy

$$r(z) = \sum_{y} p_1(z - y) \cdot p_2(y)$$

A képletek azt fejezik ki, hogy az $r(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x + y = z$, és az ilyen (x, y) helyekhez tartozó $p_1(x) \cdot p_2(y)$ szorzatértékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az $r(z)$ súlyfüggvény (eloszlás) a $p_1(x)$ és $p_2(y)$ eloszlásokból **konvolúció**val adódik.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségszámítás
2. rész
Nevezetes diszkrét eloszlások

—

FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2019. október 30.

Vetier: Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Tartalomjegyzék

1. Nevezetes eloszlások **3**
1.1. Egyenletes eloszlások . . . 3
1.1.1. Egyenletes eloszlás egydimenzióban . . . 3
1.1.2. Egyenletes eloszlás kétdimenzióban . . . 3
1.1.3. Egyenletes eloszlás r -dimenzióban . . . 4
1.2. Hipergeometrikus eloszlások . . . 4
1.2.1. Hipergeometrikus eloszlás . . . 4
1.2.2. Polihipergeometrikus eloszlás . . . 8
1.2.3. Polihipergeometrikus eloszlás, r -dimenziós *(Extra tananyag)* . . . 12
1.3. Binomiális eloszlás és társai . . . 12
1.3.1. Binomiális eloszlás . . . 12
1.3.2. Indikátor eloszlás . . . 19
1.3.3. Binomiális eloszlás számsorozaton . . . 20
1.3.4. Polinomiális eloszlás . . . 21
1.3.5. Polinomiális eloszlás, r -dimenziós *(Extra tananyag)* . . . 25
1.4. Különböző valószínűségű események közül hány következik be? *(Extra tananyag)* . . . 26
1.5. Geometriai eloszlások és társaik . . . 29
1.5.1. Geometriai eloszlás (optimista) . . . 29
1.5.2. Geometriai eloszlás (pesszimista) . . . 32
1.5.3. Geometriai eloszlás az $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$ halmazon . . . 34
1.5.4. Geometriai eloszlás jellemzése feltételes valószínűségekkel . . . 35
1.5.5. Negatív binomiális eloszlás (optimista) . . . 36
1.5.6. Negatív binomiális eloszlás (pesszimista) . . . 39
1.6. Poisson eloszlás . . . 41
1.6.1. Poisson eloszlás egydimenzióban . . . 41
1.6.2. Poisson eloszlás kétdimenzióban . . . 49
1.7. A csaló vándor és a Bölcs Király . . . 49
1.8. Példa nem normált eloszlásra *(Extra tananyag)* . . . 50
1.9. A nevezetes eloszlások mindegyike normált – bizonyítások *(Extra tananyag)* . . . 51

2. Módusz megkeresése **53**
2.1. Előkészületek *(Extra tananyag)* . . . 53
2.2. Módszer a módusz képletének meghatározására . . . 54
2.3. Nevezetes eloszlások móduszai – formulák . . . 55

3. Szimuláció **57**
3.1. A $[0;1]$ intervallum felosztásának módszere . . . 57

4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka **59**

5. Egydimenziós adatrendszerek **60**
5.1. Átlag . . . 60
5.2. Második momentum . . . 60
5.3. Variancia, szórás . . . 61
5.4. Medián . . . 63

6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása **65**
6.1. Várható érték . . . 65
6.2. Feltételes várható érték egy eseményen belül . . . 67
6.3. Geometriai eloszlás jellemzése feltételes várható értékekkel *(Extra tananyag)* . . . 68
6.4. Variancia és szórás . . . 69

7. Nagy számok törvényei **71**
7.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára . . . 71
7.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára . . . 72
7.3. NSZT a második momentumra . . . 74
7.4. NSZT a varianciára . . . 74
7.5. NSZT a szórásra . . . 75
7.6. NSZT a mediánra . . . 75

8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai **76**
8.1. Várható érték tulajdonságai . . . 76
8.2. Variancia tulajdonságai . . . 77
8.3. Szórás tulajdonságai . . . 79

9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák **80**
9.1. Hipergeometrikus eloszlás . . . 80
9.2. Binomiális eloszlás . . . 80
9.3. Indikátor eloszlás . . . 80
9.4. Optimista geometriai eloszlás . . . 81
9.5. Pesszimista geometriai eloszlás . . . 81
9.6. Optimista negatív binomiális eloszlás . . . 81
9.7. Pesszimista negatív binomiális eloszlás . . . 82
9.8. Poisson eloszlás . . . 82
9.9. Példa: Ha eltalálod, mindet neked adom . . . 83

10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások **85**
10.1. Egyenletes eloszlás . . . 85
10.2. Hipergeometrikus eloszlás *(Extra tananyag)* . . . 85
10.3. Indikátor eloszlás . . . 86
10.3.1. Heurisztikus levezetés . . . 86
10.3.2. Bizonyítás . . . 86
10.4. Binomiális eloszlás . . . 86
10.4.1. Heurisztikus levezetés . . . 86
10.4.2. Bizonyítás . . . 87

Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

10.5. Geometriai eloszlás (optimista) . . . 88
10.5.1. Heurisztikus levezetés . . . 88
10.5.2. Bizonyítás . . . 88
10.6. Geometriai eloszlás (pesszimista) . . . 90
10.7. Negatív binomiális eloszlás (optimista) . . . 90
10.7.1. Heurisztikus levezetés . . . 90
10.7.2. Bizonyítás *(Extra tananyag)* . . . 90
10.8. Negatív binomiális eloszlás (pesszimista) *(Extra tananyag)* . . . 91
10.9. Poisson eloszlás . . . 91

11. Binomiáls eloszlással kapcsolatos levezetések **92**
11.1. Második momentum . . . 92
11.2. Variancia és szórás . . . 92

12. Feltételes várható érték, variancia, szórás **94**
12.1. Feltételes várható érték . . . 94
12.2. Feltételes variancia . . . 94
12.3. Feltételes szórás . . . 95
12.4. Példák: Ha tudjuk, mennyi az egyik, akkor mennyi a másiknak az "izé" -je? . . . 95

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. február 5.

Vetier András

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1. Nevezetes eloszlások

1.1. Egyenletes eloszlások

1.1.1. Egyenletes eloszlás egydimenzióban

Mikor használjuk: Ha adott n darab szám, és ezek mindegyike ugyanakkora eséllyel bukkan fel.

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; \frac{1}{n} \qquad \text{minden lehetséges } x \text{ -re}$$

Példa: Ilyen valószínűségi változóhoz jutunk, amikor szabályos dobókockával dobunk, és

$$X \;=\; \text{a kockán felül lévő szám}$$

$$p(x) \;=\; \frac{1}{6} \qquad (\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \;)$$

1.1.2. Egyenletes eloszlás kétdimenzióban

Mikor használjuk: Ha adott n darab pont a síkon (emlékeztetőül: egy pont a síkon egy számpárt jelent), és ezek a pontok mindegyike ugyanakkora eséllyel bukkan fel.

Súlyfüggvény:

$$p(x, y) \;=\; \frac{1}{n} \quad ; \qquad \text{minden lehetséges } (x, y) \text{ pontra}$$

Példa: Ilyen valószínűségi változóhoz jutunk, amikor egy piros és egy zöld dobókockával dobunk, és

$$X \;=\; \text{a piros kockán felül lévő szám}$$

$$Y \;=\; \text{a zöld kockán felül lévő szám}$$

$$p(x, y) \;=\; \frac{1}{36} \qquad (\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \;)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.1.3. Egyenletes eloszlás r -dimenzióban

Mikor használjuk: Ha adott n darab pont az r -dimenziós térben (emlékeztetőül: egy r -dimenziós pont egy r elemű sorozatot jelent), és mindegyik pont ugyanakkora eséllyel bukkan fel.

Súlyfüggvény:

$$p(x_1, x_2, \dots x_r) \;=\; \frac{1}{n} \qquad \text{minden lehetséges } (x_1, x_2, \dots x_r) \text{ pontra}$$

Példa: Ilyen 3 -dimenziós valószínűségi változóhoz jutunk, amikor egy piros, egy zöld és egy kék dobókockával dobunk, és

$$\begin{aligned} X &= \text{a piros kockán felül lévő szám} \\ Y &= \text{a zöld kockán felül lévő szám} \\ Z &= \text{a kék kockán felül lévő szám} \end{aligned}$$

$$p(x, y, z) \;=\; \frac{1}{216} \qquad (\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad y = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad z = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \;)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.2. Hipergeometrikus eloszlások

1.2.1. Hipergeometrikus eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{ha} \quad x \geq 0, \quad x \geq n - N + K, \quad x \leq n, \quad x \leq K$$

Mikor használjuk: Ha N darab golyó van egy ládában, közülük K darab piros, a többi $N - K$ darab fehér, és visszatevés **nélkül** húzunk n -szer, akkor az

$$X \;=\; \text{ahányszor pirosat húzunk}$$

valószínűségi változó ilyen eloszlást követ.

Paraméterek jelentése:

$$\begin{aligned} n &= \text{a húzások száma} \\ K &= \text{a piros golyók száma a dobozban a húzások megkezdése előtt} \\ N &= \text{az összes golyók száma a dobozban a húzások megkezdése előtt} \end{aligned}$$

Ha valamiért fontos, akkor az eloszlás neve előtt a paraméterek jelét vagy numerikus értékeiket az itt megadott sorrendben adjuk meg.

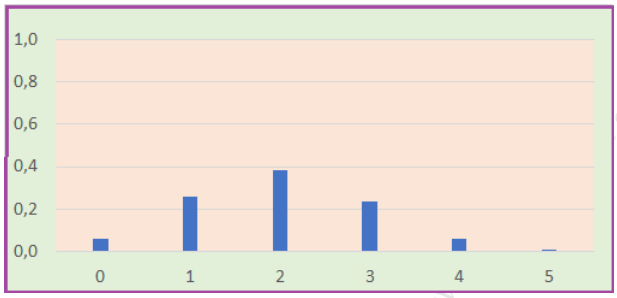
A súlyfüggvény képletének levezetése: Az N golyó közül n darabot kihúzni $\binom{N}{n}$ -féleképpen lehet, ennyi az összes kombinációk száma. Az $X = x$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott n golyó között x darab piros és $n - x$

darab fehér van. Ezért azt kell meghatároznunk, hogy hány olyan kombináció van, amiben x darab piros és $n-x$ darab fehér golyó van. Az x darab piros golyó a K darab piros közül $\binom{K}{x}$ féle képen kerülhet ki. Az $n-x$ fehér golyó az $N-K$ darab fehér közül $\binom{N-K}{n-x}$ -féleképpen kerülhet ki. Bármely piros kombinációt bármelyik fehér kombinációval össze lehet párosítani. Ezért az x darab piros és $n-x$ darab fehér eseményre nézve kedvező kombinációk száma a két szám szorzata:

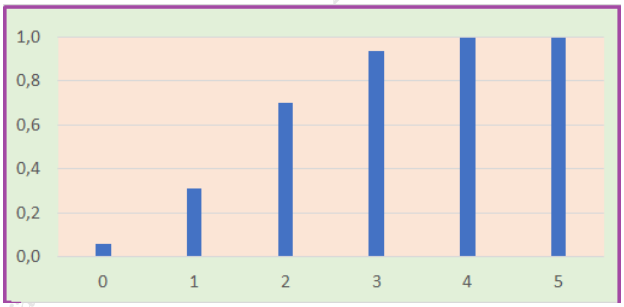
$$\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

Ezért a keresett súlyfüggvény érték:

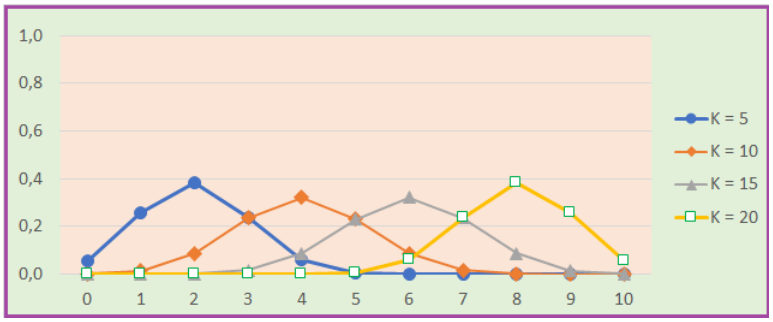
$$p(x) \;=\; \mathrm{P}(\,X=x\,) \;=\; \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$



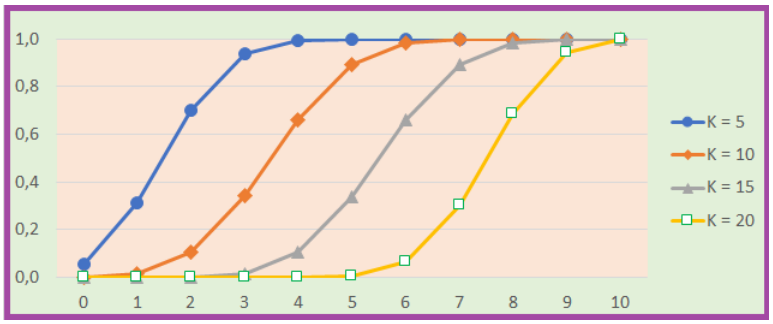
1. ábra. *Hipergeometrikus eloszlás súlyfüggvénye;* $n=10;\ K=5\ ;\ N=25$



2. ábra. *Hipergeometrikus eloszlás eloszlásfüggvénye;* $n=10;\ K=5\ ;\ N=25$



3. ábra. *Hipergeometrikus eloszlások súlyfüggvényei;* $n=10;\ K=5;\ 10;\ 15\ 20;\ N=25$



4. ábra. *Hipergeometrikus eloszlások eloszlásfüggvényei;* $n = 10;\ K = 5;\ 10;\ ;\ 20;\ N = 25$

Példa: Ha az ötös lottón egy szelvénnyel játszom, és X jelöli a találataim számát, akkor a 2, 3, 4, illetve 5 találat valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X = 2\ ) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(\ X = 3\ ) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(\ X = 4\ ) = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(\ X = 5\ ) = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}$$

azaz

$$p(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{85}{5-x}}{\binom{90}{5}} \qquad \text{ha} \quad 0 \le x \le 5$$

Excel-függvények:

$$p(x) = \texttt{HYPGEOM.DIST(x;n;K;N;FALSE)} = \texttt{HIPERGEOM.ELOSZLÁS(x;n;K;N;HAMIS)}$$

$$F(x) = \texttt{HYPGEOM.DIST(x;n;K;N;TRUE)} = \texttt{HIPERGEOM.ELOSZLÁS(x;n;K;N;IGAZ)}$$

1. Példa: Hány szarvas él az erdőben? Egy erdőben ismeretlen számú szarvas él. A számuk becslése céljából 60 szarvast piros festékkel megjelölünk, majd néhány hét eltelte után megszámoljuk, hogy 40 véletlenszerűen választott szarvas között hány megjelöltre bukkanunk. Tegyük fel, hogy 15 -re. Mit mondhatunk ezek alapján a szarvasok ismeretlen N számáról?

Megoldás: Átfogalmazzuk a feladatot erdőben szabadon élő szarvasok helyett dobozba zárt golyókra. Igaz, így kevésbé izgalmas a probléma, de könnyebben elképzelhető.

1. Példa módosítása: Hány golyó van a dobozban? Egy dobozban ismeretlen számú fehér golyó van, melyek közül 60 -at pirosra festünk, majd jól összekeverjük a golyókat, és 40 -szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a kihúzott golyók között 15 piros akad. Mit mondhatunk ezek alapján a golyók ismeretlen N számáról?

Gyors megoldás: Az összes golyók között a pirosak aránya $60 : N$. A kihúzott golyók között a pirosak aránya $15 : 40$. Feltételezve, hogy ez a két arány körülbelül egyenlő, a

$$60 : N \approx 15 : 40$$

közelítő egyenletet kapjuk, amiből az jön ki, hogy

$$N \approx 60 * \frac{40}{15} = 160$$

Alaposabb megoldás: Ha X -szel jelöljük azt a valószínűségi változót, hogy hányszor húzunk piros golyót, akkor X hipergeometrikus eloszlást követ ismeretlen N , $K = 60$ és $n = 40$ paraméterekkel. Az ismeretlen N paraméter néhány értéke mellett – a hipergeometrikus eloszlás képlete alapján – kiszámoltuk a $\mathrm{P}(\ 15 \text{ piros}\ )$ valószínűséget, és az értékeket táblázatba foglaltuk:

Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

N	P(15 piros)
100	0.00
120	0.02
140	0.11
160	0.15
180	0.12
200	0.08
220	0.04
240	0.02
260	0.01
280	0.01
300	0.00

Táblázat: *A P(15 piros) valószínűség N függvényében*

Vegyük észre, hogy $N = 160$ esetén a valószínűség értéke 0.15 , de $N \leq 100$ vagy $N \geq 300$ esetén – két tizedesre kerekítve – 0.00 , ami igazából azt jelenti, hogy a a valószínűség értéke 0.005 -nél is kisebb. Ezért úgy gondolhatjuk, hogy a golyók (szarvasok) száma 160 körül van. A táblázatban szereplő valószínűségekből arra következtetünk, hogy a golyók (szarvasok) száma 100 és 300 között van.

Az, hogy a golyók (szarvasok) száma 100 és 300 között van, a mi tippünk. Egyáltalán nem biztos, hogy ez így is van. Lehet, hogy a golyók (szarvasok) száma 100 -nál kevesebb vagy 300 -nál több, és ezért jól kinevetnek minket a szarvasok, és azt mondják, hogy "Bibibí, rosszul tippeltetek, mi többen vagy kevesebben vagyunk annál, mint ahogy azt ti tippeltétek". De megnyugtató érzést ad nekünk, hogy annak az esélye, hogy kinevetnek, kicsúfolnak minket a szarvasok, garantáltan kisebb, mint 0.005 .

Egy másik, kevésbé szégyenlős ember nagyobb rizikót is felvállalhat. Abból a tényből, hogy 15 piros golyó van a 40 kihúzott között, szűkebb határt is mondhat a golyók (szarvasok) számára. Például azt, hogy 120 és 240 között van a golyók (szarvasok) száma. Az, hogy a golyók (szarvasok) száma 120 és 120 között van, ez az ő tippje. Egyáltalán nem biztos, hogy igaza van. Lehet, hogy a golyók (szarvasok) száma 120 -nál kevesebb vagy 240 -nél több, és ezért jól kinevetik őt a szarvasok, és azt mondják, hogy "Bibibí, rosszul tippeltél, mi többen vagy kevesebben vagyunk annál, mint ahogy azt te tippelted". Ezt az embert megnyugtatja az a tény, hogy annak az esélye, hogy kinevetik és kicsúfolják a szarvasok, garantáltan kisebb, mint 0.025 . Annak a valószínűsége, hogy ezt a kevésbé szégyenlős embert kinevetik a szarvasok, nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy minket kinevetnek. Ez az ára annak, hogy ő szűkebb határokkal tippel, mint mi.

Tehát azt látjuk, hogy ilyen vagy olyan alsó és felső határokkal tippelve a golyók (szarvasok) számára, annak az esélye, hogy kinevetnek és kicsúfolnak minket a szarvasok, legfeljebb ennyi vagy annyi:

- a 100 – 300 -as tipp esetén legfeljebb 0.005
- a 120 – 240 -es tipp esetén legfeljebb 0.025

Azt a nyilvánvaló tényt, hogy szűkebb határok esetén a szarvasoknak nagyobb esélyük lehet a nevetésre, csúfolásra, mint tágabb határok esetén, a valószínűségszámítás elmélete alapján számszerű összefüggéssel tudtuk finomítani. Ezt a számszerű összefüggést a fentebb megadott táblázatból olvastuk ki (a táblázat által megengededett pontosság erejéig). A valószínűségszámítás elmélete – többek között - ilyesmire tanít meg minket.

2. Példa: Hányan szeretnek bridzsezni a városban? Városunban szeretnék egy felnőtt bridzs klubot szervezni. Gondoltam, felmérem, hogy a városban élő kb. 10 ezer felnőtt lakos közül kb. hányan fognak a dolog iránt érdeklődni. Ezért 100 véletlenszerűen választott felnőttnek feltettem a kérdést: szeretnek-e bridzsezni? A megkérdezettek közül 42 -en feleltek igennel, a többiek nemet mondtak. Mit mondhatunk ezek alapján a bridzset kedvelő felnőtttek ismeretlen K számáról?

Gyors megoldás: Az összes felnőtt között a bridzset kedvelő felnőttek aránya $K : 10\,000$. A megkérdezett felnőttek között a bridzset kedvelő felnőttek aránya $42 : 100$. Feltételezve, hogy ez a két arány körülbelül egyenlő, a

$$K : 10\,000 \approx 42 : 100$$

közelítő egyenletet kapjuk, amiből az jön ki, hogy

$$K \approx 10\,000 * \frac{42}{100} = 4\,200$$

Alaposabb megoldás: Ha X -szel jelöljük azt a valószínűségi változót, hogy a megkérdezett felnőttek közül hányan felelnek igennel, akkor X hipergeometrikus eloszlást követ $N = 10\,000$, ismeretlen K és $n = 100$ paraméterekkel. Az ismeretlen K paraméter néhány értéke mellett – a hipergeometrikus eloszlás képlete alapján – kiszámoltuk a P(42 igen) valószínűséget, és az értékeket táblázatba foglaltuk:

K	P(42 igen)
3 000	0.00
3 400	0.02
3 800	0.06
4 200	0.08
4 600	0.06
5 000	0.02
5 400	0.00

Táblázat: *A P(42 igen) valószínűség K függvényében*

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész – Nevezetes diszkrét eloszlások

Vegyük észre, hogy $K = 4200$ esetén a valószínűség értéke 0.08 , de $K \leq 3\,000$ vagy $K \geq 5\,400$ esetén – két tizedesre kerekítve – 0.00 , ami igazából azt jelenti, hogy a valószínűség értéke 0.005 -nél is kisebb. Ezért úgy gondolhatjuk, hogy a bridzset kedvelő felnőttek száma 4200 körül van. A táblázatban szereplő valószínűségekből arra következtetünk, hogy a bridzset kedvelő felnőttek száma $3\,000$ és $5\,400$ között van.

Megjegyzés: Ha a felnőtt emberek közül történő véletlen választás módszere nem garantálja, hogy minden embert legfeljebb egyszer kérdezünk meg, tehát ismétlődés is előforulhat, akkor a P(42 igen) valószínűséget a binomiális eloszlás képlete alapján kell kiszámolni. Könnyen ellenőrizhető, hogy két tizedesre kerekítve ilyenkor is ugyanazokat a valószínűségeket kapjuk, mint amiket a hipergeometrikus eloszlással kaptunk a fentebbi táblázatban. A binomiális eloszlás és a hipergeometrikus eloszlás közelségén nem szabad meglepődni, mert ha N és K n -hez képest nagy, akkor alig számít (szinte nem is számít), hogy a választás során megengedjük-e az ismétlődést vagy nem.

az N , K , n paraméterű hipergeometrikus eloszlást jól közelíti az n , p paraméterű binomiális eloszlás, ahol $p = K/N$.

1.2.2. Polihipergeometrikus eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x, y) = \frac{\binom{K_1}{x}\binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$$

ha

$$0 \leq x \leq \min(n, K_1),$$

$$0 \le y \le \min(n, K_2),$$
$$0 \le n - x - y \le \min(n, N - K_1 - K_2) \le n$$

Mikor használjuk: Ha egy dobozban N golyó van, melyek közül K_1 darab piros, K_2 darab zöld, $N - K_1 - K_2$ darab fehér, és n -szer húzunk a dobozból **visszatevés nélkül**, akkor az a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó, melynek koordinátái

$$X = \text{ahányszor piros golyót húzunk}$$
$$Y = \text{ahányszor zöld golyót húzunk}$$

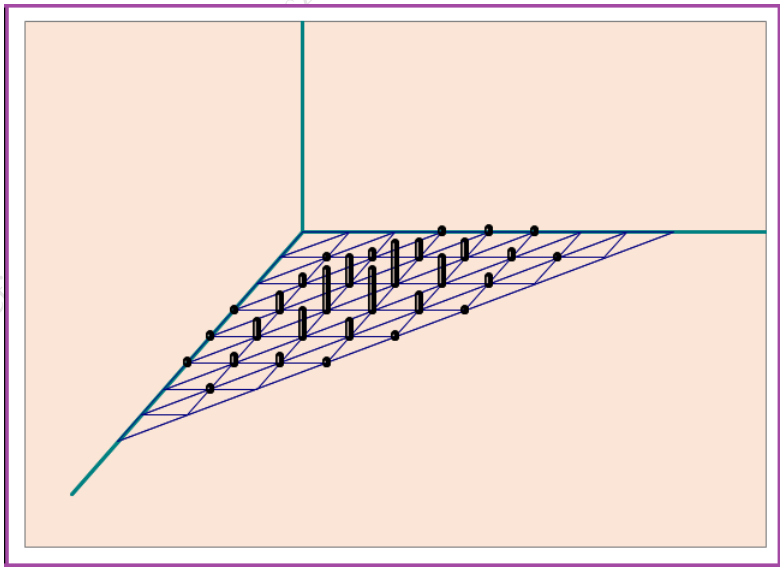
ilyen eloszlást követ.

A súlyfüggvény képletének levezetése: Az N golyó közül n darabot kihúzni $\binom{N}{n}$ -féleképpen lehet, ennyi az összes kombinációk száma. Az $X = x, Y = y$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott n golyó között x darab piros, x darab zöld és $n - x - y$ darab fehér van. Ezért azt kell meghatároznunk, hogy hány olyan kombináció van, amiben x darab piros, y darab zöld és $n - x - y$ darab fehér golyó van. Az x darab piros golyó az K_1 darab piros közül $\binom{K_1}{x}$ -féleképpen kerülhet ki. Az y darab zöld golyó az K_2 darab zöld közül $\binom{K_2}{y}$ -féleképpen kerülhet ki. Az $n - x - y$ fehér golyó az $N - K_1 - K_2$ darab fehér közül $\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}$ -féleképpen kerülhet ki. Bármely piros kombinációt bármelyik zöld és bármelyik fehér kombinációval össze lehet rakni. Ezért az x darab piros, y darab zöld és $n - x$ darab fehér eseményre nézve kedvező kombinációk száma e három szám szorzata:

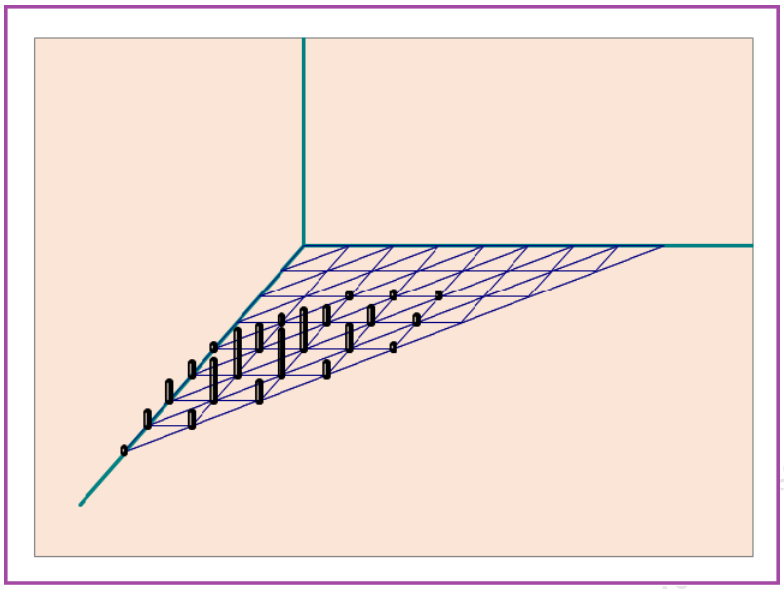
$$\binom{K_1}{x}\binom{K_2}{y}\binom{N - K_1 - K_2}{n - x - y}$$

Ezért a keresett súlyfüggvény érték:

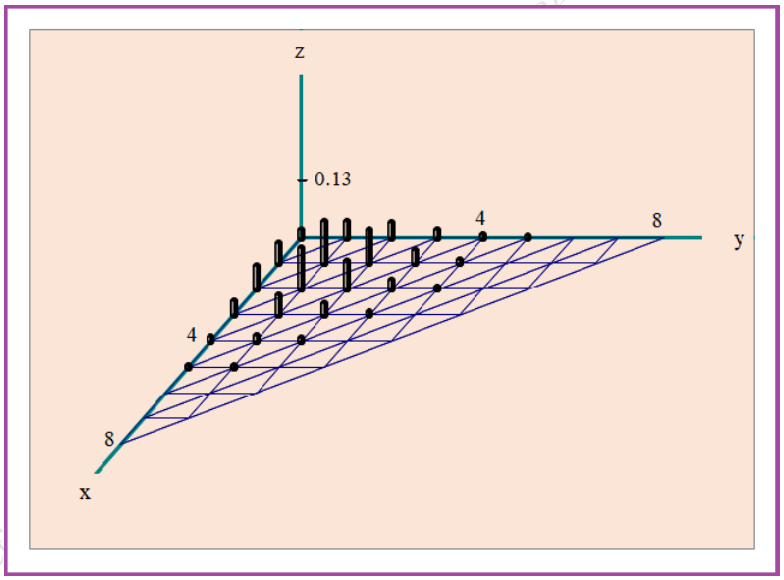
$$p(x, y) = \mathrm{P}(\, X = x, Y = y \,) = \frac{\binom{K_1}{x}\binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$$



5. ábra. *Polihipergeometrikus eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\ K_1 = 10,\ K_2 = 10;\ N = 30$



6. ábra. *Polihipergeometrikus eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\ K_1 = 30,\ K_2 = 10;\ N = 50$



7. ábra. *Polihipergeometrikus eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\ K_1 = 30,\ K_2 = 10;\ N = 50$

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy ha a dobozból való húzásokat visszatevéssel végezzük, akkor más eloszlást kapunk. Néhány oldallal később ki fog derülni, hogy visszatevéses húzás esetén az (X, Y) valószínűségi változó polinomiális eloszlást követ $p_1 = \frac{K_1}{N}$, $p_2 = \frac{K_2}{N}$ paraméterekkel.

Vetület eloszlások:

Teljesen nyilvánvaló, hogy az

$$X = \text{ahányszor piros golyót húzunk}$$

valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlást követ n , K_1 , N paraméterekkel, vagyis egy polihipergeometrikus eloszlásnak a vízszines tengelyre vetett vetülete (és természtetsen a függőleges tengelyre vetett vetülete is)

hipergeometrikus eloszlás. Ez a tény a

$$p_1(x) \;=\; \sum_y p(x,y)$$

összegzési szabállyal is kijön, hiszen

$$\sum_y \frac{\binom{K_1}{x}\binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}} \;=\; \frac{\binom{K_1}{x}}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_y \binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y} \;=$$

$$=\; \frac{\binom{K_1}{x}}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-K_1}{n-x} \;=\; \frac{\binom{K_1}{x}\binom{N-K_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

A bizonyítás második lépésében felhasználtuk a

$$\sum_y \binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y} \;=\; \binom{N-K_1}{n-x}$$

azonosságot.

Feltételes eloszlások:

- Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett olyan hipergeometrikus eloszlás, mintha $(n-x)$ -szer húznánk visszatevés nélkül egy olyan dobozból, ami $N - K_1$ golyót tartalmaz, melyek közül K_2 zöld és a többi fehér színű, és mi azt néznénk, hogy hányszor húzunk zöldet. Az állítást heurisztikus gondolatmenet is kiadja, és – természetesen – osztással, egyszerűsítéssel is kijön:

$$p_{2|1}(\,y\,|\,x\,) \;=\; \mathrm{P}(\,Y = y\,|\,X = x\,) \;=\; \frac{\mathrm{P}(\,X = x\,,\,Y = y\,)}{\mathrm{P}(\,X = x\,)} \;=$$

$$=\; \frac{\dfrac{\binom{K_1}{x}\binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}}{\dfrac{\binom{K_1}{x}\binom{N-K_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}} \;=\; \frac{\binom{K_2}{y}\binom{N-K_1-K_2}{n-x-y}}{\binom{N-K_1}{n-x}}$$

  Hasonlóan kiadódik az is, hogy

- X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltétel mellett olyan hipergeometrikus eloszlás, mintha $(n-y)$ -szor húznánk visszatevés nélkül egy olyan dobozból, ami $N - K_2$ golyót tartalmaz, melyek közül K_1 piros és a többi fehér színű, és mi azt néznénk, hogy hányszor húzunk pirosat.

A kétdimenziós súlyfüggvény előállítása Excelben:

A kétdimenziós súlyfüggvényt – mint tudjuk – a vetület eloszlás és a feltételes eloszlás súlyfüggvényeiből szorzatként állíthatjuk elő a

$$p(x,y) \;=\; p_1(\,x\,) \cdot p_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$$
$$p(x,y) \;=\; p_2(\,y\,) \cdot p_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$$

szorzási szabályok alapján. Ezért – fentebbiek figyelembe vételével – a kétdimenziós polinomiális eloszlás $p(x,y)$ súlyfüggvényét Excellel az alábbi képletek segítségével tudjuk előállítani:

$p(x,y) \;=\;$ `HYPGEOM.DIST(` x ; n ; K_1 ; N ; `FALSE`) $\cdot$ `HYPGEOM.DIST(` y ; $n{-}x$; K_2 ; $N{-}K_1$; `FALSE`)

$p(x,y) \;=\;$ `HYPGEOM.DIST(` y ; n ; K_2 ; N ; `FALSE`) $\cdot$ `HYPGEOM.DIST(` x ; $n{-}y$; K_1 ; $N{-}K_2$; `FALSE`)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész – Nevezetes diszkrét eloszlások

1.2.3. Polihipergeometrikus eloszlás, r -dimenziós *(Extra tananyag)*

Súlyfüggvény:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_r) \;=\; \frac{\binom{K_1}{x_1}\binom{K_2}{x_2}\ldots\binom{K_r}{x_r}\binom{N-K_1-K_2-\ldots-K_r}{n-x_1-x_2-\ldots-x_r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{ha} \qquad 0 \le x_i \;\le\; \min(n, K_i) \qquad (1 \le i \le r) \qquad \text{és}$$
$$0 \le n - x_1 - x_2 - \ldots - x_r \;\le\; \min(n, N - K_1 - K_2 - \ldots - K_r)$$

Mikor használjuk: Ha egy dobozban N golyó van, melyek közül K_1 darab piros, K_2 darab zöld, és így tovább K_r darab lila golyó van, továbbá $N - K_1 - K_2 - \ldots K_r$ darab fehér, és n -szer húzunk a dobozból **visszatevés nélkül**, akkor az az n -dimenziós valószínűségi változó, melynek koordinátái

$$X_1 \;=\; \text{ahányszor piros golyót húzunk}$$
$$X_2 \;=\; \text{ahányszor zöld golyót húzunk}$$
$$\vdots$$
$$X_r \;=\; \text{ahányszor lila golyót húzunk}$$

ilyen eloszlást követ.

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy ha a dobozból való húzásokat visszatevéssel végezzük, akkor az $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ valószínűségi változó polinomiális eloszlást követ

$$p_1 \;=\; \frac{K_1}{N} \qquad p_2 \;=\; \frac{K_2}{N} \qquad \ldots \qquad p_r \;=\; \frac{K_r}{N}$$

paraméterekkel.

Vetlek András – Valószínűségszámítás – Zárrész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.3. Binomiális eloszlás és társai

1.3.1. Binomiális eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Egy p valószínűségű eseményre n kísérletet végzünk. Az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X \;=\; \text{ahányszor bekövetkezik az esemény az } n \text{ kísérlet során}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$n \;=\; \text{a kísérletek száma}$$
   $$p \;=\; \text{az esemény valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** n darab független, külön-külön p valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$$X \;=\; \text{ahány esemény bekövetkezik az } n \text{ esemény közül}$$

Paraméterek jelentése:

$$n \;=\; \text{az események száma}$$

$$p \;=\; \text{az események közös valószínűség értéke}$$

3. **Golyók húzása dobozból:** Ha N darab golyó van egy ládában, közülük K darab piros, a többi $N-K$ darab fehér, és n -szer húzunk **visszatevéssel**, akkor a valószínűségi változó ilyen eloszlást követ:

$$X \;=\; \text{ahányszor pirosat húzunk}$$

Paraméterek jelentése:

$$n \;=\; \text{a húzások száma}$$

$$p \;=\; K/N \;=\; \text{piros húzásának valószínűsége minden egyes húzásnál}$$

Veszprémi András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

A súlyfüggvény képletének levezetése: A levezetést egy példán keresztül mutajuk be. E célból tegyük fel, hogy egy 10 tagú társaságból mindenki, a többiektől függetlenül, p valószínűséggel megy el vasárnap kirándulni. Jelölje X a kirándulók számát. Most azt kérdezzük, hogy mennyi az X súlyfügvényének az értéke az $x=3$ helyen, azaz mennyi annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $X=3$, vagyis hogy pontosan 3 ember megy el kirándulni:

$$p(3) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X=3\,) \;=\; ?$$

Válasz: Az, hogy 3 ember megy el kirándulni, bekövetkezhet például úgy, hogy a társaság 3 legöregebb tagja elmegy, a többi 7 pedig nem. Ennek a valószínűsége, a független eseményekre vonatkozó szorzási szabály miatt nyilván:

$$p\,p\,p\;\;(1-p)\,(1-p)\,(1-p)\,(1-p)\,(1-p)\,(1-p)\,(1-p) \;=$$
$$=\; p^3\,(1-p)^7$$

Az, hogy 3 ember megy el kirándulni, természetesen másképpen is lehetséges: a társaság akármelyik 3 tagja elmehet, a többi 7 pedig nem. Akármelyik 3 tag esetében annak a valószínűsége, hogy ők elmennek, a többi 7 pedig nem, ugyancsak

$$p^3\,(1-p)^7$$

Ezért, ha nem fontos számunkra, hogy ki az a 3 ember, aki elmegy, csak az fontos számunkra, hogy pontosan 3 ember menjen el (márpedig az $X=3$ esemény esetében ez a helyzet), akkor ennek az eseménynek a valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy a $p^3\,(1-p)^7$ közös valószínűség értéket megszorozzuk a 3 elemű kombinációk számával, vagyis $\binom{10}{3}$ -mal:

$$p(3) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X=3\,) \;=\; \binom{10}{3}\,p^3\,(1-p)^7$$

Világos, hogy ha a társaság nem 10 tagú, hanem n tagú, akkor annak a valószínűsége, hogy az n ember közül pontosan x ember megy el kirándulni:

$$p(x) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X=x\,) \;=\; \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Példa: Ha dobókockával 20 -szor dobok, és a dobott hatosok számát X jelöli, akkor a súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x} \qquad (x=0,1,\ldots,20)$$

A pontosan 3 hatos valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X = 3\ )\ =\ \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$$

Megjegyzés: A binomiális eloszlást a **visszatevéses**, a hipergeometrikus eloszlást a **visszatevés nélküli** húzások esetén kell használni.

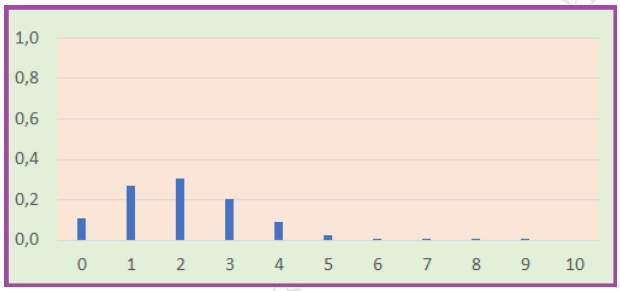
Excel-függvények:

$$p(x)\ =\ \texttt{BINOM.DIST(x;n;p;FALSE)}\ =\ \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;HAMIS)}$$
$$F(x)\ =\ \texttt{BINOM.DIST(x;n;p;TRUE)}\ =\ \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;IGAZ)}$$

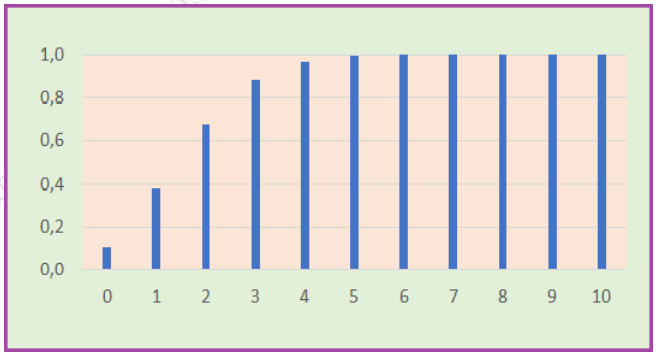
Megjegyzés: Egyes Excel verziókban az eloszlások nevében a . (pont) elhagyható, – például –

`BINOM.DIST` helyett `BINOMDIST`

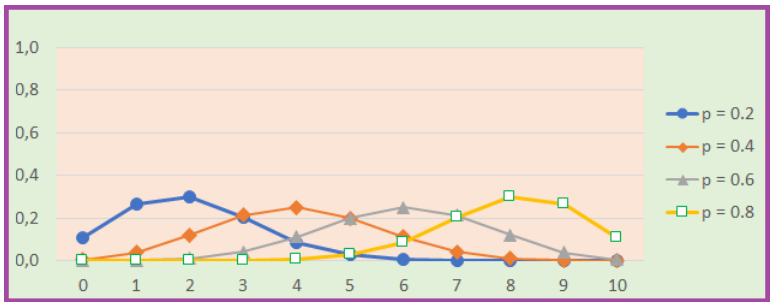
írható.



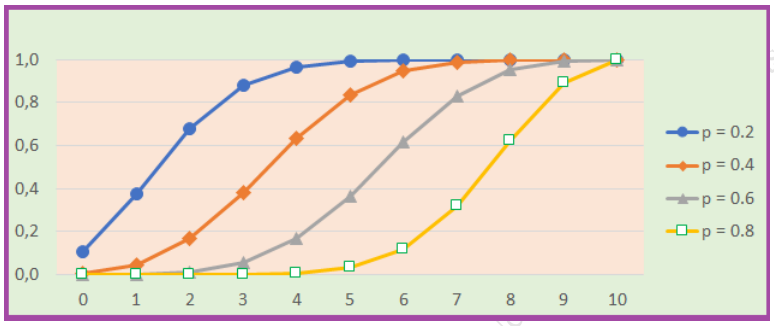
8. ábra. *Binomiális eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 10;\ p = 0.2$



9. ábra. *Binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye;* $n = 10;\ p = 0.2$



10. ábra. *Binomiális eloszlások súlyfüggvényei;* $n = 10;\ p = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$



11. ábra. *Binomiális eloszlások eloszlásfüggvényei;* $n = 10;\ p = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$

Megjegyzés: Hipergeometrikus eloszlás $\approx$ binomiális eloszlás. Kis ügyeskedéssel be lehet látni, hogy akármilyen x pozitív egész szám esetén az

$$K \to \infty\,, \qquad N \to \infty\,, \qquad K/N \to p$$

feltételek mellett

$$\lim \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \;=\; \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Ez azt jelenti, hogy ha x -hez képest K is és N is nagy, és a K/N arány közelítőleg p , akkor a hipergeometrikus eloszlás x -ik tagja közelítőleg egyenlő a binomiális eloszlás x -ik tagjával:

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \;\approx\; \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Az egzakt levezetést az "ügyeskedésekkel" az Olvasóra bízzuk. Cserébe egy heurisztikus magyarázatot adunk színes golyók segítségével:

Heurisztikus magyarázat: Tegyünk N golyót egy dobozba úgy, hogy közülül K piros, a többi fehér. Húzzunk a dobozból n -szer visszatevés nélkül. Annak az esélye, hogy pontosan x -szer húzunk pirosat – mint tudjuk – a hipergeometrikus eloszlás képlete szerint

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Most tegyünk N golyót egy másik dobozba ugyanúgy, mint az előbb, de most visszatevéssel húzzunk a dobozból n -szer. Annak a esélye, hogy pontosan x -szer húzunk pirosat – mint tudjuk – a binomiális eloszlás képlete szerint

$$\binom{n}{x}\left(\frac{K}{N}\right)^x \left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-x}$$

Ha x -hez képest K is és N is nagy, akkor a kihúzott piros golyók számára nézve nincs sok hatása annak, hogy visszatevés nélkül vagy visszatevéssel húzúnk, ezért az x darab piros golyó esélye így is úgy is kb ugyanannyi:

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}\left(\frac{K}{N}\right)^x\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-x}$$

Mivel feltettük, hogy az K/N arány közelítőleg p , a jobboldali kifejezést kicserélhetjük így:

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Ezek után talán kedve támad az Olvasónak, hogy az egzakt levezetést "kiügyeskedje". Hajrá!

1. Feladat: Vajon mindenki le tud ülni? 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 250 db szék van. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elmegy órára, mind le tud ülni egy-egy székre?

Megoldás: Először vegyük észre, hogy az órát látogató diákok X száma valószínűségi változó, mely – a diákok habitusa miatt – binomiális eloszlást követ $n = 400$ és $p = 0.6$ paraméterekkel. Az az esemény, hogy mindenkinek, aki elmegy órára, jut szék, azt jelenti, hogy $X \leq 250$. Ennek az eseménynek a P($X \leq 250$) valószínűségét az eloszlásfüggvénynek a 250 helyen felvett értéke adja meg, ami Excellel így számolható:

$$F(250) = \texttt{BINOM.DIST(250 ; 400 ; 0.6 ; TRUE)} =$$

$$= \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(250 ; 400 ; 0.6 ; IGAZ)} = 0.86$$

Tehát 0.86 valószínűséggel csak 250 vagy kevesebb hallgató megy órára, ezért 250 széken remekül elférnek. 0.14 valószínűséggel 250 -nél több hallgató megy órára, ezért ilyenkor lesz, aki nem tud székre ülni.

2. Feladat: Biztos, hogy mindenki le tud ülni? Hány szék kell ahhoz, hogy biztosan (1 valószínűséggel, 100% biztonsággal) jusson szék mindenkinek, aki elmegy órára?

Megoldás: Ahhoz, hogy biztosan jusson szék mindenkinek, aki elmegy órára, nyilván 400 vagy több székre van szükség.

3. Feladat: Spóroljunk a székekkel! Hány szék kell ahhoz, hogy legalább 0.99 legyen a valószínűsége annak (99% legyen a biztonsága annak), hogy aki elmegy órára, mind le tud ülni egy-egy székre?

Megoldás: Ahhoz, hogy legalább 0.99 legyen a valószínűsége annak, hogy mindenkinek, aki elmegy órára, jusson szék, az kell, hogy a székek x száma eleget tegyen az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$F(x) = \text{P}(X \leq x) \geq 0.99$$

Ezért az

$$F(x) = \texttt{BINOM.DIST(x ; 400 ; 0.6 ; TRUE)} =$$

$$= \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x ; 400 ; 0.6 ; IGAZ)}$$

függvényre készítettünk egy táblázatot:

Vetiére András – Valószínűségszámítás 2. rész. Nevezetes eloszlásfüggvények

x	$F(x)$
260	0.9824
261	0.9864
262	0.9897
263	0.9922
264	0.9942
265	0.9957
266	0.9968
267	0.9977
268	0.9984
269	0.9988
270	0.9992

Táblázat: *Numerikus értékek* $F(x)$*-re*

amiből kiolvashatjuk, hogy x értéke, vagyis a székek száma legalább 263 , akkor $F(x) = \mathrm{P}(\ X \leq x\ )\ \geq\ 0.99$.

1. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha a 100 % biztonság helyett megelégszünk 99 % biztonsággal, akkor a székeknek több mint $1/3$ -át megspórolhatjuk! Ha valaki a 99% biztonsággal még nem elégedett, akkor tegyen be a 263 székhez még 7 -et, és a biztonság – a táblázat utolsó sora szerint – megnő 99.9 %-ra.

2. Megjegyzés: Ilyen jellegű feladatok adódnak, amikor valamilyen rendszer, például egy telefonközpont, kapacitását kell megtervezni úgy, hogy a rendszer nagy valószínűséggel el tudja látni a véletlenszerűen felmerülő igényeket.

4. Feladat: A gubanc valószínűsége. Tegyük fel, hogy egy repülőgépen 200 ülés van az utasok számára, de – bízván abban, hogy néhány utas betegség, forgalmi dugó, stb. miatt lemarad a járatról – az extra profit reményében 203 jegyet adnak el. Feltéve, hogy minden utas a többitől függetlenül 0.05 valószínűséggel marad le a járatról, számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a beszálláskor "gubanc támad", mert 200 -nál több utas jelenik meg?

Megoldás: A járathoz időben odaérkező utasok száma nyilván binomiális eloszlást követ $n = 203$ és $p = 0.95$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy 200 -nál több utas jelenik meg a beszálláskor, vagyis előáll a "gubanc", egyenlő

$$1 - \texttt{BINOM.DIST(200 ; 203 ; 0.95 ; TRUE)} =$$

$$= 1 - \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(200 ; 203 ; 0.95 ; IGAZ)} = 0.0021$$

5. Feladat: Hány extra repülőjegyet adjunk el? Az előző feladatban kapott valószínűség értéke elég kicsi ahhoz, hogy a repülőtársaság felvállalja a gubanc következményeit. Nézzük meg, hogyan függ a gubanc valószínűsége az eladott extra jegyek számától! Gondoljuk meg, hogy a p paraméter függvényében hány extra jegyet adjon el a társaság, ha nem szeretne túl gyakran gubancot!

Megoldás: Excelben egyszerűen megszerkeszthető egy olyan táblázat, ami a gubanc valószínűségét mutatja p és az extra jegyek számának függvényében:

Szabó András – Valószínűségszámítás – rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

		p									
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
	1	0.1326	0.0172	0.0022	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.3992	0.0865	0.0154	0.0025	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.6685	0.2265	0.0555	0.0113	0.0021	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
extra	4	0.8507	0.4159	0.1368	0.0354	0.0078	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
jegyek	5	0.9437	0.6091	0.2613	0.0844	0.0224	0.0051	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000
száma	6	0.9818	0.7675	0.4144	0.1647	0.0522	0.0140	0.0033	0.0007	0.0001	0.0000
	7	0.9948	0.8763	0.5721	0.2751	0.1036	0.0323	0.0086	0.0021	0.0004	0.0001
	8	0.9987	0.9407	0.7120	0.4056	0.1794	0.0647	0.0198	0.0053	0.0013	0.0003
	9	0.9997	0.9741	0.8211	0.5414	0.2781	0.1152	0.0400	0.0120	0.0032	0.0008
	10	0.9999	0.9897	0.8971	0.6675	0.3926	0.1856	0.0728	0.0244	0.0072	0.0019

Táblázat: *A gubanc valószínűsége* p *és az extra jegyek számának függvényében*

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy ha a gubanc valószínűségét 0.005 alatt akarjuk tartani, akkor

$$\begin{array}{lll} p = 0.01 & \text{esetén} & 0 \\ p = 0.02 & \text{esetén} & 0 \\ p = 0.03 & \text{esetén} & 1 \\ p = 0.04 & \text{esetén} & 2 \\ p = 0.05 & \text{esetén} & 3 \\ p = 0.06 & \text{esetén} & 4 \\ p = 0.07 & \text{esetén} & 6 \\ p = 0.08 & \text{esetén} & 7 \\ p = 0.09 & \text{esetén} & 9 \\ p = 0.10 & \text{esetén} & 10 \end{array}$$

Táblázat: *Eladható extra jegyek száma* p *függvényében*

darab extra jegy adható el.

Feladat: Amikor a tesztek különböző eredményeket adnak! Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég – egymástól függetlenül – n intézetben is vizsgálták A vizsgálatok közül k esetben betegnek jelezték, $n-k$ pedig egészségesnek. Ilyen feltételek mellett mennyi a valószínűsége annak, hogy barátom beteg?

Megoldás: Feltételezve, hogy a vizsgálatok függetlenek egymástól, igazak az alábbiak:

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } k \text{ -szor | beteg)} \;=\; \binom{n}{k} 0.8^k (1-0.8)^{n-k} \;=\; \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)}$$

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } k \text{ -szor | egészséges)} \;=\; \binom{n}{k} 0.1^k (1-0.1)^{n-k} \;=\; \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.1 ; FALSE)}$$

Ezeket felhasználva – barátom esélyei így festenek:

Szabó Szabolcs – Valószínűségszámítás – 2. fej.: Nevezetes diszkrét eloszlások

$$\text{P(beteg | betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor)} =$$

$$= \frac{\text{P(beteg és betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor)}}{\text{P(betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor)}}$$

$$= \frac{\text{P(beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor | beteg)}}{\text{P(beteg és betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor)} + \text{P(egészséges és betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor)}}$$

$$= \frac{\text{P(beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor | beteg)}}{\text{P(beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor | beteg)} + \text{P(egészséges)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztizálják } k\text{ -szor | egészséges)}}$$

$$= \frac{0.001 \cdot \binom{n}{x} 0.8^x (1-0.8)^{n-x}}{0.001 \cdot \binom{n}{x} 0.8^x (1-0.8)^{n-x} + 0.999 \cdot \binom{n}{x} 0.1^x (1-0.1)^{n-x}} =$$

$$= \frac{0.001 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)}}{0.001 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)} + 0.999 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.1 ; FALSE)}}$$

Az alábbi táblázat a P(beteg | betegnek diagnosztizálják k -szor) feltételes valószínűség numerikus értékeit tartalmazza a $0 < k \leq n \leq 5$ esetekre:

	5	4	3	2	1	k
1					0.008	
2				0.060	0.002	
3			0.339	0.014	0.000	
4		0.804	0.102	0.003	0.000	
5	0.970	0.477	0.025	0.001	0.000	
n						

Táblázat: *P(beteg | n vizsgálat során k -szor diagnosztizálják betegnek)*

Ez a másik a táblázat pedig az $n = 10$ és $k = 9, 8, 7, 6, 5, 4$ esetekről szól:

	9	8	7	6	5	4	k
$n = 10$	1.000	0.999	0.958	0.390	0.017	0.000	

Táblázat: *A $k = 9, 8, 7, 6, 5, 4$ esetek*

Érdemes elgondolkodni a numerikus értékek jelentésén!

Megjegyzés: A binomiális elolszlás $n = 1$ mellett vett speciális esete lesz az indikátor eloszlás, többdimenziós általánosítása pedig a polinomiális eloszlás.

1.3.2. Indikátor eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1-p & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész – egyetemi diskrét eloszlások

Mikor használjuk: Egy eseménnyel kapcsolatban bizonyos gondolatmenetben hasznos, ha az esemény bekövetkezését egy kétértékű valószínűségi változóval kódoljuk: az 1 az esemény bekövetkezését, a 0 az esemény be nem következését jelenti:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ha az esemény bekövetkezik} \\ 0 & \text{ha az esemény nem következik be} \end{cases}$$

Ezt a valószínűségi változót az esemény **indikátorá**nak nevezzük. Ha például több eseménnyel kapcsolatban azt nézzük, hogy közülük hány következik be, akkor ez a valószínűségi változó az egyes események indikátorainak az összege. A binomiális eloszlással kapcsolatos számításoknál hasznos, hogy indikátorok összegeként binomiális eloszlású valószínűségi változót tudunk előállítani.

Paraméter jelentése:

$$p = \text{az esemény valószínűsége}$$

1.3.3. Binomiális eloszlás számsorozaton

Ha az $a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_n$ sorozat egy számtani sorozatot alkot, akkor

$$p(a_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

képlettel definiált eloszlás neve: **binomiális eloszlás a** $a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_n$ számok **halmazán**.

1. Példa. Ha egy eseménnyel kapcsolatban n kísérletet végzünk, akkor az esemény relatív gyakorisága – nyilvánvalóan – binomiális eloszlást követ a

$$\frac{0}{n}\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \frac{2}{n}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{k}{n}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{n}{n}$$

számok halmazán.

2. Példa. Ha egy n házaspárból álló társaságból minden házaspár a többitől függetlenül p valószínűséggel megy el egy összejövetelre, akkor az összejövetelen résztvevő *emberek* száma – nyilvánvalóan – binomiális eloszlást követ

$$0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ \dots\ ,\ 2n$$

számok halmazán.

3. Példa. Ha n háromgyerekes család mindegyike a többitől függetlenül p valószínűséggel vesz részt egy rendezvényen, akkor az résztvevő emberek száma – nyilvánvalóan – binomiális eloszlást követ a

$$0\ ,\ 5\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ 5n$$

számok halmazán.

Vincze András – Valószínűségszámítás – Szerzői jogok fenntartva – Nevezetes diszkrét eloszlások

1.3.4. Polinomiális eloszlás

Súlyfüggvény :

$$p(x,y) \;=\; \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\;\;(p_1)^x\;(p_2)^y\;\;(1-p_1-p_2)^{n-x-y} \;=$$

$$=\; \binom{n}{x}\cdot\binom{n-x}{y}\;\;(p_1)^x\;(p_2)^y\;\;(1-p_1-p_2)^{n-x-y}$$

ha

$$0 \le x \le n$$

$$0 \le y \le n$$

$$0 \le n-x-y \le n$$

Mikor használjuk: Ha A és B egymást kizáró események, és n kísérletet végzünk velük kapcsolatban, akkor az a kétdimenziós valószínűségi változó, melynek koordinátái

$$X \;=\; \text{ahányszor bekövekezik az } A \text{ esemény}$$

$$Y \;=\; \text{ahányszor bekövekezik a } B \text{ esemény}$$

ilyen eloszlást követ.

Paraméterek jelentése:

$$n \;=\; \text{ahány kísérletet végzünk}$$

$$p_1 \;=\; \text{az } A \text{ esemény valószínűsége}$$

$$p_2 \;=\; \text{a } B \text{ esemény valószínűsége}$$

A súlyfüggvény képletének levezetése: A levezetést egy példán keresztül mutajuk be. E célból tegyük fel, hogy egy 10 tagú társaságból mindenki, a többiektől függetlenül, vasárnap p_1 valószínűséggel megy el kirándulni, p_2 valószínűséggel pedig moziba megy. Jelölje X a kirándulók számát, Y pedig a moziba menők számát. Most azt kérdezzük, hogy mennyi az (X,Y) súlyfügvényének az értéke az $x=3$, $y=2$ helyen, azaz mennyi annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $X=3$ és $Y=2$, vagyis hogy pontosan 3 ember megy el kirándulni, és pontosan 2 megy moziba:

$$p(3,2) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X=3\,,\,Y=2\,) \;=\; ?$$

Válasz: Az, hogy 3 ember megy el kirándulni, és 2 megy moziba, bekövetkezhet például úgy, hogy a társaság 3 legöregebb tagja kirándulni megy, a 2 legfiatalabb moziba megy, a többi 5 pedig sem nem kirándul, sem nem megy moziba. Ennek a valószínűsége, a független eseményekre vonatkozó szorzási szabály miatt nyilván:

$$p_1\,p_1\,p_1\;\;p_2\,p_2\;\;(1-p_1-p_2)\,(1-p_1-p_2)\,(1-p_1-p_2)\,(1-p_1-p_2)\,(1-p_1-p_2) \;=$$

$$=\;\; p_1^3\,p_2^2\,(1-p_1-p_2)^5$$

Az, hogy 3 ember megy el kirándulni, és 2 pedig moziba természetesen másképpen is lehetséges: a társaság akármelyik 3 tagja mehet kirándulni, akármelyik másik 2 tagja mehet moziba, és a többi 5 pedig se ide se oda nem megy. Akármelyik 3 kirándulós és 2 mozizós ember esetében annak a valószínűsége, hogy ők mennek kirándulni, illetve moziba, és a többi 5 pedig se ide se oda, ugyancsak

$$p_1^3\,p_2^2\,(1-p_1-p_2)^5$$

Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Ezért, ha nem fontos számunkra, hogy ki az a 3 ember, aki kirándulni megy, és ki az a 2 ember, aki moziba megy, csak az fontos számunkra, hogy pontosan 3 ember menjen kirándulni és pontosan 2 pedig moziba (márpedig az

$$X = 3 \quad \text{és} \quad Y = 2$$

esemény esetében ez a helyzet), akkor ennek az eseménynek a valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy a

$$p_1^3\, p_2^2\, (1 - p_1 - p_2)^5$$

közös valószínűség értéket megszorozzuk a 3 kiránduló és a 2 mozizó kiválasztási lehetőségeinek számával, vagyis

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}$$

-vel:

$$p(3,2) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X = 3\,,\, Y = 2\,) \;=\; \binom{10}{3}\binom{7}{2}\, p_1^3\, p_2^2\, (1 - p_1 - p_2)^5$$

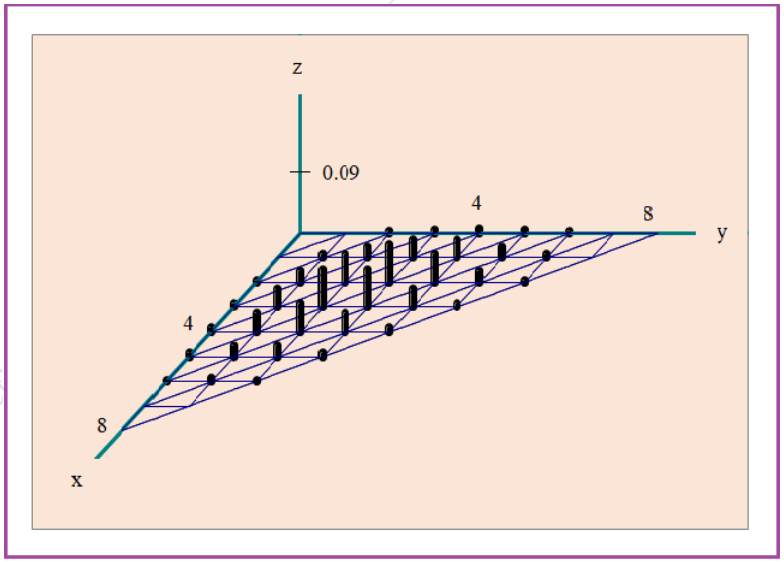
A binomiális együtthatókat faktoriálisokkal kifejtve, egyszerűsítés után az eredményt így is írhatjuk:

$$p(3,2) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X = 3\,,\, Y = 2\,) \;=\; \frac{10!}{3!\;2!\;5!}\, p_1^3\, p_2^2\, (1 - p_1 - p_2)^5$$

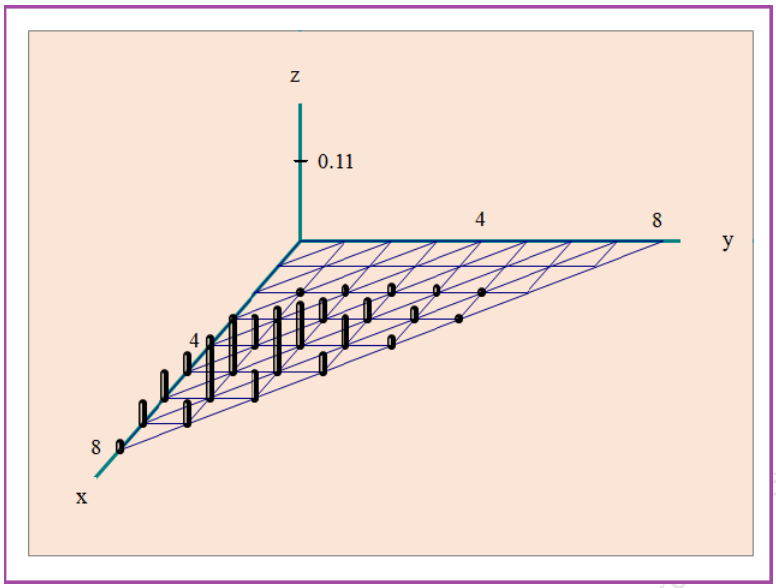
Világos, hogy ha a társaság nem 10 tagú, hanem n tagú, akkor annak a valószínűsége, hogy az n ember közül pontosan x ember megy el kirándulni, és y ember mozizni:

$$p(x,y) \;=\; \mathrm{P}\,(\,X = x\,,\, Y = y\,) \;=\; \frac{n!}{x!\;y!\;(n-x-y)!}\, p_1^x\, p_2^y\, (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y}$$

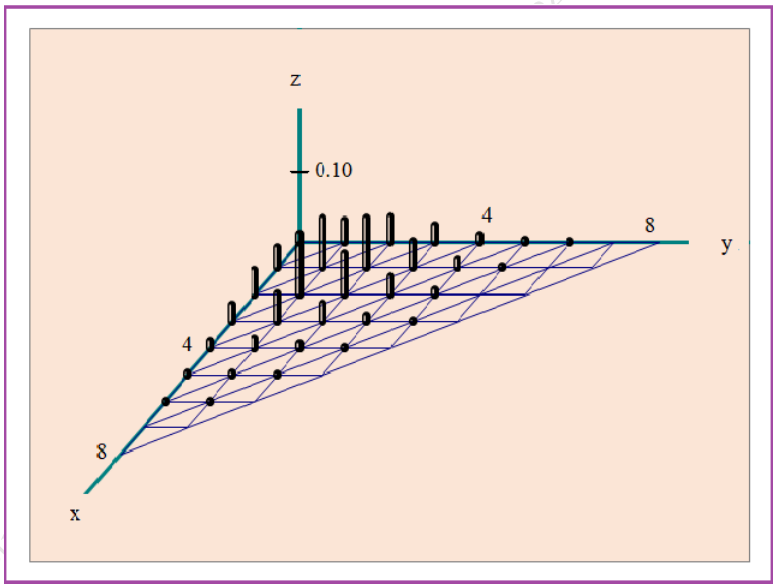
Ver – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások



12. ábra. *Polinomiális eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\; p_1 = 0.33,\; p_2 = 0.33$



13. ábra. *Polinomiális eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\ p_1 = 0.6,\ p_2 = 0.2$



14. ábra. *Polinomiális eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 8;\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.2$

Példa: Ha szabályos dobókockával 20 -szor dobunk, és

$$X = \text{ahányszor 1 -est dobunk}$$

$$Y = \text{ahányszor 2 -est vagy 3 -ast dobunk}$$

akkor az (X, Y) valószínűségi változó kétdimenziós polinomiális eloszlást követ $n = 20$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{2}{6}$ paraméterekkel. A súlyfüggvény képlete:

$$p(x, y) = \frac{20!}{x!\ y!\ (20 - x - y)!} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{2}{6}\right)^y \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)^{(20-x-y)}$$

Például az $X = 3$ és $Y = 5$ esemény valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X = 3\ ,\ Y = 5\ )\ =\ \frac{20!}{3!\ 5!\ (20-3-5)!}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{2}{6}\right)^5\ \left(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\right)^{(20-3-5)}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az itt bevezetett polinomiális eloszlás a binomiális eloszlás általánosítása egydimenzióról kétdimenzióra.

Vetület eloszlások:

Teljesen nyilvánvaló, hogy az

$$X\ =\ \text{ahányszor bekövekezik az } A \text{ esemény}$$

valószínűségi változó binomiális eloszlást követ n és p_1 paraméterekkel, vagyis egy polinomiális eloszlásnak a vízszintes tengelyre vetett vetülete (és természetsen a függőleges tengelyre vetett vetülete is) binomiális eloszlás. Ez a tény a

$$p_1(x)\ =\ \sum_y\ p(x,y)$$

összegzési szabállyal is kijön, hiszen

$$\sum_y \binom{n}{x} \cdot \binom{n-x}{y}\ \cdot\ (p_1)^x\ \cdot\ (p_2)^y\ (1-p_1-p_2)^{n-x-y}\ =$$

$$=\ \binom{n}{x}\ \cdot\ (p_1)^x\ \cdot\ \sum_y \binom{n-x}{y}\ (p_2)^y\ (1-p_1-p_2)^{n-x-y}\ =$$

$$=\ \binom{n}{x}\ \cdot\ p_1^x\ \cdot\ (1-p_1)^{n-x}$$

Az első lépésben kiemelést végeztünk, a másodikban – az algebrában tanult "binomiális tétel"-re támaszkodva – felhasználtuk, hogy

$$\sum_y \binom{n-x}{y}\ (p_2)^y\ (1-p_1-p_2)^{n-x-y}\ =\ (1-p_1)^{n-x}$$

azonosságot.

Feltételes eloszlások:

- Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett binomiális eloszlás $n-x$ és $\frac{p_2}{1-p_1}$ paraméterekkel. Az állítást heurisztikus gondolatmenet is kiadja, és – természetesen – osztással, egyszerűsítésekkel is kijön:

$$p_{2|1}(\,y\,|\,x\,)\ =\ \mathrm{P}\,(\,Y=y\,|\,X=x\,)\ =\ \frac{\mathrm{P}\,(\,X=x\,,\,Y=y\,)}{\mathrm{P}\,(\ X=x)}\ =$$

$$=\ \frac{\binom{n}{x}\cdot\binom{n-x}{y}\ \ (p_1)^x\ (p_2)^y\ \ (1-p_1-p_2)^{n-x-y}}{\binom{n}{x}p_1^x(1-p_1)^{n-x}}\ =$$

$$=\ \binom{n-x}{y}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x-y}$$

Hasonlóan kiadódik az is, hogy

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

- X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltétel mellett binomiális eloszlás $n - y$ és $\frac{p_1}{1-p_2}$ paraméterekkel.

A kétdimenziós súlyfüggvény előállítása Excelben:

A kétdimenziós súlyfüggvényt – mint tudjuk – a vetület eloszlás és a feltételes eloszlás súlyfüggvényeiből szorzatként állíthatjuk elő a

$$p(x,y) \;=\; p_1(\,x\,) \;\cdot\; p_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$$
$$p(x,y) \;=\; p_2(\,y\,) \;\cdot\; p_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$$

szorzási szabályok alapján. Ezért – fentebbiek figyelembe vételével – a kétdimenziós polinomiális eloszlás $p(x,y)$ súlyfüggvényét Excellel az alábbi képletek segítségével tudjuk előállítani:

$$p(x,y) \;=\; \texttt{BINOM.DIST(}\,x\,;\,n\,;\,p_1\,;\,\texttt{FALSE}\,\texttt{)} \cdot \texttt{BINOM.DIST(}\,y\,;\,n-x\,;\,\frac{p_2}{1-p_1}\,;\,\texttt{FALSE}\,\texttt{)}$$

$$p(x,y) \;=\; \texttt{BINOM.DIST(}\,y\,;\,n\,;\,p_2\,;\,\texttt{FALSE}\,\texttt{)} \cdot \texttt{BINOM.DIST(}\,x\,;\,n-y\,;\,\frac{p_1}{1-p_2}\,;\,\texttt{FALSE}\,\texttt{)}$$

1.3.5. Polinomiális eloszlás, r -dimenziós *(Extra tananyag)*

Súlyfüggvény:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_r) \;=$$
$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_r!\,(n - x_1 - x_2 - \ldots - x_r)!}\;(p_1)^{x_1}\,(p_2)^{x_2}\;\ldots(p_r)^{x_r}\;(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_r)^{(n-x_1-x_2-\ldots-x_r)}$$

ha

$$0 \le x_i \le n \qquad (1 \le i \le r)$$
$$0 \le n - x_1 - x_2 - \ldots - x_r \le n$$

Mikor használjuk: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ egymást kizáró események, és n kísérletet végzünk velük kapcsolatban, akkor az az r -dimenziós valószínűségi változó, melynek koordinátái

$$X_1 \;=\; \text{ahányszor bekövekezik az } A_1 \text{ esemény}$$
$$X_2 \;=\; \text{ahányszor bekövekezik az } A_2 \text{ esemény}$$
$$\vdots$$
$$X_r \;=\; \text{ahányszor bekövekezik az } A_r \text{ esemény}$$

Paraméterek jelentése:

$$p_1 \;=\; \text{az } A_1 \text{ esemény valószínűsége}$$
$$p_2 \;=\; \text{az } A_2 \text{ esemény valószínűsége}$$
$$\vdots$$
$$p_r \;=\; \text{az } A_r \text{ esemény valószínűsége}$$

Vetics András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Példa: Ha szabályos dobókockával 20 -szor dobunk, és

$$X_1 \;=\; \text{ahányszor } 1 \text{ -est dobunk}$$

$$X_2 \;=\; \text{ahányszor } 2 \text{ -est vagy } 3 \text{ -ast dobunk}$$

$$X_3 \;=\; \text{ahányszor } 4 \text{ -est dobunk}$$

akkor az (X_1, X_2, X_3) valószínűségi változó 3-dimenziós polinomiális eloszlást követ

$$n \;=\; 20\,, \qquad p_1 \;=\; \frac{1}{6}\,, \qquad p_2 \;=\; \frac{2}{6}\,, \qquad p_3 \;=\; \frac{1}{6}$$

paraméterekkel.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az itt bevezetett polinomiális eloszlás a binomiális eloszlás általánosítása egydimenzióról r -dimenzióra.

Vetter András – Valószínűségszámítás – rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.4. Különböző valószínűségű események közül hány következik be? *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független események. Valószínűségeiket jelöljük $p_1, p_2, \ldots, p_n$ -nel. Érdekelhet minket, hogy az események közül hány következik be. Ezt a valószínűségi változó jelöljük X_n -nel:

$$X_n \;=\; \text{ahány bekövetkezik az } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ események közül}$$

Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását ismerjük abban a speciális esetben, amikor a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűségek egyenlőek: binomiális eloszlás n és p paraméterekkel, ahol a paraméter p a valószínűségek közös értékét jelenti. Most azzal az esettel foglalkozunk, amikor a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűségek nem mind egyenlőek.

Mindjárt látni fogjuk, hogy ebben az általánosabb esetben X_n eloszlásának tagjaira egyszerű rekurzív képletet adható. A rekurzív képlet tényleg egyszerű lesz: csak összeadásokat és szorzásokat tartalmaz, ami lehetővé teszi, hogy kis n értékekre kézi számolással vagy kalkulátorral, nagyobb n értékekre pedig számítógép segítségével meghatározhassuk az eloszlás tagjait.

A rekurzív képlet levezetéshez szükség van az

$$X_k \;=\; \text{ahány esemény bekövetkezik } A_1\ A_2, \ldots\ A_k \text{ közül}$$

valószínűségi változókra is $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Előre bocsátjuk, hogy

- az $X_k = k$ esemény azt jelenti, hogy az $A_1\ A_2, \ldots\ A_k$ események mind bekövetkeznek,
- az $X_k = 0$ esemény azt jelenti, hogy az $A_1\ A_2, \ldots\ A_k$ események egyike sem következik be,
- az $X_k = i$ esemény azt jelenti, hogy az $A_1\ A_2, \ldots\ A_k$ események közül pontosan i darab következik be.

A $\mathrm{P}(X_k = k)$ valószínűség értéke nyilvánvaló:

$$\mathrm{P}(X_k = k) \;=$$

$$= \;\mathrm{P}(\text{az } A_1\ A_2, \ldots\ A_k \text{ események mind bekövetkeznek}) \;=\; p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

Elnevezhetnénk ezt a a szabályt *az események bekövetkezésével kapcsolatos szorzási szabály*nak, de a rövidség kedvéért inkább *első szorzási szabály*nak nevezzük.

A $\mathrm{P}(X_k = 0)$ valószínűség értéke is nyilvánvaló:

$$\mathrm{P}(X_k = 0) \;=$$

$$= \mathrm{P}(\text{az } A_1\ A_2, \ldots\ A_k \text{ események közül egyik sem következik be}) \;=\; (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\ldots\cdot(1-p_k)$$

Elnevezhetnénk ezt a a szabályt *az események be nem következésével kapcsolatos szorzási szabály*nak, de a rövidség kedvéért inkább *második szorzási szabály*nak nevezzük.

A $\mathrm{P}(X_k = i)$ valószínűségre pedig $0 < i < k$ esetén nyilván igaz az alábbi rekurzív összefüggés:

$$\mathrm{P}(X_k = i) \;=$$

$$= \mathrm{P}(X_{k-1} = i-1)\cdot\mathrm{P}(\ A_k \text{ bekövetkezik}) \;+\; \mathrm{P}(X_{k-1} = i)\cdot\mathrm{P}(\ A_k \text{ nem következik be}) \;=$$

$$= \mathrm{P}(X_{k-1} = i-1)\cdot p_k \;+\; \mathrm{P}(X_{k-1} = i)\cdot(1-p_k)$$

hiszen az, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ események közül pontosan i következik be, az alábbi kétféle, egymást kizáró módon lehetséges:

- vagy úgy, hogy $A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_{k-1}$ közül pontosan $i-1$ következik be, és A_k is bekövetkezik
- vagy úgy, hogy $A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_{k-1}$ közül pontosan i következik be, és A_k nem következik be

Ezt a szabályt egyszerűen *rekurzív szabály*nak nevezzük.

1. Példa. Bizonyára lesz, akinek segít, ha most egy konkrét numerikus példát mutatunk, és elemzünk. E célból tegyük fel, hogy az $A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4$ események függetlenek, és valószínűségeik:

$$p_1 \;=\; 0.1 \qquad p_2 \;=\; 0.2 \qquad p_3 \;=\; 0.3 \qquad p_4 \;=\; 0,4$$

Az $A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4$ eseményekkel kapcsolatban értelmezett $X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ X_4$ valószínűségi változók eloszlásait táblázatba foglaltuk. A táblázat bal oldalán feltüntettük az események és a komplementereik valószínűségeit:

		X_i lehetséges értékei	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(A_1) = 0.1$	$\mathrm{P}(\overline{A_1}) = 0.9$	X_1 **eloszlása:**	0.9	0.1			
$\mathrm{P}(A_2) = 0.2$	$\mathrm{P}(\overline{A_2}) = 0.8$	X_2 **eloszlása:**	0.72	0.26	0.02		
$\mathrm{P}(A_3) = 0.3$	$\mathrm{P}(\overline{A_3}) = 0.7$	X_3 **eloszlása:**	0.504	0.398	0.092	0.006	
$\mathrm{P}(A_4) = 0.4$	$\mathrm{P}(\overline{A_4}) = 0.6$	X_4 **eloszlása:**	0.3024	0.4404	0.2144	0.0404	0.0024

Táblázat: *Az* $X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ X_4$ *valószínűségi változók eloszlásai*

A fentebb kimondott szabályok ezeken a numerikus értékeken keresztül ellenőrizhetők. Például:

- $\mathrm{P}(\ X_2 = 2\ ) \;=\; 0.02 \;=\; 0.1\cdot 0.2$ *(első szorzási szabály)*

Veszter András – Valószínűségszámítás – 2. rész – Elnevezetes diszkrét eloszlások

- $\mathrm{P}(\ X_2 = 1\ )\ =\ 0.26\ =\ 0.9 \cdot 0.2\ +\ 0.1 \cdot 0.8$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_2 = 0\ )\ =\ 0.72\ =\ 0.9 \cdot 0.8$ *(második szorzási szabály)*

- $\mathrm{P}(\ X_3 = 3\ )\ =\ 0.006\ =\ 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3$ *(első szorzási szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_3 = 1\ )\ =\ 0.398\ =\ 0.72 \cdot 0.3\ +\ 0.26 \cdot 0.7$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_3 = 2\ )\ =\ 0.092\ =\ 0.26 \cdot 0.3\ +\ 0.02 \cdot 0.7$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_3 = 0\ )\ =\ 0.504\ =\ 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7$ *(második szorzási szabály)*

- $\mathrm{P}(\ X_4 = 4\ )\ =\ 0.0024\ =\ 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4$ *(első szorzási szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_4 = 1\ )\ =\ 0.4404\ =\ 0.504 \cdot 0.4\ +\ 0.398 \cdot 0.6$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_4 = 2\ )\ =\ 0.2144\ =\ 0.398 \cdot 0.4\ +\ 0.092 \cdot 0.6$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_4 = 3\ )\ =\ 0.0404\ =\ 0.092 \cdot 0.4\ +\ 0.006 \cdot 0.6$ *(rekurzív szabály)*
- $\mathrm{P}(\ X_4 = 0\ )\ =\ 0.3024\ =\ 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6$ *(második szorzási szabály)*

Ebben a példában 4 esemény kapcsán 4 lépésben jutottunk el az X_4 valószínűségi változó eloszlásához a táblázat első, fejléces sorát 4 további sor követi.

Ha – mondjuk – 400 esemény kapcsán foglalkozunk azzal a valószínűségi változóval, ami megmondja, hogy a 400 esemény közül hány kövekezik be, akkor ennek a valószínűségi változónak az eloszlásához lényegében ugyanígy, csak hosszadalmasabb számolással (400 lépésben) juthatunk el. Ez a hosszadalmas számolás számítógéppel, például Excellel, egyáltalán nem hosszadalmas, csak – a táblázat felépítésénél – okosan kell lefordítani a rekurzív képletet helyes Excel képletté.

2. Példa: Diákok különböző szorgalommal. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül jár órára, de nem egyforma szorgalommal:

- a legszorgalmasabb 0.800
- a második legszorgalmasabb 0.799
- a harmadik legszorgalmasabb 0.798
- és így tovább
- a legkevésbé szorgalmas 0.401

valószínűséggel megy el az órákra. Hány szék kell ahhoz, hogy 0.99 biztonsággal jusson szék mindenkinek, aki elmegy órára?

Megoldás: Excellel először elkészítettük – a rekurzív képlet segítségével, 400 lépésben – az órát látogató diákok száma súlyfüggvényének a táblázatát, majd abból összegzéssel az eloszlásfüggvény táblázatát. Ezeket a táblázatokat nagy méretük miatt a könyv sorai közé nem tesszük be. Az Olvassó megtekintheti őket a

`http://math.bme.hu/~vetier/2016_osz/A4_vill_2016_osz.html` címen a lap felső részében a mellékletek között található

`400 különböző diák` linken található Excel fájlban.

Ízelítőül a súlyfüggvény és az eloszlásfüggvény ábráit megmutajuk: lásd az "Ahány diák elmegy az órára– súlyfüggvény" és az "Ahány diák elmegy az órára – eloszlásfüggvény" feliratú ábrákat.

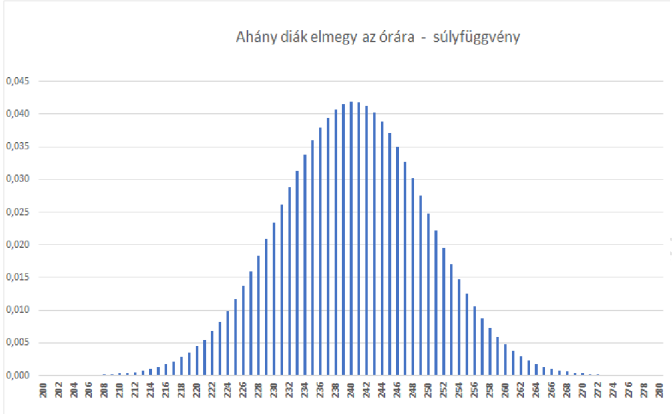
Az eloszlásfüggvény táblázatából idemásoltuk azt a részt, ahol az $F(x)$ átlépi a 0.99 értéket:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Az egyszerű vezetés diszkrét eloszlások

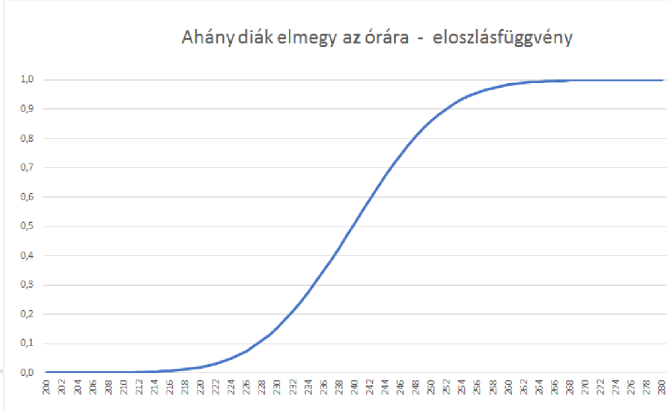
x	260	261	262	263
$F(x)$	0.984	0.988	0.991	0.993

Ahol az $F(x)$ *átlépi a* 0.99 *értéket*

Látjuk, hogy $x = 261$ esetén $F(x) = 0.988$, de $x = 262$ esetén $F(x) = 0.991$. Tehát 261 szék még nem, de 262 már elegendő!



15. ábra. *Ahány diák elmegy az órára– súlyfüggvény*



16. ábra. *Ahány diák elmegy az órára – eloszlásfüggvény*

1.5. Geometriai eloszlások és társaik

1.5.1. Geometriai eloszlás (optimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) = (1-p)^{x-1}p \qquad \text{ha} \quad x = 1, 2, \ldots$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a súlyfüggvény értékei mértani sorozatot alkotnak. A sorozat első tagja p, a kvóciense $q = 1 - p$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) \;=\; 1 - (1-p)^x \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(x) \;=\; q^{x-1} \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

ahol $q \;=\; 1 - p$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a jobboldali eloszlásfüggvény nem más, mint egy q alapú exponenciális függvény, mely az $x = 1, 2, \ldots$ értékeken értelmezett, $q = 1 - p$.

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:**Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X \;=\; \text{ahányadik kísérletnél először következik be az esemény}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p \;=\; \text{az esemény valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén

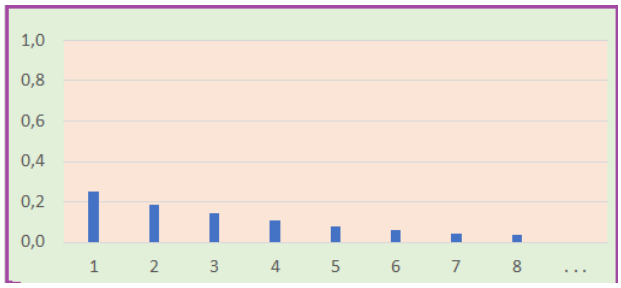
   $$X \;=\; \text{ahányadik esemény az első olyan, ami bekövetkezik}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p \;=\; \text{az események közös valószínűség értéke}$$

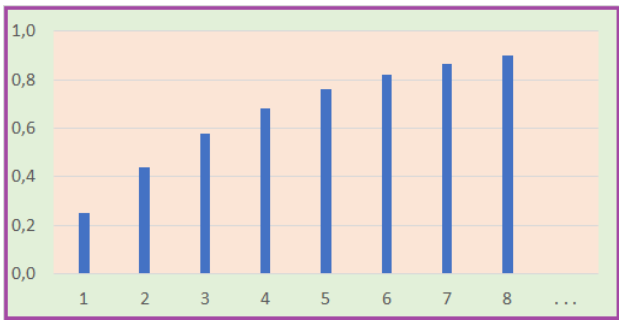
A súlyfüggvény képletének levezetése: Ha egy p valószínűségű A eseményre végzett független kísérletsorozattal kapcsolatban X jelöli annak a kísérletnek a sorszámát, amikor az A esemény először következik be, akkor az $X = x$ esemény azt jelenti, hogy az első $x - 1$ kísérlet során az A nem következett be, de az x-ik kísérletnél A bekövetkezett. Ezért – a független eseményekre vonatkozó szorzási szabály felhasználva – ezt kapjuk:

$$p(x) \;=\; \mathrm{P}\,(X = x) \;=\; (1-p)^{x-1} p$$

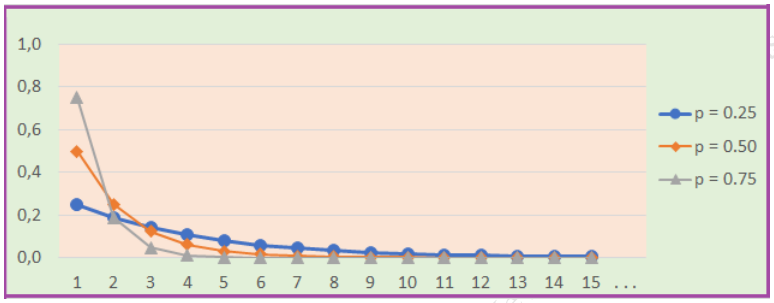


17. ábra. *Geometriai (optimista) eloszlás súlyfüggvénye;* $p = 0.25$

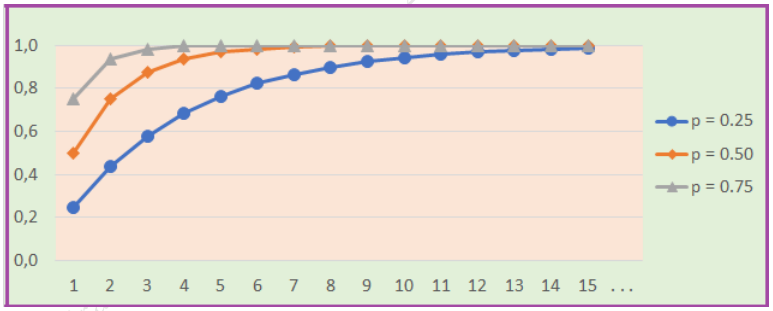
Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások



18. ábra. *Geometriai (optimista) eloszlás eloszlásfüggvénye;* $p = 0.25$



19. ábra. *Geometriai (optimista) eloszlások súlyfüggvényei;* $p = 0.25,\ 0.50,\ 0.75$



20. ábra. *Geometriai (optimista) eloszlások eloszlásfüggvényei;* $p = 0.25,\ 0.50,\ 0.75$

1. Feladat: Vadászat az első nyúlig. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül csak 0.05 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétvégén (szombaton és vasárnap) a jobb puskájával lövöldöz. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.4 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Minden nap addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül egyet leterítenie.

Első kérdés: Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, 7 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Ez a bizonyos nap vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Második kérdés: Hogyan lehet következtetni a napi lövések számából arra, hogy a lövések napja vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Megoldás: Tekintsünk egy hétköznapot. A nyúl leterítéséhez szükséges lövések száma optimista geometriai eloszlást követ 0.05 paraméterrel. Ezért egy hétköznapon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) \ = \ 0.05\,(1-0.05)^{k-1}$$

Egy hétvégi napokon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\text{P(} k \text{ lövés | hétvégi nap)} \;=\; 0.4\,(1-0.4)^{k-1}$$

Mivel a napok $5/7$ -e hétköznap, $2/7$ -e hétvégi nap, annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül,

$$\frac{5}{7}\cdot 0.05\,(1-0.05)^{k-1} \;+\; \frac{2}{7}\cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}$$

Ha egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül, akkor annak a valószínűsége, hogy ez a nap hétköznap volt:

$$\text{P(hétköznap | } k \text{ lövés)} \;=\; \frac{\frac{5}{7}\cdot 0.05\,(1-0.05)^{k-1}}{\frac{5}{7}\cdot 0.05\,(1-0.05)^{k-1} \;+\; \frac{2}{7}\cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy hétvégi nap volt:

$$\text{P(hétvégi nap | } k \text{ lövés)} \;=\; \frac{\frac{2}{7}\cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}{\frac{5}{7}\cdot 0.05\,(1-0.05)^{k-1} \;+\; \frac{2}{7}\cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}$$

Excellel könnyű kiszámolni a képletek numerikus értékét. Íme a táblázat:

k	P(hétköznap | k lövés)	P(hétvégi nap | k lövés)
1	0.24	0.76
2	0.33	0.67
3	0.44	0.56
4	0.55	0.45
5	0.66	0.34
6	0.76	0.24
7	0.83	0.17
8	0.89	0.11
9	0.93	0.07
10	0.95	0.05

Táblázat: *Hétköznap és hétvégi nap?*

Válasz az első kérdésre: A táblázatból kiolvassuk, hogy $k = 7$ esetén a hétköznap valószínűsége 0.83 , a hétvégi nap valószínűsége 0.17

Válasz a második kérdésre: A táblázat azt is mutatja, hogy $k = 1, 2, 3$ esetén a hétvégi nap a valószínűbb, más lövészszám esetén a hétköznap a valószínűbb.

1.5.2. Geometriai eloszlás (pesszimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; (1-p)^x p \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a súlyfüggvény értékei mértani sorozatot alkotnak. A sorozat első tagja p , a kvóciense $q = 1 - p$. Az optimista geometriai eloszláshoz képest ez az eloszlás annyiban más, hogy most a lehetséges értékek az $x = 0, 1, \ldots$ számok, míg az optimista esetben a lehetséges értékek az $x = 1, 2, \ldots$ számok. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a pesszimista geometriai eloszlás súlyfüggvényének az ábrája úgy származtatható az

Móricz András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

optimistából, hogy a súlyfügvény grafikonját egy egységgel balra toljuk. Az optimista geometriai eloszlás súlyfüggvényének az ábrája pedig úgy származtatható az pesszimistából, hogy a súlyfügvény grafikonját egy egységgel jobbra toljuk.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) \;=\; 1-(1-p)^{x+1} \quad (x=0,1,2,\ldots)$$

Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(x) \;=\; q^x \quad (x=0,1,2,\ldots)$$

ahol $q \;=\; 1-p$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a jobboldali eloszlásfüggvény nem más, mint egy q alapú exponenciális függvény, mely a $x=0,1,2,\ldots$ értékeken értelmezett, $q \;=\; 1-p$.

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X \;=\; \text{ahányszor nem következik be az esemény az első bekövetkezés előtt}$$

   Más terminológiát használva:

   $$X \;=\; \text{ahány kudarc van az első siker előtt}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p \;=\; \text{a siker valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

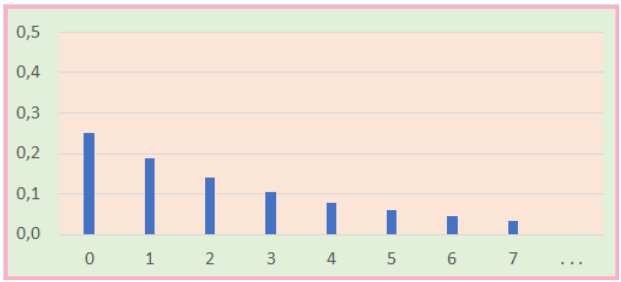
   $$X \;=\; \text{ahány kudarcos esemény van az első sikeres előtt}$$

   Paraméter jelentése:

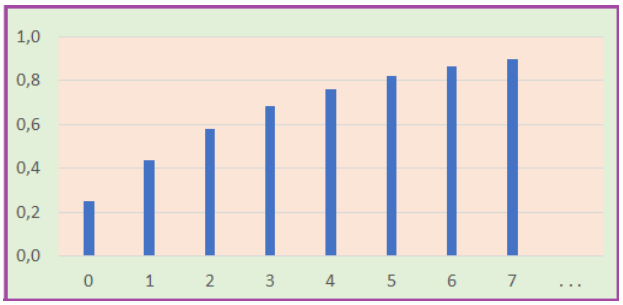
   $$p \;=\; \text{az események közös valószínűség értéke}$$

A súlyfüggvény képletének levezetése: Ha egy p valószínűségű A eseményre végzett független kísérletsorozattal kapcsolatban X azt jelölöli, hogy az A esemény első bekövetkezése előtt hányszor nem következett be, akkor az $X=x$ esemény azt jelenti, hogy az első x kísérlet során az A nem következett be, de az $(x+1)$ -ik kísérletnél A bekövetkezett. Ezért – a független eseményekre vonatkozó szorzási szabály felhasználva – ezt kapjuk:

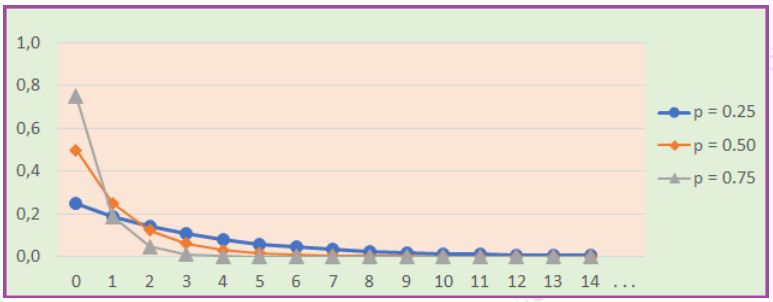
$$p(x) \;=\; \mathrm{P}\,(X=x) \;=\; (1-p)^x p$$



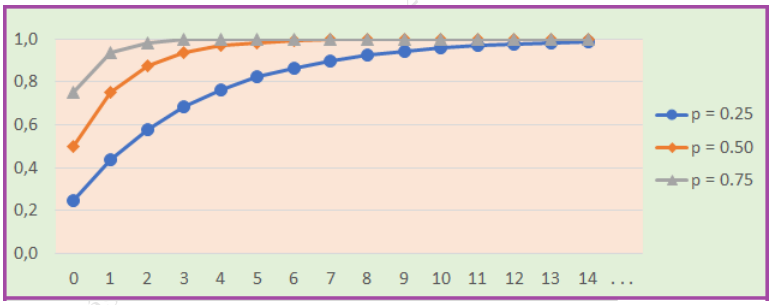
21. ábra. *Geometriai (pesszimista) eloszlás súlyfüggvénye;* $p=0.25$



22. ábra. *Geometriai (pesszimista) eloszlás eloszlásfüggvénye;* $p = 0.25$



23. ábra. *Geometriai (pesszimista) eloszlások súlyfüggvényei;* $p = 0.25,\ 0.50,\ 0.75$



24. ábra. *Geometriai (pesszimista) eloszlások eloszlásfüggvényei;* $p = 0.25,\ 0.50,\ 0.75$

Megjegyzés: Az "optimista", "pesszimista" jelzők használatát az indokolja, hogy az optimista esetben **sikeres** kísérletre vadászunk, a pesszimista esetben pedig **a kudarcok** számát számoljuk.

1.5.3. Geometriai eloszlás az $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$ halmazon

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; (1-p)^{x-a}p \qquad \text{ha} \quad x = a, a+1, a+2, \ldots$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a súlyfüggvény a -hoz, $a+1$ -hez, $a+2$ -höz, ... rendelt értékei mértani sorozatot alkotnak. A sorozat első tagja p , a kvóciense $q \;=\; 1-p$. A súlyfüggvény ábrája úgy származtatható a pesszimista geometriai eloszlás ábrájából, hogy a súlyfügvény grafikonját a egységgel jobbra toljuk.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) \;=\; 1-(1-p)^{x-a+1} \quad (x=a,a+1,a+2,\ldots)$$

Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(x) \;=\; q^{x-a} \quad (x=a,a+1,a+2,\ldots)$$

ahol $q \;=\; 1-p$.

Mikor használjuk:

Ha X (pesszimista vagy optimista) geometriai eloszlású valószínűségi változó, akkor az $X \geq a$ feltétel melletti feltételes eloszlása ilyen eloszlás. A pesszimista esetre ezt így láthajuk be: akármilyen pozitív egész a és $x \geq a$ esetén

$$\mathrm{P}\,(\,X=x \mid X \geq a\,) \;=\; \frac{\mathrm{P}\,(\,X=x\,)}{\mathrm{P}\,(\,X \geq a\,)} \;=\; \frac{(1-p)^x p}{(1-p)^a} \;=\; (1-p)^{x-a}p$$

Optimista esetre pedig így: akármilyen pozitív egész a és $x \geq a$ esetén

$$\mathrm{P}\,(\,X=x \mid X \geq a\,) \;=\; \frac{\mathrm{P}\,(\,X=x\,)}{\mathrm{P}\,(\,X \geq a\,)} \;=\; \frac{(1-p)^{x-1}p}{(1-p)^{a-1}} \;=\; (1-p)^{x-a}p$$

1.5.4. Geometriai eloszlás jellemzése feltételes valószínűségekkel

A most következő gondolatok megértésének megsegítése érdekében előrebocsátjuk azt a triviális tényt, hogy ha X azt jelenti, hogy hányadik dobásra dobunk először 6 -ost, akkor a $\mathrm{P}\,(\,X \geq x+1 \mid X \geq x\,)$ feltételes valószínűség értéke minden x -re $\frac{5}{6}$ -dal egyenlő.

Vegyük észre, hogy ez általánosabban is igaz: ha X geometriai eloszlást követ, akkor a $\mathrm{P}\,(\,X \geq x+1 \mid X \geq x\,) \;=\; q$ feltételes valószínűség értéke nem függ x -től, mert minden x -re q-val egyenlő, ahol $q \;=\; 1-p$:

$$\mathrm{P}\,(\,X \geq x+1 \mid X \geq x\,) \;=\; \frac{\mathrm{P}\,(\,X \geq x+1\,)}{\mathrm{P}\,(\,X \geq x\,)} \;=\; \frac{T(x+1)}{T(x)} \;=\; q$$

Szavakkal: ha tudjuk, hogy az X valószínűségi változó értéke nagyobb vagy egyenlő, mint x , akkor ilyen feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy X értéke $x+1$ -nél is nagyobb vagy egyenlő, nem függ attól, hogy x mekkora.

Könnyű meggyőződni róla, hogy ez a tulajdonság jellemzi is a geometriai eloszlásokat: ha

$$\mathrm{P}\,(\,X=x \mid X \geq x\,) \;=\; p$$

fennáll minden $x \geq a$ esetén, akkor X eloszlása geometriai eloszlás.

1. Megjegyzés: A geometriai eloszlások bevezetésekor leszögeztük, hogy végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az

$$X \;=\; \text{ahányadik esemény az első olyan, ami bekövetkezik}$$

valószínűségi változó geometriai eloszlást követ.

Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy ha az események függetlenek, de nem egyforma valószínűségűek, akkor az X valószínűségi változó nem követ geometriai eloszlást. Ha az események valószínűségeit $p_1, p_2, \ldots$ jelöli, akkor

$$\mathrm{P}\,(\,X=x\,) \;=\; q_1 \ldots q_{x-1}\, p_x$$

ahol $q_x = 1-p_x$ az x -ik esemény komplementerének valószínűségét jelöli $(x=1,2,\ldots)$.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

2. Megjegyzés: Érdemes megjegyezni, hogy a

$$\mathrm{P}\,(\ X = x\ )\ =\ q_1 \ldots q_{x-1}\, p_x$$

képlet érvényes akkor is, ha (az események nem függetlenek, viszont) p_x , illetve q_x az alábbi feltételes valószínűséget jelöli:

$$p_x\ =\ \mathrm{P}\,(\text{ az } x\text{-ik esemény bekövetkezik} \mid \text{a korábbi események nem következtek be }\ )$$

$$q_x\ =\ \mathrm{P}\,(\text{ az } x\text{-ik esemény nem következik be} \mid \text{a korábbi események nem következtek be }\ )$$

1.5.5. Negatív binomiális eloszlás (optimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x)\ =\ \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} \quad \text{ha } x = n, n+1, n+2, \ldots$$

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X\ =\ \text{ahányadik kísérletnél } n \text{ -edszer következik be az esemény}$$

   Más terminlógiát használva:

   $$X\ =\ \text{ahányadik kísérletnél adódik az } n \text{ -ik sikeres esemény}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p\ =\ \text{az esemény valószínűsége}$$
   $$n\ =\ \text{ahányadik bekövetkezésre (sikerre) vadászunk}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X\ =\ \text{ahányadik esemény az } n \text{ -ik olyan, ami bekövetkezik}$$

   Más terminlógiát használva:

   $$X\ =\ \text{ahányadik az } n \text{ -ik sikeres esemény}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p\ =\ \text{az események közös valószínűség értéke}$$
   $$n\ =\ \text{ahányadik bekövetkezésre (sikerre) vadászunk}$$

A súlyfüggvény képletének levezetése: Ha egy p valószínűségű A eseményre végzett független kísérletsorozattal kapcsolatban X jelölöli annak a kísérletnek a sorszámát, amikor az A esemény n -edszer következik be, akkor az $X = x$ esemény azt jelenti, hogy az első $(x-1)$ kísérlet során az A esemény $(n-1)$ -szer következett be, és az A esemény az x -ik kísérletnél is bekövetkezik. Annak a valószínűsége, hogy az első $(x-1)$ kísérlet során az A esemény $(n-1)$ -szer következik be, a binomiális eloszlás képlete szerint

$$\binom{x-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(x-1)-(n-1)}\ =\ \binom{x-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{x-n}$$

Vetics András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

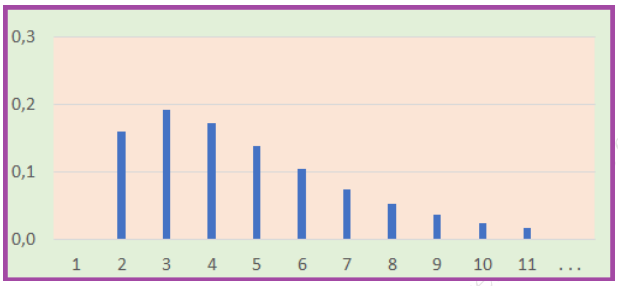
Mivel az x -ik kísérletnél az A esemény bekövetkezik, a keresett valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy ezt a valószínűséget még megszorozzuk p -vel:

$$p(x) \;=\; \mathrm{P}\,(X = x) \;=\; \binom{x-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{x-n)}\; p \;=\; \binom{x-1}{n-1} p^{n}(1-p)^{x-n}$$

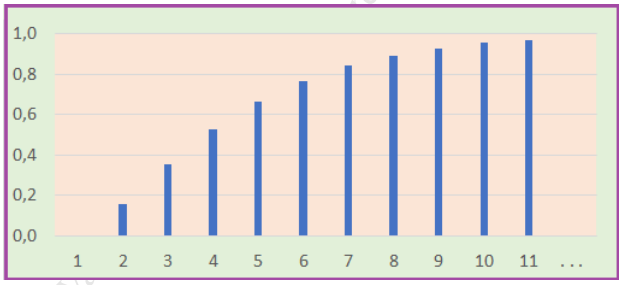
Excel-függvények:

$p(x)$ = `NEGBINOM.DIST(x-n;n;p;FALSE)` = `NEGBIN.ELOSZLÁS(x-n;n;p;HAMIS)`

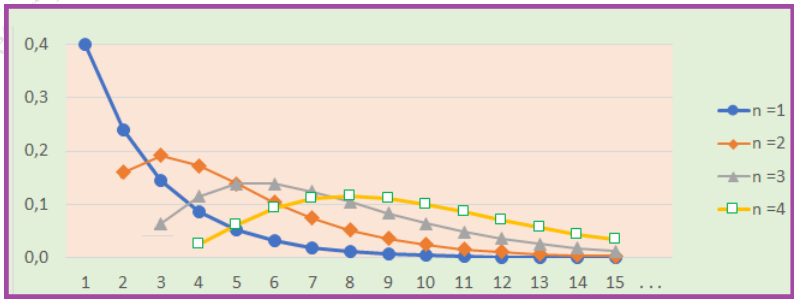
$F(x)$ = `NEGBINOM.DIST(x-n;n;p;TRUE)` = `NEGBIN.ELOSZLÁS(x-n;n;p;IGAZ)`



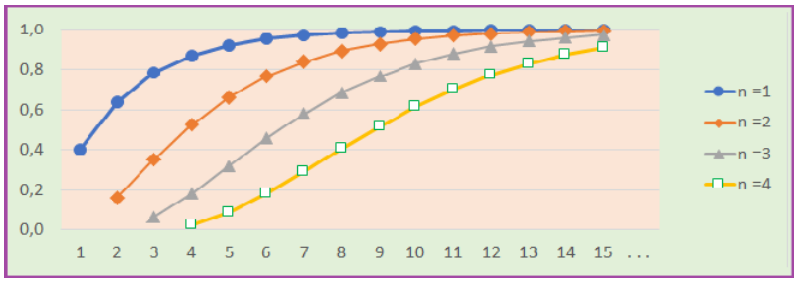
25. ábra. *Negatív binomiális (optimista) eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 2;\; p = 0.4$



26. ábra. *Negatív binomiális (optimista) eloszlás eloszlásfüggvénye;* $n = 2;\; p = 0.4$



27. ábra. *Negatív binomiális (optimista) eloszlások súlyfüggvényei;* $n = 1,\; 2,\; 3,\; 4;\; p = 0.4$



28. ábra. *Negatív binomiális (optimista) eloszlások eloszlásfüggvényei;* $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ p = 0.4$

1. Feladat: Nyúlvadászat rafináltabb módon. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.3 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétköznapokon addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül négyet leterítenie. Hétvégén (szombaton és vasárnap) az ünnepi puskájával lövöldöz. Az ünnepi puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.8 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Ünnepnapokon addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül hatot leterítenie.

Első kérdés: Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, 7 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Ez a bizonyos nap vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Második kérdés: Hogyan lehet következtetni a napi lövések számából arra, hogy a lövések napja vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Megoldás: Tekintsünk egy hétköznapot, amikor négy nyúl leterítése a feladat. Az ehhez szükséges lövések száma optimista negatív binomiális eloszlást követ 4 és 0.3 paraméterekkel. Ezért egy hétköznapon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) = \texttt{NEGBINOM.DIST(k-4 ; 4 ; 0.3 ; FALSE)}$$

Egy hétvégi napon, amikor hat nyúl leterítése a feladat, a lövések száma optimista negatív binomiális eloszlást követ 6 és 0.8 paraméterekkel. Ezért hétvégi napokon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ ) = \texttt{NEGBINOM.DIST(k-6 ; 6 ; 0.8 ; FALSE)}$$

Mivel a napok $5/7$ -e hétköznap, $2/7$ -e hétvégi nap, annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül,

$$\frac{5}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )$$

Ha egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül, akkor annak a valószínűsége, hogy ez a nap hétköznap volt:

$$\mathrm{P}(\ \text{hétköznap} \mid k \text{ lövés}\ ) = \frac{\frac{5}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ )}{\frac{5}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy hétvégi nap volt:

$$\mathrm{P}(\ \text{hétvégi nap} \mid k \text{ lövés}\ ) = \frac{\frac{2}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}{\frac{5}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \mathrm{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}$$

Tekintve, hogy a képletek számlálóiban, illetve nevezőiben szereplő feltételes valószínűségek numerikus értékét – a fentebb adott képletekkel – Excelben ki lehet számolni a szóbajövő k értékekre, a keresett feltételes valószínűségekre is tudunk táblázatot készíteni:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

k	P(hétköznap | k lövés)	P(hétvégi nap | k lövés)
4	1.00	0.00
5	1.00	0.00
6	0.27	0.73
7	0.31	0.69
8	0.44	0.56
9	0.62	0.38
10	0.79	0.21
11	0.90	0.10
12	0.96	0.04
13	0.99	0.01
14	0.99	0.01
15	1.00	0.00

Táblázat: *Hétköznap és hétvégi nap? - rafináltabb vadászat esetén*

Vetró András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Válasz az első kérdésre: A táblázatból kiolvassuk, hogy $k = 7$ esetén a hétköznap valószínűsége 0.31 , a hétvégi nap valószínűsége 0.69

Válasz a második kérdésre: A táblázat azt is mutatja, hogy $k = 6, 7, 8$ esetén a hétvégi nap a valószínűbb, más lövészszám esetén a hétköznap a valószínűbb.

1.5.6. Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) \;=\; \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x \quad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(kombinatorikus formula)}$$

$$p(x) \;=\; \binom{-n}{x} p^n \left(-(1-p)\right)^x \quad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(analitikus formula)}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az optimista negatív binomiális eloszláshoz képest ez az eloszlás annyiban más, hogy most a lehetséges értékek az $x = 0, 1, \ldots$ számok, míg az optimista esetben a lehetséges értékek az $x = n, n+1, n+2, \ldots$ számok. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a pesszimista negatív binomiális eloszlás grafikonja az optimistából úgy származtatható, hogy a grafikont n egységgel balra toljuk.

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X \;=\; \text{ahány kudarc van az } n\text{-ik siker előtt}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p \;=\; \text{az esemény valószínűsége}$$

   $$n \;=\; \text{ahányadik bekövetkezésre vadászunk}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$$X \;=\; \text{ahány kudarcos esemény van az } n \text{ -ik sikeres előtt}$$

Paraméterek jelentése:

$$p \;=\; \text{az események közös valószínűség értéke}$$

$$n \;=\; \text{ahányadik bekövetkezésre vadászunk}$$

A súlyfüggvény képletének levezetése: Ha egy p valószínűségű A eseményre végzett független kísérletsorozattal kapcsolatban X jelölöli azt, hogy az A esemény az n -edik bekövetkezése előtt hányszor nem következett be, akkor az $X = x$ esemény azt jelenti, hogy az első $(x+n-1)$ kísérlet során az A esemény $(n-1)$ -szer következett be, és az A esemény az $(x+n)$ -ik kísérletnél is bekövetkezik. Annak a valószínűsége, hogy az első $(x+n-1)$ kísérlet során az A esemény $(n-1)$ -szer következik be, a binomiális eloszlás képlete szerint

$$\binom{x+n-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{(x+n-1)-(n-1)} \;=\; \binom{x+n-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{x}$$

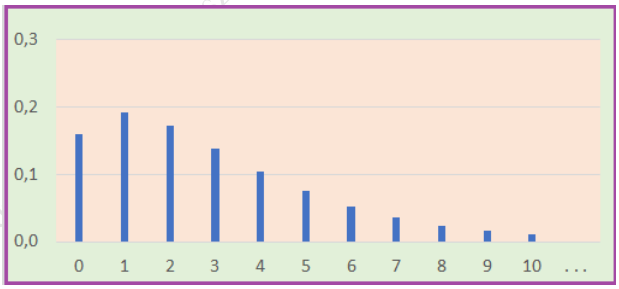
Mivel az $(x+n)$ -ik kísérletnél az A esemény bekövetkezik, a keresett valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy ezt a valószínűséget még megszorozzuk p -vel:

$$p(x) \;=\; \mathrm{P}\,(X = x) \;=\; \binom{x+n-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{x}\, p \;=\; \binom{x+n-1}{n-1} p^{n}(1-p)^{x}$$

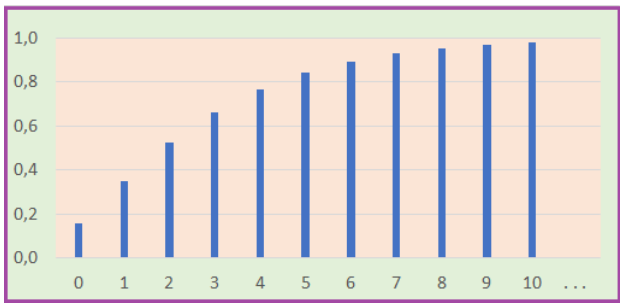
Excel-függvények:

$$p(x) \;=\; \texttt{NEGBINOM.DIST(x;n;p;FALSE)} \;=\; \texttt{NEGBIN.ELOSZLÁS(x;n;p;HAMIS)}$$

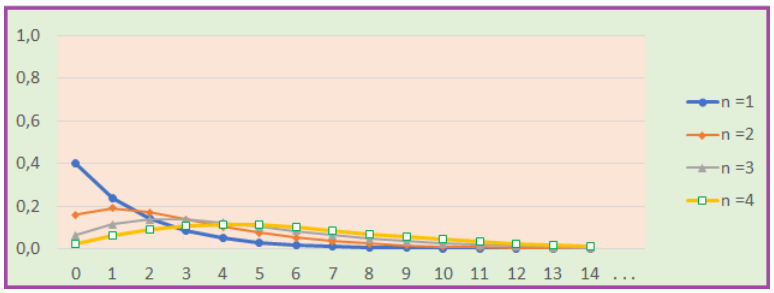
$$p(x) \;=\; \texttt{NEGBINOMM.DIST(x;n;p;TRUE)} \;=\; \texttt{NEGBIN.ELOSZLÁS(x;n;p;IGAZ)}$$



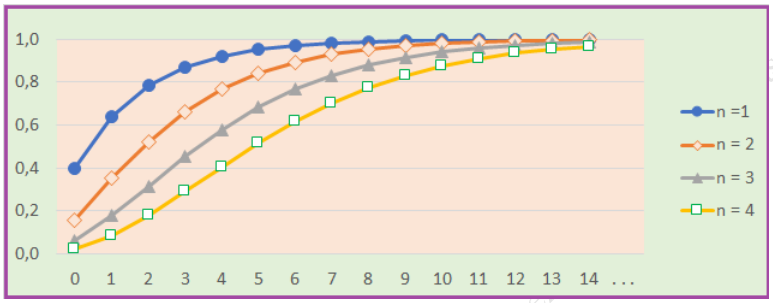
29. ábra. *Negatív binomiális (pesszimista) eloszlás súlyfüggvénye;* $n = 2;\; p = 0.4$



30. ábra. *Negatív binomiális (pesszimista) eloszlás eloszlásfüggvénye;* $n = 2;\; p = 0.4$



31. ábra. *Negatív binomiális (pesszimista) eloszlások súlyfüggvényei;* $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ p = 0.4$



32. ábra. *Negatív binomiális (pesszimista) eloszlások eloszlásfüggvényei;* $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ p = 0.4$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az (optimista, pesszimista) negatív binomiális eloszlások az (optimista, pesszimista) geometriai eloszlások általánosításai. $n = 1$ esetén az (optimista, pesszimista) negatív binomiális eloszlás a megfelelő geometriai eloszlásba egyszerűsödik.

1.6. Poisson eloszlás

1.6.1. Poisson eloszlás egydimenzióban

$$p(x) \;=\; \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Súlyfüggvény:

Mikor használjuk: Sok független, külön-külön kis valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó ilyen eloszlást követ:

$$X \;=\; \text{ahány esemény bekövetkezik}$$

Paraméter jelentése:

$$\lambda \;=\; \text{ahány esemény } \textit{általában, átlagosan} \text{ bekövetkezik}$$

azaz

$$\lambda \;=\; \text{az eloszlás várható értéke (ezt a fogalmat a következő fejezetben tanuljuk)}$$

azaz

$$\lambda \;=\; \text{az események valószínűségeinek összege}$$

Megjegyzés: Ha az események száma n , és az események egyforma valószínűségűek, és ez a közös érték p , akkor

$$\lambda = np$$

Excel-függvények:

$$p(x) = \texttt{POISSON(x;}\lambda\texttt{;FALSE)} = \texttt{POISSON(x;}\lambda\texttt{;HAMIS)}$$

$$F(x) = \texttt{POISSON(x;n;p;TRUE)} = \texttt{POISSON(x;n;p;IGAZ)}$$

Megjegyzés: Be lehet látni, hogy ha λ egy fix pozitív szám, akkor akármilyen x pozitív egész szám esetén az

$$n \to \infty\,, \qquad p \to 0\,, \qquad n \cdot p \to \lambda$$

feltételek mellett

$$\lim \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Ez azt jelenti, hogy ha n nagy és p pici úgy, hogy szorzatuk körülbelül λ , akkor a binomiális eloszlás x -ik tagja közelítőleg egyenlő a Poisson eloszlás x -ik tagjával:

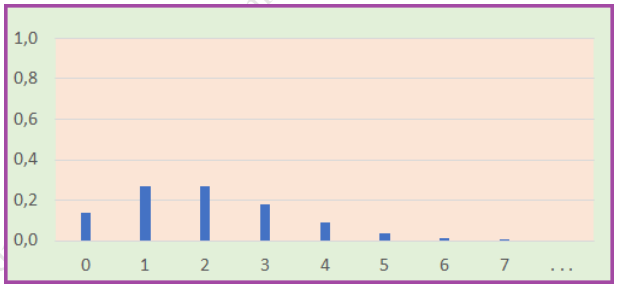
$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Igazából ez a tény támasztja alá azt, amit fentebb mondtunk: sok független, külön-külön kis valószínűségű esemény kapcsán az

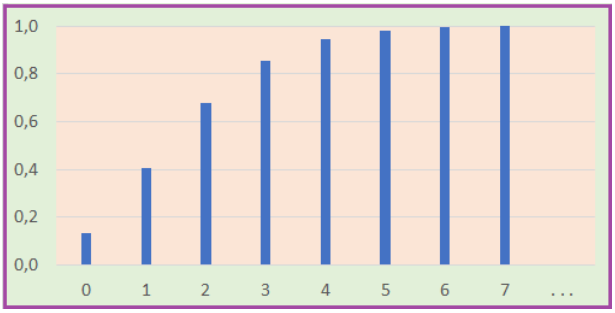
$$X = \text{ahány esemény bekövetkezik}$$

valószínűségi változó eloszlását binomiális eloszlás helyett vehetjük Poisson eloszlásnak.

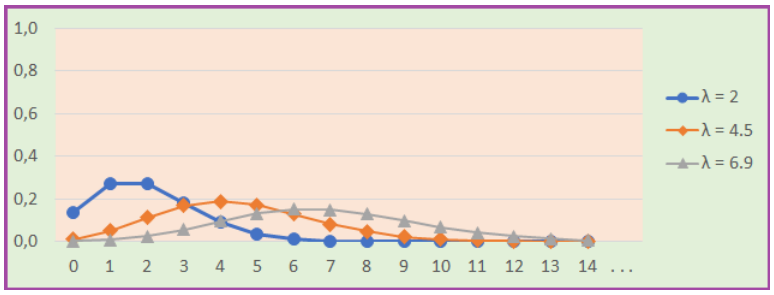
Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész. Levezetés diszkrét eloszlások



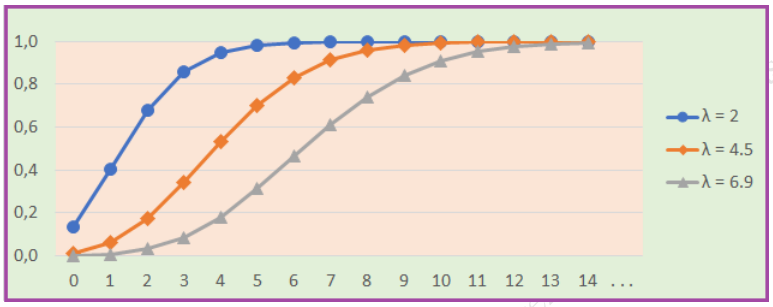
33. ábra. *Poisson eloszlás súlyfüggvénye;* $\lambda = 2$



34. ábra. *Poisson eloszlás eloszlásfüggvénye;* $\lambda = 2$



35. ábra. *Poisson eloszlások súlyfüggvényei;* $\lambda = 2,\ 4.5, 6.9$



36. ábra. *Poisson eloszlások eloszlásfüggvényei;* $\lambda = 2,\ 4.5, 6.9$

1. feladat: Hány hal lesz az *ÖREG* halász hálójában? Történt egyszer, hogy egy nagy tó partján álldogálva nézegettem, ahogy a sok apró halacska egymással és az öreg, alig-alig látó halásszal mit sem törődve össze-vissza úszkált. A halász éppen a hálóját készült kiemelni, amikor kedvesen így szólt hozzám: "Fiatalember! Ha eltalálod, hogy hány hal lesz a hálóban, meghívlak vacsorára". Szeretem a sült halat, és éhes is voltam. Csak annyit kérdeztem az öreg halásztól, hogy milyen gyakran szokott üres lenni a háló. Ő erre azt felelte:

Sok éves tapasztalatom szerint mondhatom neked, hogy az eseteknek a 6 % -ában üres a háló!

Kicsit gondolkodtam, számolgattam, és 2 halra tippeltem. Hogyan gondolkodtam, miért éppen 2 halra tippeltem?

Megoldás: Nyilván azt kellett kigondolnom, hogy a hálóban hány hal a legvalószínűbb. Így okoskodtam: A hálóban lévő halak száma – mint valószínűségi változó – Poisson eloszlást követ, hiszen

- a tóban *sok* a hal, és
- a sok hal mindegyike egymással mit sem törődve össze-vissza úszkál, ezért *egymástól függetlenül* kerülnek vagy nem kerülnek a hálóba, továbbá
- minden hal esetén az az esemény, hogy ő a hálóba kerül (ez az esemmény a hal számára felettébb szomorú), *kis valószínűségű*, hiszen ez a valószínűség a háló (akármilyen) méretének és a tó méretének a hányadosa, ami nyilván pici.

Mivel – sok éves tapasztalata alapján – a halász elárulta, hogy az eseteknek a 6 % -ában üres a háló, a 0 darab hal valószínűségét 0.06 -nak vettem, vagyis gondolatban felállatottam a

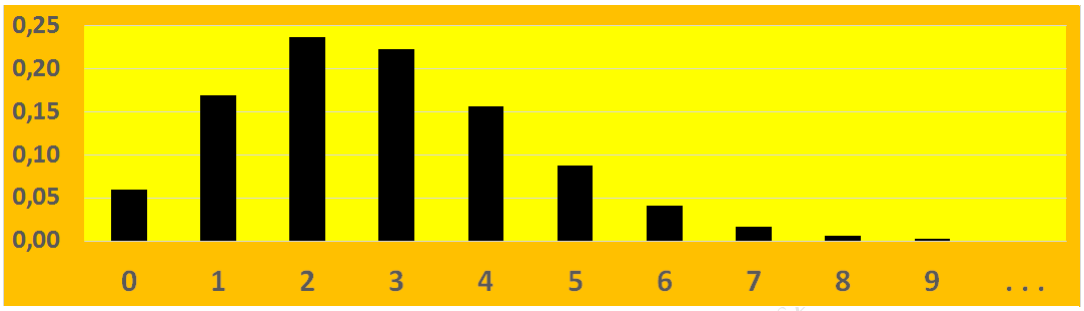
$$\frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} \;=\; 0.06 \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{e}^{-\lambda} \;=\; 0.06$$

egyenletet, aminek megoldása $\lambda \;=\; -\ln(0.06) \;=\; 2.81$.

A 2.81 paraméterű Poisson eloszlás – melyet én akkor még fejből is tudtam – így fest:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.06	0.17	0.24	0.22	0.16	0.09	0.04	0.02	0.01	0.00	...

Táblázat: 2.81 *paraméterű Poisson eloszlás*



37. ábra. *Poisson eloszlás* $\lambda = 2.81$ *paraméterrel*

A táblázatból is és az ábrából is jól látható (amit a Poisson eloszlás móduszára vonatkozó ismereteinkből a táblázat és az ábra nélkül is tudunk), hogy az eloszlás módusza 2 -vel egyenlő, vagyis 2 hal a legvalószínűbb. Ezért 2 halra tippeltem – ez volt a legjobb tipp.

Természetesen a 3 hal, vagy az 1 hal, vagy a 4 hal sem rossz tipp, bár ezek a tippek kicsit kisebb valószínűséggel vezetnek sikerre. Viszont – például – a 9 , 10 , 11 vagy több hal valószínűségei – mint számolással ellenőrizhető – még együttesen is 0.001 -nél kevesebbet tesznek ki, ezért az ilyen tippek nem kecsegtetnek a siker reményével.

2. feladat: Hány hal lesz az *IFJÚ* halász hálójában? Érdekes utána járni, hogy hogyan kellett volna gondolkodnom, ha a halász fiatal lett volna, és – sok éves tapasztalat hiányában – így felelt volna:

"A legutóbbi 100 merítés során kifigyeltem, hogy pontosan 6 -szor volt üres a háló!"

Igaz, hogy 6 osztva 100 -zal, megfelel az előző történetben mondott 6 % -nak, de mégis mást jelent. Az öreg halász által mondott 6 % -ot – mivel sok éves tapasztalatra épült – a 0 darab hal valószínűségének tekinthettük. Az ifjú halász által mondott " 100 merítés során 6 -szor volt üres a háló" kijelentés csak egyetlen (100 merítésből álló) megfigyelés!

Abból a tényből, hogy egy alkalommal 100 merítésből 6 -szor üres a háló, nem vehetjük a 0 darab hal valószínűségét 6 % -nak. Az, hogy 100 merítésből 6 -szor üres a háló, megtörténhet még akkor is, ha a 0 darab hal valószínűsége eltér 0.06 -tól.

A 0 darab hal ismeretlen valószínűségét jelöljük p -vel. A p segítségével könnyen felírhatjuk annak valószínűségét, hogy 100 merítésből pontosan 6-szor üres a háló:

$$\text{P}(\ 100\ \text{merítésből}\ 6\text{-szor üres a háló}) \ = \binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$$

A jobb oldalon álló képlet p függvényeként egyszerűen vizsgálható:

p	**0.015**	0.030	0.045	**0.060**	0.075	0.090	0.105	0.120	0.135	**0.150**
$\binom{100}{6}p^6(1-p)^{100-6}$	**0.003**	0.050	0.131	**0.166**	0.139	0.089	0.047	0.022	0.009	**0.003**

Táblázat: *A p-től való függés szemléltetése*

A táblázatból is kitűnik, és az analízis eszközeivel is könnyen belátható, hogy a

$$\binom{100}{6}p^6(1-p)^{100-6}$$

kifejezés értéke

- $p < 0.060$ esetén növekszik
- $p = 0.060$ esetén a maximális érték 0.166 -dal egyenlő
- $0.060 < p$ esetén csökken

A táblázatban vastagítással jelezzük a tényt, hogy $p =$**0.015** -nél is és $p =$**0.150** -nél is a kifejezés értéke csak **0.003** . A 0.003 érték a maximális 0.166 értékhez képest elhanyagolhatóan kicsi. Ezért a p -vel jelölt ismeretlen valószínűséget 0.015 és 0.150 közöttinek feltételezzük. Leginkább a $p = 0.060$ érték tűnik jogosnak, de a 0.015 és 0.150 közötti p értékeket sem zárjuk ki. A $p < 0.015$ és a $p > 0.150$ lehetőségeket viszont már elvetjük.

Ez a döntés kétségtelenül egy szubjektív döntés, melyhez hasonlókat a mindennapi életben nap mint nap megteszünk: például szívesebben ülünk egy olyan autóba, amiben van légzsák, mint egy olyanba, amelyikben nincs. A személyi sérülés valószínűsége egy esetleges balesetnél a légzsák esetén lényegesen kisebb, mintha nem lenne légzsák.

Az előző feladat megoldásában elmagyaráztuk, hogy a hálóban lévő halak száma – mint valószínűségi változó – Poisson eloszlást követ. Az eloszlás paraméterét a

$$\frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} = p \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{e}^{-\lambda} = p$$

egyenletből a $\lambda = -\ln(p)$ formula alapján kapjuk meg:

p	0.015	0.030	0.045	0.060	0.075	0.090	0.105	0.120	0.135	0.150
$\lambda = -\ln(p)$	**4.20**	3.51	3.10	2.81	2.59	2.41	2.25	2.12	2.00	**1.90**

Táblázat: *p és λ kapcsolata*

E táblázatban vastagítással kiemeltük a $p = 0.015$ és a $p = 0.150$ szélső esetekhez tartozó λ értékeket:

- $p = 0.015$ esetén $\lambda =$ **4.20**
- $p = 0.150$ esetén $\lambda =$ **1.90**

Ezekhez a paraméter értékekhez tartozó Poisson eloszlások táblázatai így festenek:

Vetier András – Valószínűségszámítás – Nyelvi segédlet: Nevezetes eloszlás-szkrét eloszlások

x	0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.015	0.063	0.132	0.185	**0.194**	0.163	0.114	0.069	0.036	0.017	...

Táblázat: *Poisson eloszlás* $\lambda =$ **4.20** *paraméterrel*

x	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.150	**0.285**	0.270	0.171	0.081	0.031	0.010	0.003	0.001	0.000	...

Táblázat: *Poisson eloszlás* $\lambda =$ **1.90** *paraméterrel*

A táblázatokból látható (amit a Poisson eloszlás móduszára vonatkozó ismereteinkből a táblázatok nélkül is tudunk):

- $\lambda = 4.20$ (vagyis $p = 0.015$) esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, azaz módusza 4 -gyel egyenlő
- $\lambda = 1.90$ (vagyis $p = 0.150$) esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, azaz módusza 1 -gyel egyenlő

A $0.015 < p < 0.150$ valószínűségeknek megfelelő $1.90 < \lambda < 4.20$ paraméter értékek melletti Poisson eloszlások móduszai nyilván 1 és 4 közé esnek.

Ezért – összegezve a gondolatokat – ezt kapjuk: *lehetséges, hogy akár* 1 *vagy* 2 *vagy* 3 *vagy* 4 *hal a legvalószínűbb, de a* 2 *hal tűnik a legjobb tippnek*, hiszen – fentebb – láttuk, hogy a

$$\text{P}(\ 100 \text{ merítésből } 6\text{-szor üres a háló}) \ = \ \binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$$

valószínűség $p = 0.060$ esetén a legnagyobb, ami $\lambda = 2.81$ -nek felel meg, és $\lambda = 2.81$ esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, vagyis a módusza 2 -vel egyenlő.

Ez az eredmény összhangban van az előző feladat megoldásával, de ugyanakkor érzékelteti, hogy nem mindegy, hogy valaki a sok éves tapasztalata alapján képes egy valószínűséget megmondani, vagy csak 100 kísérlet eredménye alapján a relatív gyakorisággal közelíti azt.

3. feladat: Kullancsok a futóversenyen. A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300 -an találtak magukban egy, 75 -en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

Megoldás első része:

Ha azt vizsgáljuk, hogy egy kiszemelt versenyzőben, mondjuk a "Futó Botond" nevűben, hány kullancs lesz a verseny után, akkor egy valószínűségi változót kapunk. Mivel a sok kullancs mindegyike – a többitől függetlenül – kis valószínűséggel kerül ebbe a versenyzőbe, ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ valamilyen λ paraméterrel. Ezért – a Poisson eloszlás képlete szerint – annak a valószínűsége, hogy 1 kullancs kerül Futó Botondba, $\lambda e^{-\lambda}$. A 2 kullancs valószínűsége pedig $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$. Ha a versenyzők számát N -nel jelöljük, és a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal helyettesítjük, akkor az alábbi egyenleteket állíthatjuk fel:

$$\frac{300}{N} \ = \ \lambda e^{-\lambda} \qquad\qquad \frac{75}{N} \ = \ \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Ezt az egyenletrendszert könnyű megoldani. Először elosztjuk a második egyenletet az elsővel. A kapott új egyenletben a baloldal törtben N -nel, a jobboldaliban λ -val és $e^{-\lambda}$ -val egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$\frac{75}{300} = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{vagyis} \qquad \lambda = \frac{150}{300} = 0.5$$

Ezek után az első egyenletből N -re ez jön ki:

$$N = \frac{300}{\lambda e^{-\lambda}} = \frac{300}{0.5\, e^{-0.5}} = 989.2$$

A versenyzők száma természetesen egész szám. Az, hogy itt N -re nem egész jött ki, annak a következménye, hogy a kiszemelt versenyzőben az 1 , illetve 2 kullancs valószínűségét relatív gyakoriságokkal közelítettük. Ezért a feladatban feltett kérdésre kézenfekvő a közelítő válasz: **Körülbelül** 1000 **versenyző volt a versenyen**.

Megoldás második része - *(Extra tananyag)*:

Az emberben óhatatlanul felmerül a kérdés: vajon mennyire körülbelül a "körülbelül 1000 "? A probléma elemzése érdekében kiszámoljuk most, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs*

Ha minden egyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$ -nak vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.3 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 300 ; 1000 ; 0.3 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.027. Azt is kiszámolhatjuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

Ha minden egyes versenyzővel kapcsolatban a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$ -nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.075 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 75 ; 1000 ; 0.075 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.048. Azt is kiszámoljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

azaz

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs, és*
pontosan $1000 - 300 - 75$ *versenyzőben lesz 0 kullancs vagy 2-nél több kullancs*

Ha – úgyanúgy, mint fentebb – minden egyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$ -nak, a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$ -nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűség az 1000 -ed rendű, $(0.3; 0.075)$ paraméterű polinomiális eloszlással adódik:

$$\frac{(1000)!}{(300)!\,(75)!\,(1000-300-75)!}\ (0.3)^{300}\,(0.075)^{75}\,(1-0.3-0.075)^{1000-300-75}$$

A polinomiális eloszlás nincs beépítve az Excelbe, és a polinomiális eloszlás képletében szereplő faktoriálisokat sem tudja az Excel kiszámolni. Viszont a polinomiális eloszlást kétdimenziós normális eloszlással közelíthetjük, aminek eredményeképpen a valószínűségre (hat tizedesjegyre kerekítve) 0.001269 jön ki. Azon, hogy egy nagyon kis valószínűség érték jött ki, nem szabad meglepődni: érezhetően kicsi annak esélye, hogy 1000 versenyző közül

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész – Nevezetes eloszlások

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

Az embernek eszébe jut, hogy elvileg olyan szélsőséges helyzet is lehetne, hogy – mondjuk – csak 375 versenyző indul a versenyen, és a sors úgy hozza, hogy

300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

Avagy 5000 versenyző esetén sem zárható ki, hogy

300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*
4625 *versenyzőben pedig* 0 *kullancs vagy 2-nél több kullancs*

Ezért elbizonytalanodunk, hogy az egyenletrendszerből adódó 898 , avagy 1000 , amit kerekítéssel kaptunk, vajon tényleg jó közelítése a versenyzők számának? A bizonytalanság eloszlatása céljából elemezzük most a problámát, és megnézzük, hogy különböző N és λ értékek esetén mi a valószínűsége annak, hogy

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

A valószínűségeket az Excel segítségével számoltunk ki, és táblázatba rendezve adjuk meg. Mivel a valószínűségek értéke nagyon pici, a táblázatban a valószínűségek értékeinek millószorosát (egészekre kerekítve) írtuk be:

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	λ
750	0	0	0	0	0	0	10	1	0	
800	0	0	0	0	0	35	39	0	0	
850	0	0	0	0	2	374	10	0	0	
900	0	0	0	0	96	388	2	0	0	
950	0	0	0	0	833	55	2	0	0	
1000	0	0	0	1	1 294	1	0	0	0	
1050	0	0	0	16	448	0	0	0	0	
1100	0	0	0	125	41	0	0	0	0	
1150	0	0	0	295	1	0	0	0	0	
1200	0	0	0	242	0	0	0	0	0	
1250	0	0	0	77	0	0	0	0	0	
N										

Táblázat: *Valószínűségek millószorosai*

A táblázatból kitűnik, hogy – arányaikat tekintve – "kicsi" és "kicsi" között is nagy a különbség! Annak a valószínűsége, hogy

pontosan 300 *versenyzőben lesz* 1 *kullancs, és*
pontosan 75 *versenyzőben lesz* 2 *kullancs*

a táblázatban látható értékek közül 1000 versenyző esetén a legnagyobb, és már 950 vagy 1050 versenyző esetén is jóval kisebb, de 900 vagy annál kevesebb, illetve 1100 vagy annál több versenyző esetén sokkal-sokkal kisebb.

Ezért józan, elfogadható következtetésnek tűnik: körülbelül 1000 **versenyző indult a versenyen, ahol a "körülbelül" azt jelenti, hogy** 950 **-nél kevesebb vagy** 1050 **-nél több versenyző gyakorlatilag kizárt.**

Vetier András – Valószínűségszámítás — 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.6.2. Poisson eloszlás kétdimenzióban

Súlyfüggvény:

$$p(x,y) \;=\; \frac{\lambda_1^x}{x!}\,e^{-\lambda_1}\;\cdot\;\frac{\lambda_2^y}{y!}\,e^{-\lambda_2} \qquad \text{ha} \quad x,y=0,1,2,\ldots$$

Mikor használjuk: Amikor egy olyan kétdimenziós valószínűségi változóval van dolgunk, melynek koordinátái függetlenek, és külön-külön Poisson eloszlást követnek valamilyen paraméterekkel.

Paraméterek jelentése:

$\lambda_1 \;=\;$ az első koordináta "átlagos" értéke (pontosabban: várható értéke)

$\lambda_2 \;=\;$ a második koordináta "átlagos" értéke (pontosabban: várható értéke)

A várható érték fogalmát a következő fejezetben tanuljuk.

1.7. A csaló vándor és a Bölcs Király

Feladat: Még ifjú voltam és bohó, amikor meseország királya megengedte nekem, hogy a Varázs-tóból aranyhalakat fogjak. Engedélyt adott arra, hogy a hálómat 7 -szer belemerítsem a tóba. Nagy izgalommal mentem a tóhoz. Azóta is előttem van a látvány, ahogy a sok apró aranyhalacska egymással és hálómmal mit sem törődve össze-vissza úszkált a hatalmas tó minden zugában. Senki sem volt a közelben. Ezért csalárd módon 7 -nél jóval többször merítettem be a hálómat. Hazafelé menet találkoztam a királlyal. Megkérdezte tőlem:

– Mondd, hányszor volt hálódban pontosan 3 halacska?

– Bizony hatszor, felség – feleltem az igazságnak megfelelően, mert attól féltem, hogy ha a csalás után még hazudok is, akkor a fejemre szakad az ég,

– Nem tévedsz? – kérdezte kicsit gyanakodva.

– Nem - feleltem határozottan. Kis gondolkodás után a király így szólt:

– Fiam, nem bízom abban, hogy egy 0.001 -nél kisebb valószínűségű esemény bekövetkezzen. Sokkal inkább arra gyanakszom, hogy te becsaptál, és kb. 25 -ször vagy még ennél is többször merítettél a tóból. Ezért az aranyhalakat dobd vissza a tóba, és takarodj országomból!

Hogyan gondolkodott a Bölcs Király?

Megoldás: A Király egyetemista korában rendesen átgondolta a valószínűségszámítás anyagot. Jól ismerte a véletlen törvényeit. Így gondolkodott:

Egy-egy merítésnél a kifogott halak száma Poisson eloszlást követ, hiszen a sok hal mindegyike a többitől függetlenül kis valószínűséggel kerül a hálóba. (A függetlenség abból következik, hogy a halak egymással mit sem törődve úszkáltak, a valószínűség pedig kb. a háló területének és a tó területének a hányadosa.) Ezért annak az eseménynek, hogy pontosan 3 hal kerül a hálóba, p valószínűsége: a

$$p \;=\; \frac{\lambda^3}{3!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

ahol λ valamilyen általunk nem ismert pozitív paraméter. λ szerinti deriválással könnyű meghatározni, hogy ennek a kifejezésnek a maximuma $\lambda = 3$ esetén adódik, és a maximum értéke

$$\frac{3^3}{3!}\mathrm{e}^{-3} \;=\; 0.224$$

Ezért

$$p \;\leq\; 0.224$$

Ha én nem csalok, és 7 -szer merítek a hálómmal, akkor azoknak a merítéseknek a száma, amikor pontosan 3 hal van a hálóban, binomiális eloszlást követő valószínűségi változó $n = 7$ és p paraméterekkel. (A binomiális eloszlást az indokolja, hogy az egyes merítések eredménye nem befolyásolja a többi merítés eredményét, és mind a 7 esetben p valószínűséggel következik be, hogy pontosan 3 hal van a hálóban.) Tehát ha nem csaltam volna, akkor annak a valószínűsége, hogy 6 -szor fogok 3 halat, ennyi:

$$7 \cdot p^6 \cdot (1-p)^1$$

p szerinti deriválással könnyű meggyőződni, hogy ez a kifejezés 0 és $\frac{6}{7}$ közötti p értékekre monoton növekedő. Ezért a $p \leq 0.224$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$7 \cdot p^6 \cdot (1-p)^1 \ \leq 7 \cdot 0.224^6 \cdot (1-0.224)^1 \ = \ 0.000686 \ < \ 0.001$$

Ezt a kis valószínűséget szembeállítva a 7 -ed rendű binomiális eloszlás többi tagjának lényegesen nagyobb értékével, a király elvetette azt a hipotézist, hogy én 7 -szer merítettem a hálómmal.

Ezek után még így gondolkodott:

Ha a merítéseim számát N -nel jelöljük, és az N merítés során 6 -szor volt 3 hal a hálóban, akkor a $\frac{6}{N}$ relatív gyakoriságot körülbelül egyenlőnek vehetjük a 3 hal kifogásának a p valószínűségével:

$$\frac{6}{N} \ \approx \ p$$

vagyis

$$\frac{6}{p} \ \approx \ N$$

Mivel $p \leq 0.224$, az adódik, hogy

$$N \ \approx \ \frac{6}{p} \geq \frac{6}{0.224} \ = \ 26.78$$

vagyis N értéke körülbelül 25 vagy 26 vagy 27 vagy még nagyobb.

Vetró Ágnes – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.8. Példa nem normált eloszlásra *(Extra tananyag)*

A gyorsan felejtő diákról szóló példában, melyet a 6. fejezet **Feladatok vizsgálatokról, vizsgákról** című fejezet 2. pontjában tárgyaltunk feltettük, hogy az idő múlásával a diák fárad, tudása hanyatlik, ezért, ha arra sor kerül, az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége – az n függvényében – az alábbi (mesterségesen kitalált) matematikai képlet szerint nő :

$$\text{P(az } n\text{-ik vizsga sikertelen | az } n\text{-ik vizsgára sor kerül)} \ = \ \frac{0.6 + \frac{0.4}{n+1}}{0.6 + \frac{0.4}{n}} \qquad (\ n = 1, 2, \ldots)$$

A feladat utáni megjegyzésben kiszámoltuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a diák éppen az n-ik vizsgán megy át, minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre ennyi:

$$\text{P(a diák éppen az } n\text{-ik vizsgán megy át)} \ = \ \frac{0.4}{n(n+1)}$$

Ezért, ha valaki azt a valószínűségi változót vizsgálja, hogy hányadik vizsgán megy át a diák, akkor ennek a valószínűségi változónak az eloszlását az alábbi súlyfüggvény adja meg:

$$p(n) \ = \ \frac{0.4}{n(n+1)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ez az eloszlás nem normált, mert

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.4}{n(n+1)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{0.4}{n} - \frac{0.4}{n+1} \right) \;=\; 0.4 < 1$$

hiszen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \;=$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots$$

összeg – teleszkopikus tulajdonsága miatt – nyilván 1-gyel egyenlő.

Megjegyzés: 6. fejezet 2. pontjában kiszámoltuk annak a valószínűségét, hogy a diák vizsgája valaha is sikerül. Erre ott 0.4 -et kaptunk. Ugyanezt fejezi ki az a tény, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) \;=$$

összeg értéke 0.4 -gyel egyenlő.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

1.9. A nevezetes eloszlások mindegyike normált – bizonyítások *(Extra tananyag)*

Egyenletes eloszlás

$$\sum_{x} p(x) \;=\; n \cdot \frac{1}{n} \;=\; 1$$

Hipergeometrikus eloszlás

$$\sum_{x} p(x) \;=\; \sum_{x=\max(0,n-B)}^{\min(n,A)} \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} \;=\; 1$$

A bizonyításban felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\sum_{x=\max(0,n-B)}^{\min(n,A)} \binom{A}{x}\binom{B}{n-x} \;=\; \binom{A+B}{n}$$

Ezt az azonosságot így láthatjuk be: Ha egy dobozban A piros és B zöld golyó van, és mi n golyót húzunk visszatevés nélkül, akkor azoknak a kombinációknak a száma, melyekben pontosan x piros golyó van, a $\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}$ képlettel adható meg, ezért az összes kombinációk száma

$$\sum_{x=\max(0,n-B)}^{\min(n,A)} \binom{A}{x}\binom{B}{n-x}$$

Ugyanakkor az összes kombinációk száma nyilván $\binom{A+B}{n}$.

Binomiális eloszlás

$$\sum_{x} p(x) \;=\; \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \;=\; (p + (1-p))^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$

A bizonyításban felhasználtuk az alábbi – "binomiális tétel" néven ismert – azonosságot:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} \;=\; (a+b)^n$$

Esetünkben $a = p$, $b = 1 - p$ volt.

Polinomiális eloszlás

$$\sum_{(x,y)} p(x,y) \;=$$

$$= \sum_{(x,y)} \frac{n!}{x!\; y!\; (n-x-y)!} \;\; (p_1)^x \; (p_2)^y \; (1-p_1-p_2)^{n-x-y} \;=\; (\; p_1 + p_2 + (1-p_1-p_2)\;)^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$

A bizonyításban felhasználtuk az alábbi – "polinomiális tétel" néven ismert – azonosságot:

$$= \sum_{(x,y)} \frac{n!}{x!\; y!\; (n-x-y)!} \;\; a^x \; b^y \; c^{n-x-y} \;= (\; a+b+c\;)^n$$

Esetünkben $a = p_1$, $b = p_2$, $c = 1 - p_1 - p_2$ volt.

Geometriai eloszlás – pesszimista

$$\sum_x p(x) \;=\; \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x p \;=\; \frac{p}{1-(1-p)} \;=\; \frac{p}{p} \;=\; 1$$

Felhasználtuk a végtelen mértani sorokra vonatkozó "első tag osztva egy mínusz kvóciens" összegzési szabályt:

$$\sum_{x=0}^{n} q^x a \;=\; \frac{a}{1-q} \;=\; \frac{p}{p} \;=\; 1$$

Geometriai eloszlás – optimista

$$\sum_x p(x) \;=\; \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p \;=\; \frac{p}{1-(1-p)} \;=\; \frac{p}{p} \;=\; 1$$

Itt is felhasználtuk a végtelen mértani sorokra vonatkozó "első tag osztva egy mínusz kvóciens" összegzési szabályt.

$$\sum_{x=0}^{n} q^x a \;=\; \frac{a}{1-q} = \frac{p}{p} \;=\; 1$$

Poisson eloszlás

$$\sum_x p(x) \;=\; \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \;=\; e^{-\lambda} \;\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \;=\; e^{-\lambda} \;\; e^{\lambda} \;\;=\;\; 1$$

Felhasználtuk az exponenciális eloszlás jól ismert Taylor-sorát:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \;=\; e^{\lambda}$$

Poisson eloszlás kétdimenzióban

$$\sum_{(x,y)} p(x,y) \;=\; \sum_{(x,y)} \left(\frac{\lambda_1^x}{x!} \, e^{-\lambda_1} \;\cdot\; \frac{\lambda_2^y}{y!} \, e^{-\lambda_2} \right) \;=\; \left(\sum_x \; \frac{\lambda_1^x}{x!} \, e^{-\lambda_1} \right) \cdot \left(\sum_y \; \frac{\lambda_2^y}{y!} \, e^{-\lambda_2} \right) \;=\; 1 \cdot 1 \;=\; 1$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

2. Módusz megkeresése

2.1. Előkészületek *(Extra tananyag)*

Könnyű megérteni az alábbi három triviális tényt, ha az Olvasó papírt és ceruzát ragad, és – például – pálcikákkal szemléleteti a szóban forgó eloszlásokat.

1. tény: Ha egy eloszlás $p(k)$ súlyfüggvényére igaz, hogy

- $p(k-1) < p(k)$ ha $k \leq k_0$ (a súlyfüggvény k_0 -ig növekszik)
- $p(k-1) > p(k)$ ha $k > k_0$ (utána csökken)

akkor ez azt jelenti, hogy

- a $p(0), p(1), \ldots, p(k_0)$ sorozat szigorúan monoton növekedő
- a $p(k_0), p(k_0+1), \ldots$ sorozat szigorúan monoton csökkenő

ezért a súlyfüggvény a maximális értékét a k_0 helyen veszi fel,
vagyis az eloszlás módusza a k_0 szám.

2. tény: Ha egy eloszlás $p(k)$ súlyfüggvényére igaz, hogy

- $p(k-1) < p(k)$ ha $k < k_0$ (a súlyfüggvény $(k_0 - 1)$ -ig növekszik)
- $p(k-1) = p(k)$ ha $k = k_0$ ((k_0-1)-nél és k_0 -nál egyforma az értéke)
- $p(k-1) > p(k)$ ha $k > k_0$ (utána csökken)

akkor ez azt jelenti, hogy

- a $p(0), p(1), \ldots, p(k_0-1)$ sorozat szigorúan monoton növekedő
- $p(k_0-1) = p(k_0)$
- a $p(k_0), p(k_0+1), \ldots$ sorozat szigorúan monoton csökkenő

ezért a súlyfüggvény a maximális értékét a (k_0-1) és a k_0 helyeken veszi fel,
vagyis az eloszlásnak két módusza van: (k_0-1) és k_0 .

3. tény: Ha $\lfloor x_0 \rfloor$ -lal jelöljük az x_0 valós szám egész részét, vagyis azt az egész számot, amit x_0 -ból kapunk, ha lefelé kerekíjük, és k egész szám, akkor

- a $k \leq x_0$ egyenlőtlenség ekvivalens a $k \leq \lfloor x_0 \rfloor$ egyenlőtlenséggel
- a $k > x_0$ egyenlőtlenség ekvivalens a $k > \lfloor x_0 \rfloor$ egyenlőtlenséggel

E három tény együtt adja a következő módszert.

Szatmári Attila – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

2.2. Módszer a módusz képletének meghatározására

Egyetlen módusz esete: Ha egy eloszlás $p(k)$ súlyfüggvényére és egy x_0 valós számra igaz, hogy

- $p(k-1) < p(k)$ minden $k \le x_0$ -ra, és
- $p(k-1) > p(k)$ minden $k > x_0$ -ra,

akkor az eloszlás módusza az $\lfloor x_0 \rfloor$ szám.

Két módusz esete: Ha egy eloszlás $p(k)$ súlyfüggvényére és egy x_0 egész számra igaz, hogy

- $p(k-1) < p(k)$ ha $k < x_0$ -ra
- $p(k-1) = p(k)$ ha $k = x_0$ -ra
- $p(k-1) > p(k)$ ha $k > x_0$ -ra

akkor az eloszlásnak két módusza van: $x_0 - 1$ és x_0 .

1. Példa: Binomiális eloszlás módusza. A binomiális eloszlás súlyfüggvénye

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ezért a $p(k-1) < p(k)$ egyenlőtlenség most ezt jelenti:

$$\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} < \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Triviális egyszerűsítések és alakítások következnek:

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\, p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \;<\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{1-p}{n-k+1} \;<\; \frac{p}{k}$$

$$k\,(1-p) \;<\; (n-k+1)\,p$$

$$k \;-\; k\,p \;<\; n\,p \;-\; k\,p \;+\; p$$

Tehát a $p(k-1) < p(k)$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$k < (n+1)\,p$$

egyenlőtlenséggel. A $p(k-1) > p(k)$ egyenlőtlenség pedig nyilván ekvivalens a

$$k > (n+1)\,p$$

egyenlőséggel. Ez azt jelenti, hogy $(n+1)\,p$ tölti be azt a szerepet, amit a módusz meghatározására mondott módszerben az x_0 töltött be. Ezért ha $(n+1)\,p$ nem egész szám, akkor az eloszlásnak egyetlen módusza a $\lfloor (n+1)\,p \rfloor$ szám. Ha $(n+1)\,p$ egész szám, $p(k-1) = p(k)$ is fenn tud állni $k = (n+1)\,p$ esetén. Ezért ha $(n+1)\,p$ egész szám, akkor az eloszlásnak két módusza van: $(n+1)\,p - 1$ és $(n+1)\,p$.

2. Példa: Poisson eloszlás módusza. A Poisson eloszlás súlyfüggvénye

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Vekiér András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Ezért a $p(k-1) < p(k)$ egyenlőtlenség most ezt jelenti:

$$\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda} < \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

Triviális egyszerűsítések adják, hogy az egyenlőtlenség ekvivalens ezzel:

$$k < \lambda$$

A $p(k-1) > p(k)$ egyenlőtlenség pedig ekvivalens a

$$k > \lambda$$

egyenlőséggel. Ez azt jelenti, hogy λ tölti be azt a szerepet, amit a módusz meghatározására mondott módszerben az x_0 töltött be. Ezért ha λ nem egész szám, akkor az eloszlásnak egyetlen módusza a $\lfloor \lambda \rfloor$ szám. Ha λ egész szám, akkor $p(k-1) = p(k)$ is fenn tud állni $k = \lambda$ esetén. Ezért ha λ egész szám, akkor az eloszlásnak két módusza van: $\lambda - 1$ és λ .

2.3. Nevezetes eloszlások móduszai – formulák

Hipergeometrikus eloszlás

Ha $(n+1)\,\frac{M+1}{N+2}$ egész szám, akkor két módusz van: $(n+1)\,\frac{M+1}{N+2} - 1$ és $(n+1)\,\frac{M+1}{N+2}$

Ha $(n+1)\,\frac{M+1}{N+2}$ nem egész szám, akkor egy módusz van: $\left\lfloor (n+1)\,\frac{M+1}{N+2} \right\rfloor$

Binomiális eloszlás

Ha $(n+1)\,p$ egész, akkor két módusz van: $(n+1)\,p\,-\,1$ és $(n+1)\,p$

Ha $(n+1)\,p$ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor (n+1)\,p \rfloor$

Indikátor eloszlás

Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor két módusz van: 0 és 1

Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor egy módusz van: 0

Ha $p > \frac{1}{2}$, akkor egy módusz van: 1

Optimista geometriai eloszlás

módusz: 1

Pesszimista geometriai eloszlás

módusz: 0

Létier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Optimista negatív binomiális eloszlás

Ha $\frac{n-1}{p}$ egész szám, akkor két módusz van: $\frac{n-1}{p}$ és $\frac{n-1}{p}+1$

Ha $\frac{n-1}{p}$ nem egész szám, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor + 1$

Pesszimista negatív binomiális eloszlás

Ha $\frac{n-1}{p}$ egész, akkor két módusz van: $\frac{n-1}{p}-n$ és $\frac{n-1}{p}-n+1$

Ha $\frac{n-1}{p}$ nem egész, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor - n + 1$

Poisson eloszlás

Ha λ egész, akkor két módusz van: $\lambda - 1$ és λ

Ha λ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor \lambda \rfloor$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

3. Szimuláció

3.1. A $[0;1]$ intervallum felosztásának módszere

Vegyünk fel 1 -nél kisebb pozitív számoknak egy véges sok tagból álló, növekedő sorozatát! Íme – például – egy 3 tagból sorozat:

$$0.2\,, \quad 0.6\,, \quad 0.7$$

Most egy táblázatot alkotunk, melynek első sora 0 -val kezdődik, aztán következnek a sorozat tagjai, a második sorba pedig írjunk négy akármilyen számot, például a 10 , 20 , 30 , 40 számokat:

0	0.2	0.6	0.7
10	20	30	40

Táblázat: *Ahogy Excelben készítjük*

Vétier András – Valószínűségszámítás – 2. rész Nevezetes diszkrét eloszlások

Ha egy ilyen táblázatot készítünk Excelben, akkor

angolul: `HLOOKUP( RAND() ; * ; 2 )` magyarul: `VKERES( VÉL() ; * ; 2 )`

utasítás, ahol * helyén a táblázatra való hivatkozás áll, számunkra előnyösen működik. A generált véletlen számot összehasonlítja a táblázat első sorában lévő számokkal, és megkeresi az első sorban azt a számot, amelyik

- vagy egyenlő a generált számmal,
- vagy éppen alatta van a generált értéknek,

és az utasítás értékéül a második sorból veszi azt az elemet, ami az első sorban talált elem alatt van. Tehát

- ha a véletlen érték 0 és 0.2 közé esik, vagy 0 -val egyenlő, akkor a függvény értéke 10 ,
- ha a véletlen érték 0.2 és 0.6 közé esik, vagy 0.2 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 20 ,
- ha a véletlen érték 0.6 és 0.7 közé esik, vagy 0.6 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 30 ,
- ha a véletlen érték 0.7 és 1 közé esik, vagy 0.7 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 40 .

Mivel

- a $[\,0\,;\,0.2\,]$ intervallum hossza 0.2 ,
- a $[\,0.2\,;\,0.6\,]$ intervallum hossza 0.4 ,
- a $[\,0.6\,;\,0.7\,]$ intervallum hossza 0.1 ,
- a $[\,0.7\,;\,1\,]$ intervallum hossza 0.3 ,

a függvény értéke

- 0.2 valószínűséggel 10 ,
- 0.4 valószínűséggel 20 ,
- 0.1 valószínűséggel 30 ,
- 0.3 valószínűséggel 40 .

Tehát a

```
HLOOKUP( RAND() ; * ; 2 )        VKERES( VÉL() ; * ; 2 )
```

Excel függvénnyel generált valószínűségi változó eloszlása

x	10	20	30	40
$p(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

Táblázat: *A generált valószínűségi változó eloszlása*

Könnyű észrevenni, hogy milyen számokat kell az Excel táblázatba írni ahhoz, hogy adott véges diszkrét eloszlást követő valószínűségi változót kapjunk ezzel a módszerrel.

Például a megadott eloszlás legyen a következő:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.10	0.15	0.3	0.25	0.15

Táblázat: *Adott eloszlás*

Ekkor az Excel táblázatot így kell elkészíteni:

0.00	0.05	0.15	0.30	0.60	0.85
1	2	3	4	5	6

Táblázat: *Ahogy Excelben csináljuk*

Az Excel táblázat első sorában a 0 után álló számokat összegzéssel kaptuk meg a megadott eloszlás valószínűségeiből:

$$0.05 = 0 + 0.05$$

$$0.15 = 0 + 0.05 + 0.10$$

$$0.30 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15$$

$$0.60 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.30$$

$$0.85 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.30 + 0.25$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka

Előrebocsátunk két, a fizikából ismert képletet. Tekintsünk egy tömegpont-rendszert a számegyenesen, mely egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló S halmazra koncentrálódik. Ha x eleme S -nek, akkor az x pontban lévő tömeg mennyiségét jelöljük $p(x)$ -szel. A pontrendszer **súlypont**ja – mint ismeretes

$$\frac{\sum\limits_x x\, p(x)}{\sum\limits_x p(x)}$$

A kifejezésben itt – és a későbbiekben is – a szummázás az összes lehetséges x -re értendő. A

$$\sum_x (x-c)^2\, p(x)$$

érték pedig a pontrendszernek **a** c **pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka**.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha az össztömeg 1-gyel egyenlő, azaz $\sum\limits_x p(x) = 1$, akkor a súlypontot megadó képlet így egyszerűsödik:

$$\sum_x x\, p(x)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

5. Egydimenziós adatrendszerek

5.1. Átlag

Adatoknak (számoknak) egy sorozatát *adatrendszer*nek hívjuk. Egy adatrendszer valamilyen értelemben vett közepét, az *átlag* fogalmát, mindenki ismeri.

1. Példa: Adatrendszer 5 elemből. A könnyebb követhetőség kedvéért az alábbi adatrendszer csak 5 elemből áll:

adatok	54	55	44	44	60

Táblázat: *Adatok*

A sor végén feltüntetjük az átlagot, ami 51.4 :

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4

Táblázat: *Adatok és az átlaguk*

Az adatok átlagát *első momentum*nak is szokás hívni. Egy külön sorban feltüntetjük az adatok négyzeteit is és azok átlagát is:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4
adatok négyzetei	2 916	3 025	1 936	1 936	3 600	2 682.6

Táblázat: *Az adatok négyzetei*

tjer András – Valószínűségszámítás_2_rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

5.2. Második momentum

Az adatok négyzeteinek az átlagát az adatrendszer *második momentum*ának (esetleg 0 *-ra vonatkozó második momentum*ának) hívjuk. A példánkban szereplő adatrendszer második momentuma $2\,682.6$. Az összegét – például Excellel – mátrixok szorzataként is ki lehet számolni. Az alábbi mátrix szorzás, majd osztás az adatok számával (ami itt 5) a második momentumot adja:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 54 & 55 & 44 & 44 & 60 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 54 \\ 55 \\ 44 \\ 44 \\ 60 \\ \hline\end{array} \cdot \frac{1}{5} = 2\,682.6$$

Ha a négyzetre emelés előtt egy c számot kivonunk az adatrendszer minden tagjából, akkor a c *-re vonatkozó második momentum*ot kapjuk meg. Az alábbi táblázatban $c = 50$, és az 50 -re vonatkozó második momentum 42.6:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	
adatok és *c* különbségei	4	5	-6	-6	10	
különbségek négyzete	16	25	36	36	100	42.6

Táblázat: *Második momentum az* 50 *-re vonatkozólag*

A $c = 50$ -re vonatkozó (itt $c = 50$) második momentumot – a (0 -ra vonatkozó) "sima" második momentumhoz hasonlóan – a megfelelő sor- és oszlopvektorok szorzásával, és utána a darabszámmal való osztással is megkaphatjuk:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 4 & 5 & -6 & -6 & 10 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ 5 \\ -6 \\ -6 \\ 10 \\ \hline\end{array} \cdot \frac{1}{5} = 42.6$$

A $c = 50$ -re vonatkozó második momentum arról ad felvilágosítást, hogy

- az adatrendszer vajon a c érték köré tömörül-e – ilyenkor a $c = 50$ -re vonatkozó második momentum értéke kisebb , vagy
- a $c = 50$ értéktől jobban szóródik – ilyenkor a c -re vonatkozó második momentum értéke nagyobb

5.3. Variancia, szórás

Speciálisan kiszámolhatjuk az adatoknak az átlagtól, itt most 51.4 -től vett különbségét is:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4
adatok és átlag különbségei	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0

Táblázat: *Különbségek*

A kapott adatrendszert az eredeti adatrendszer *centralizált*jának hívjuk. A centralizált adatok azt mutatják, hogy az eredeti adatok hogyan helyezkednek el az átlagukhoz viszonyítva. Ha a centralizált érték pozitív, akkor az eredeti adat az átlag felett van, ha ha a centralizált érték negatív, akkor az eredeti adat az átlag alatt van. A centralizált érték nagysága pedig az átlagtól való távolsággal egyenlő.

Egy centralizált adatrendszer átlaga nyilván mindig 0 . A centralizált adatrendszer második momentumát az eredeti adatrendszer *varianciá*jának vagy *szórásnégyzeté*nek hívjuk. A mi adatrendszerünk varianciája 40.64 . A variancia négyzetgyökét, aminek numerikus értéke itt 6.37 , *szórás*nak nevezzük.

Vetter András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

						átlag	
centralizált adatok	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0	
centralizált adatok négyzetei	6.76	12.96	54.76	54.76	73.96	40.64	6.37
						variancia	szórás

Táblázat: *Variancia és szórás*

Hangsúlyozzuk, hogy a varianciát – például Excellel – mátrixok szorzásával is ki lehet számolni. A centralizált adatokból alkotott sorvektort jobbról szorozva a transzponáltjával, majd osztva az adatok számával (ami itt 5), a varianciát kapjuk:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 2.6 & 3.6 & -7.4 & -7.4 & 8.6 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 2.6 \\ 3.6 \\ -7.4 \\ -7.4 \\ 8.6 \\ \hline\end{array} \cdot \frac{1}{5} = 40.64$$

A variancia és a szórás arról adnak felvilágosítást, hogy

- az adatrendszer az átlag köré összetömörül-e – ilyenkor a variancia értéke is és a szórás értéke is kisebb, vagy
- jobban szóródik – ilyenkor a variancia értéke is és a szórás értéke is nagyobb

A következő két adatrendszer mindgyikének az átlaga 100 , de a variancia és a szórás a második adatrendszer esetében nagyobb, mint az első esetében Ezzel tudjuk numerikusan kifejezni azt a szemléletes tényt, hogy a második adatrendszer jobban szóródik az átlag körül, mint az első.

adatok	99	100	97	99	105	9	3
						variancia	szórás

Táblázat: *A variancia és a szórás – itt kisebb*

adatok	95	100	85	95	125	225	15
						variancia	szórás

Táblázat: *A variancia és a szórás – itt nagyobb*

Megjegyzés: Elég természetes dolognak tűnne, hogy egy adatrendszer szóródását az átlagtól való (mindenféle négyzetre emeléstől mentes) távolságoknak az átlagával, az ún. *átlagos abszolút eltérés*sel jellemezzük:

						átlag	
adatok	54	55	44	44	60	51.4	
adatok és átlag különbségei	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0	(mindig 0)
távolságok az átlagtól	2.6	3.6	7.4	7.4	8.6	5.92	átlagos abszolút eltérés

Táblázat: *Átlagos abszolút eltérés*

Vetier András – Valószínűségszámítás – rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Ezzel a természetes fogalommal szépen lehet numerikusan számolni, dolgozni, de – mint az később kiderül – a variancia és a szórás olyan technikai előnyökkel bírnak, amelyek mind az elméletben, mind a gyakorlatban háttérbe szorítják az átlagos abszolút eltérést. Megjegyezzük, hogy egy adatrendszer átlagos abszolút eltérése legfeljebb akkora lehet, mint a szórása.

Vegyük észre, hogy a kiindulásul felvett adatrendszer varianciáját úgy is megkaphatjuk, hogy a második momentumból kivonjuk az első momentum négyzetét:

$$40.64 = 2\,682.6 - (51.4)^2$$

Ez az összefüggés mindig igaz:

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{ első momentum })^2$$

A bizonyítást az Olvasóra bízzuk.

Megjegyzés: Minden olyan kalkulátor, ami tud statisztikai üzemmódban dolgozni, egy-egy gombnyomásra kiadja a betátplált adatrendszer átlagát, varianciáját, szórását. Az Excelben az átlagra, varianciára, szórásra beépített függvények vannak.

Egyszerű algebrai összefüggés a Steiner egyenlőség, és annak következménye a Steiner egyenlőtlenség:

Steiner egyenlőség: Akármilyen c -re igaz, hogy

$$c \text{ -re vonatkozó második momentum} = \text{variancia} + (c \text{ - átlag })^2$$

Steiner egyenlőtlenség: Akármilyen c-re igaz, hogy

$$c \text{ -re vonatkozó második momentum} \geq \text{variancia}$$

$c = \text{ átlag }$ esetén az egyenlőség, más c értékekre az egyenlőtlenség teljesül.

5.4. Medián

Itt teszünk említést az a*datrendszer mediánjá*nak fogalmáról.

- Ha az adatokat növekvő sorrendbe rendezzük, akkor – páratlan sok tag esetén – a sorrendben egyértelmű középső tagot nevezzük mediánnak.
- – Ha páros sok tag van, akkor két "szinte középső" tag van. Vannak, akik ezeknek az átlagát nevezik mediánnak
  – Mások mindkettőt mediánnak nevezik.
  – És vannak akik nemcsak ezt a két értéket, hanem minden közöttük lévő számot is mediánnak neveznek.

  Páros sok tag esetén három kissé különböző deiníció jól elfér egymás mellett és a fejünkben is. Mindhárom hozzáállásnak van előnye is, hátránya is.

  – Az első definíció szerint a medián egyértelmű.
  – A második definíció esetén mindkét medián az adathalmaz eleme. Ha valamiért kell, akkor az átlagukat bármikor ki lehet számítani.
  – A harmadik definíció a legbátrabb és sok szempontból a legegészségesebb: a mediánok egy zárt intervallumot alkotnak. Az intervallum belsejében minden elemre vitathatatlanul igaz, hogy felezi az adathalmazt: tőle balra és jobbra az adathalmaznak ugyanannyi eleme van.

Vetró András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nemzetes diszkrét eloszlások

Páros sok tag esetén az Excelben a `MEDIAN` függvény az első definíciónak megfelelően működik.

1. Példa: A $\{6, 7, 15, 3, 4\}$ adatrendszer mediánja 6, hiszen az elemeket nagyság szerint sorba rendezve a $3, 4, 6, 7, 15$ sorozatot kapjuk. Ennek a sorozatnak közepén a 6 áll, ő a medián.

2. Példa: A $\{7, 2, 15, 3, 20, 4\}$ adatrendszer mediánja nem egyértelmű, hiszen az elemeket nagyság szerint sorba rendezve a $2, 3, 4, 7, 15, 20$ sorozatot kapjuk. Ennek a sorozatnak közepén a 4 és a 7 áll, ezért – ízléstől függően – mediánnak a

- a 4 és a 7 számtani közepét, az 5.5 -öt, vagy
- a 4 -et is és a 7 -et is, vagy
- bármely 4 és 7 közötti számot (őket is beleértve) szokás venni.

Az Excel az első lehetőséggel dolgozik. Matematikusi szemmel nézve a harmadik lehetőség a legkorrektebb.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása

6.1. Várható érték

Tekintsünk egy diszkrét X valószínűségi változót. X lehetséges értékeinek halmazát jelöljük S -sel, az S valamely elemét x -szel, az x -hez tartozó valószínűséget pedig $p(x)$ -szel. Ekkor a

$$\sum_x x\, p(x)$$

számot az X valószínűségi változó **várható érték**ének nevezzük (Várható érték angolul: expected value). A várható értéket $\mathrm{E}(\ X\ )$ -szel jelöljük:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x x\, p(x)$$

A kifejezésben – mint korábban is és a későbbiekben is – a szummázás az összes lehetséges x -re értendő.

Ha egy eloszlást csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor a

$$\sum_x x\, p(x)$$

számot az **eloszlás várható érték**ének nevezzük.

1. Megjegyzés: Ezeket a képleteket a súlypont képletével összevetve azonnal szembetűnik, hogy a súlypont

$$\frac{\sum\limits_x x \cdot p(x)}{\sum\limits_x p(x)}$$

általános, fizikából tanult képlete a $\sum\limits_x p(x) = 1$ feltétel teljesülése miatt a várható érték képletébe megy át. Tehát egy valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a várható érték egybeesik a tömegeloszlás súlypontjával.

Kicsit általánosabban, ha a szóban forgó valószínűségi változó mellett még egy $y = t(x)$ transzformációt (függvényt) is tekintünk, és képezzük a $t(X)$ valószínűségi változót, akkor a

$$\mathrm{E}\,(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x)\, p(x)$$

számot **a transzformációval nyert** $t(X)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük.

Ha egy eloszlást csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk a számegyenesen, és tekintünk egy $y = t(x)$ transzformációt (függvényt) is, akkor a

$$\sum_x t(x)\, p(x)$$

számot a szóban forgó eloszlásból **a** t **transzformációval kapott eloszlás várható érték**ének nevezzük.

Még általánosabban, egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó esetén ha még egy $z = t(x, y)$ transzformációt (függvényt) is tekintünk, és képezzük a $t(X, Y)$ valószínűségi változót, akkor a

$$\mathrm{E}\,(\ t(X, Y)\ ) = \sum_{(x,y)} t(x, y)\, p(x, y)$$

Vetier András: Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

számot **a transzformációval nyert** $t(X,Y)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük.

Ha egy síkbeli eloszlást csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, és tekintünk egy $y = t(x,y)$ transzformációt (függvényt) is, akkor a

$$\sum_{(x,y)} t(x,y)\ p(x,y)$$

számot a szóban forgó eloszlásból **a** t **transzformációval kapott eloszlás várható érték**ének nevezzük.

Még ennél is általánosabban, ha egy absztrakt S halmazon vizsgálunk egy eloszlást, és tekintünk egy $y = t(x)$ transzformációt (függvényt) is, mely az S -ről a számegyenesre képez akkor a

$$\sum_{x \in S} t(x)\ p(x)$$

számot a szóban forgó eloszlásból **a** t **transzformációval kapott eloszlás várható érték**ének nevezzük. Ha valamely véletlen jelenségben az S halmaz elemei véletlenszerűen bukkannak fel, és X -szel jelöljük a felbukkanó véletlen elemet, akkor ez a szám egyúttal **a** $t(X)$ **valószínűségi változó várható értéke** is.

2. Megjegyzés: Ha az $y = t(x)$ függvény a négyzetre emelés függvénye, azaz $t(x) = x^2$, akkor a

$$\sum_{x} x^2\ p(x)$$

kifejezéshez jutunk. Ezt az értékét a valószínűségi változó avagy a szóban forgó eloszlás **második momentum**ának nevezzük. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a második momentum egybeesik a tömegeloszlásnak a 0 pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával.

3. Megjegyzés: Ha c egy fix szám, és az $y = t(x)$ függvény az $x - c$ különbség négyzete, azaz $t(x) = (x-c)^2$, akkor a

$$\sum_{x} (x-c)^2\ p(x)$$

kifejezéshez jutunk. Ezt az értékét a valószínűségi változó avagy a szóban forgó eloszlás c **-re vonatkozó második momentum**ának nevezzük. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a második momentum egybeesik a tömegeloszlásnak a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával.

4. Megjegyzés: Ha a t függvény az identitás függvény, azaz $t(x) = x$, akkor a

$$\sum_{x} x\ p(x)$$

kifejezéshet jutunk, ami a várható érték képlete. Ezt a képletet a második momentummal összevetve látjuk, hogy a várható értéket jogos **első momentum**nak is nevezni.

5. Megjegyzés: Ha a lehetséges értékeket indexezve soroljuk fel: $x_1, x_2, \ldots$, és a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig $p_1, p_2, \ldots$ -vel jelöljük, akkor a képletek így festenek:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_{i} x_i\ p_i$$

$$\mathrm{E}\ (\ t(X)\ ) = \sum_{i} t(x_i)\ p_i$$

6. Megjegyzés: Jelöljük X -szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, hogy a dobókocka oldalaira új címkéket ragasztanánk $1, 4, 9, 16, 25, 36$ számokkal. Így nem meglepő, hogy

Vetier András – Valószínűségszámítás – Nevezetes diszkrét eloszlások

E($t(X)$) képletében a $p(x)$ értékek változatlanok maradnak, míg x-eket mindenhol formálisan kicseréljük $t(x)$ -re.

7. Megjegyzés: Ha X lehetséges értékeinek S halmaza végtelen sok elemet tartalmaz, akkor a fenti sorok végtelen sorok, ezért ilyenkor előfordulhat, hogy a sor nem konvergens, hanem értéke plusz- vagy mínusz végtelen, vagy akár az is, hogy a sor értéke nem definált, mert a sor pozitív tagjaiból álló sor és a negatív tagjaiból álló sor is divergál, és ezért a $-\infty + \infty$ alakú, nem értelmezhető eset áll elő. Ha X lehetséges értékeinek S halmaza csak véges sok elemet tartalmaz, akkor ilyen nem fordulhat elő, és a várható érték egy jól definiált szám.

6.2. Feltételes várható érték egy eseményen belül

Példa: Fiatal házaspár egy vagy több gyerekkel. Korábbi példánk szerint, ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az

$$X = \text{ gyerekek száma}$$

valószínűségi változót, akkor a valószínűségi változó eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Gyerekek számának eloszlása*

Egyszerű számolással kapjuk, hogy az X valószínűségi változó várható értéke

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 1.3$$

Tehát ha véletlenszerűen választunk sok családot, akkor körülbelül 1.3 .

Kérdés: Ha a kiválasztott családok közül csak a gyerekes családok gyerekei számának az átlagát vesszük, akkor ez az átlag körülbelül mennyivel egyenlő?

A válasz egyszerű: korábban meghatároztuk az X valószínűségi változó $X \geq 1$ feltétel melletti (feltételen belüli) feltételes eloszlását:

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Táblázat: *Feltételes eloszlás az* $X \geq 1$ *feltétel mellett*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Ennek várható értéke:

$$1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{13}{8} = 1.625$$

Általánosan is megfogalmazzuk a példában leírtakat: Ha S a számegyenesnek egy részhalmaza, és tekintünk egy

$$\{p(x),\ x \in S\}$$

eloszlást S-en, továbbá A részhalmaza S-nek, akkor a

$$\left\{ \frac{p(x)}{P(A)},\ x \in A \right\}$$

feltételes eloszlás

$$\sum_{x \in A} x\ \frac{p(x)}{P(A)}$$

várható értékét az eredeti eloszlásnak **az** A **esemény bekövetkezése melletti feltételes várható érték**ének vagy **az** A **-n belüli feltételes várható érték**ének nevezzük, és $\mathrm{E}(\ X \mid A\ )$ -val jelöljük.

A fenti példával kapcsolatban ezt írhatjuk:

$$\mathrm{E}(X \mid X \geq 1\ ) = 1.625$$

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

6.3. Geometriai eloszlás jellemzése feltételes várható értékekkel *(Extra tananyag)*

Az alábbi két állítás mindegyike fontos jellemzése a geometriai eloszlásoknak. Az elsőnek a bizonyítása triviális, nem is adjuk meg. A másodiknak a bizonyítása kissé nehéznek tűnhet, de igazából egyszerű és érdekes.

1. Állítás: Ha egy pozitív egész értékű, diszkrét X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{P}(\ X = s + 1 \mid X\ >\ s\ )$$

feltételes valószínűség nem függ s -től, akkor X optimista geometriai eloszlást követ.

Bizonyítás: Triviális.

2. Állítás: Ha egy pozitív értékű, diszkrét X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{E}(\ X\ -\ s \mid X\ >\ s\ )$$

feltételes várható érték nem függ s-től, akkor X optimista geometriai eloszlást követ.

Bizonyítás: Az $\mathrm{E}(\ X - s \mid X > s\ )$ feltételes várható értéket felírjuk összegekkel:

$$\mathrm{E}(\ X - s \mid X\ >\ s\ )\ =\ \frac{1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \dots}{p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \dots}$$

Ha ez a feltételes várható érték egy c konstanssal egyenlő, akkor minden s -re, igaz, hogy

$$\frac{1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \dots}{p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \dots}\ =\ c$$

A nevezővel átszorozva ez adódik:

$$1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \ldots \;\; = \; c\,(p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots)$$

Írjuk fel ezt a legutolsó egyenletet s helyett $s-1$-re is:

$$1\,p_{s} + 2\,p_{s+1} + 3\,p_{s+2} + \ldots \;\; = \; c\,(p_{s} + p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots)$$

Az alsó egyenletből kivonva a felsőt, a következő, minden s-re fennálló egyenletet kapjuk:

$$p_s + p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots \; = \; c\,p_s$$

Írjuk fel ugyanezt az egyenletet s helyett $s+1$-re:

$$p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots \; = \; c\,p_{s+1}$$

Most vonjuk ki a felsőből az alsót, ezt kapjuk:

$$p_s \; = \; c\;(\,p_s - p_{s+1}\,)$$

ahonnan

$$c\,p_{s+1} \; = \; (c-1)\;p(s)$$

vagyis

$$p_{s+1} = \; \frac{c-1}{c}\,p(s)$$

ami világosan mutatja, hogy a $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sorozat minden eleme az előző elemből egy konstanssal való szorzással adódik, ezért a sorozat egy geometriai sorozatot alkot. Tehát tényleg egy geometriai eloszlásról van szó.

Geometriai eloszlás egy számsorozat elemeinek halmazán: Ha az $a_1\,,\;a_2\,,\;\ldots$ sorozat egy számtani sorozatot alkot, akkor

$$p(a_k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

képlettel definiált eloszlás neve: **geometriai eloszlás a** $a_1\,,\;a_2\,,\;\ldots$ **számsorozat elemeinek halmazán**.

6.4. Variancia és szórás

Ha c egy szám, akkor a valószínűségi változó, illetve az eloszlás c -re vonatkozó második momuentumának nevezzük a

$$\sum_x (x-c)^2\;p(x)$$

értéket. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a c -re vonatkozó második momuentum egybeesik a tömegeloszlásnak a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával. Ha c az eloszlás várható értéke, akkor a második momuentum neve **variancia** vagy **szórásnégyzet**, amit VAR(X) -szel jelölünk:

$$\mathrm{VAR}(\;X\;) \; = \; \sum_x (x - \mathrm{E}(\;X\;))^2\;p(x)$$

A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a variancia egybeesik a tömegeloszlásnak a súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával.

A variancia négyzetgyökét, a

$$\sqrt{\sum_x (x-c)^2\;p(x)}$$

Vetiet András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

számot **szórás**nak hívjuk, és SD(X)-vel jelöljük:

$$\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \sqrt{\mathrm{VAR}(\ X\ )} \ = \ \sqrt{\sum_x (x - \mathrm{E}(\ X\ ))^2\ p(x)}$$

1. Megjegyzés: Emlékeztetünk rá, hogy egy valószínűségi változó, illetve egy eloszlás 0 -ra vonatkozó második momentumát, a

$$\sum_x x^2\ p(x)$$

számot egyszerűen csak **második momuentum**nak nevezzük. Könnyű belátni, hogy igaz a

$$\text{variancia} \ = \ \text{második momentum} - (\ \text{első momentum}\ )^2$$

összefüggés.

2. Megjegyzés: Nyilvánvalóan igaz a Steiner egyenlőség, és annak következménye a Steiner egyenlőtlenség:

Steiner egyenlőség: Akármilyen c-re igaz, hogy

$$\mathrm{E}\left(\ (X - c)^2\ \right) \ = \ \mathrm{VAR}(\ X\ ) + (\ c\ - \mathrm{E}(\ X\ ))^2$$

Steiner egyenlőtlenség: Akármilyen c -re igaz, hogy

$$\mathrm{E}\left(\ (X - c)^2\ \right) \ \geq \ \mathrm{VAR}(\ X\ )$$

$c\ = \mathrm{E}(\ X\ )$ esetén az egyenlőség, más c értékekre az egyenlőtlenség teljesül.

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

7. Nagy számok törvényei

Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból fontos tény, hogy nagy számú kísérletek eredményeinek átlaga, szórása és sok egyéb jellemzője – bár függnek a véletlentől – mégis egy fajta stabilitást mutatnak: értékük közel van egy olyan értékhez, amit elméleti úton – a kísérletek elvégzése nélkül – is meg lehet határozni. Erre a tényre, mint a nagy számok törvényeire szoktunk hivatkozni.

7.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \sum_x x\, p(x) = \mathrm{E}(\ X\ )$$

Vázlatos bizonyítás: Az X valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek

$$x_1,\ x_2, \ldots$$

Figyelem! Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ nagybetűk kísérleti eredményeket, tehát véletlen értékeket jelölnek. A $x_1,\ x_2, \ldots$ kisbetűk segítségével pedig a lehetséges értékeket soroljuk fel. Ha például az X valószínűségi változó egy dobókockával dobott véletlen számot jelöl, és – mondjuk – százszor dobunk, akkor a nagybetűvel jelölt X_1 jelenti az első dobás eredményét, X_2 jelenti a második dobás eredményét, és így tovább, X_{100} jelenti a századik dobás eredményét. A kisbetűvel jelölt $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_4, x_6$ értékek pedig az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokat jelentik.

Jelöljék

$$N_1,\ N_2, \ldots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait az N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy x_i hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy minden i -re az N_i/N relatív gyakoriság – nagy N esetén – közel van a p_i valószínűséghez.

Az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük az x_1 érték N_1 -szer, az x_2 érték N_2 -ször, $\ldots$ fordul elő. Ezért a számláló értéke

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_N = N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \ldots$$

a tört értéke pedig

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \ldots}{N} =$$

$$= \frac{N_1}{N} \cdot x_1 + \frac{N_2}{N} \cdot x_2 + \ldots \approx p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots = \mathrm{E}(\ X\ )$$

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*:

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x x\ p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

Móri András – Valószínűségszámítás – Jegyzet: Nevezetes diszkrét eloszlások

- a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy
- végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |x| \; p(x) < \infty$.

Ekkor $N \to \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\; X \;)$$

esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\; X \;) = \sum_x x \; p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   (a) pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{x>0} \; x \; p(x)$ divergens, és

   (b) a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{x<0} \; x \; p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; +\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\; X \;) = \sum_x x \; p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   (a) pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{x>0} \; x \; p(x)$ konvergens, és

   (b) a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{x<0} \; x \; p(x)$ divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; -\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

7.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket egy $t(x)$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1) \;,\; t(X_2) \;,\; \ldots, t(X_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\approx\; \sum_x t(x) \; p(x) \;=\; \mathrm{E}\,(\; t(X) \;)$$

Vázlatos bizonyítás: Az X valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek

$$x_1, \; x_2, \ldots$$

Jelölje

$$N_1, \; N_2, \ldots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait az N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy x_i hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy minden i -re az N_i/N relatív gyakoriság – nagy N esetén – közel van a p_i valószínűséghez. A

$$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N}$$

kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük a t függvény argumentumaként az x_1 érték N_1 -szer, az x_2 érték N_2 -ször, $\ldots$ fordul elő. Ezért a számláló értéke

$$t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N) = N_1\cdot t(x_1)+N_2\cdot t(x_2)+\ldots$$

a tört értéke pedig

$$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} = \frac{N_1\cdot t(x_1)+N_2\cdot t(x_2)+\ldots}{N} =$$

$$= \frac{N_1}{N}\cdot t(x_1)+\frac{N_2}{N}\cdot t(x_2)+\ldots \approx p_1\cdot t(x_1)+p_2\cdot t(x_2)+\ldots = \mathrm{E}(\ t(X)\ ,)$$

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*:

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x)\ p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

   (a) a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy

   (b) végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |t(x)|\ p(x) < \infty$.

   Ekkor $N\to\infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \to \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x)\ p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   (a) pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\ x\ p(x)$ divergens, és

   (b) a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\ x\ p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N\to\infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \to +\infty$$
   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_i t(x_i)\ p_i = \sum_i t(x)\ p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   (a) pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\ x\ p(x)$ kovergens, és

   (b) a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\ x\ p(x)$ divergens.

   Ekkor $N\to\infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \to -\infty$$
   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

Vetter András – valószínűségszámítás – 2. rész. Nevezetes diszkrét eloszlások

7.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \approx \sum_x x^2\, p(x) = \mathrm{E}(\, X^2 \,)$$

Kicsit általánosabban: az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények c -re vonatkozó második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X -nek a c -re vonatkozó második momentumával egyenlő:

$$\frac{(\, X_1 - c \,)^2 + (\, X_2 - c \,)^2 + \ldots + (\, X_N - c \,)^2}{N} \approx \sum_x (\, x - c \,)^2\, p(x) = \mathrm{E}\big(\, (X - c)^2 \,\big)$$

Bizonyítás: Ha az előző részben a speciális $t(x) = x^2$, illetve a $t(x) = (x - c)^2$ függvényt vesszük akkor azonnal megkapjuk az állításokat.

7.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(\, X_1 - \overline{X} \,)^2 + (\, X_2 - \overline{X} \,)^2 + \ldots + (\, X_N - \overline{X} \,)^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\, X_1 - \overline{X} \,)^2 + (\, X_2 - \overline{X} \,)^2 + \ldots + (\, X_N - \overline{X} \,)^2}{N} \approx \sum_x (x - \mathrm{E}(\, X \,))^2\, p(x) = \mathrm{VAR}(\, X \,)$$

Vázlatos bizonyítás: Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\, X \,)$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(\, X_1 - \overline{X} \,)^2 + (\, X_2 - \overline{X} \,)^2 + \ldots + (\, X_N - \overline{X} \,)^2}{N} \approx$$

$$\approx \frac{(\, X_1 - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2 + (\, X_2 - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2 + \ldots + (\, X_N - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(\, X - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\, X_1 - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2 + (\, X_2 - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2 + \ldots + (\, X_N - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2}{N} \approx \mathrm{E}\big(\, (\, X - \mathrm{E}(\, X \,)\,)^2 \,\big) = \mathrm{VAR}(\, X \,)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

7.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények szórása – igen általános feltételek mellett – körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}} \approx \sqrt{\sum_x (\ x - \mathrm{E}(\ \ X)\ )^2\, p(x)} \ = \ \mathrm{SD}(\ X\ )$$

7.6. NSZT a mediánra

Nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredményekből számított medián körülbelül az X eloszlásából számított (elméleti) mediánnal egyenlő.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai

Ebben a fejezetben felsoroljuk a várható érték, a variancia és a szórás legfontosabb általános tulajdonságait. Ezek a tulajdonságok diszkrét és folytonos valószínűségi változókra, eloszlásokra egyaránt igazak. Arra bíztatom a Kedves Olvasót, hogy a tulajdonságokat

- gondolja meg,
- értelmezze őket a saját szemlélete szerint (jól!), és
- ellenőrizze konkrét példákra készített szimulációkkal!

A szimulációk készítésének élménye a tulajdonságok megtapasztalását teszi lehetővé, ami nagy mértékben megkönnyíti a szabályok megértését, megjegyzését.

A lentebbi képletekben X, Y, X_1, X_2, ..., X_n valószínűségi változókat a, b, c, n, a_1, a_2, ..., a_n, konstansokat jelentenek.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

8.1. Várható érték tulajdonságai

1. **Összeadás – általános eset:**

   Összeg várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek az összegével:

   (a) Két tagra:
   $$\mathrm{E}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}(\ X\ ) + \mathrm{E}(\ Y\ )$$

   (b) Több tagra:
   $$\mathrm{E}(\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ ) = \mathrm{E}(\ X_1\ ) + \mathrm{E}(\ X_2\ ) + \ldots + \mathrm{E}(\ X_n\ )$$

2. **Konstanssal való szorzás:**

   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a várható érték is a konstanssal szorzódik:
   $$\mathrm{E}(\ c \cdot X\ ) = c \cdot \mathrm{E}(\ X\ )$$

3. **Linearitás:**

   Egy lineáris kombináció várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek ugyanolyan lineáris kombinációjával:

   (a) Két tagra:
   $$\mathrm{E}(\ a\,X + b\,Y\ ) = a\,\mathrm{E}(\ X\ ) + b\,\mathrm{E}(\ Y\ )$$

   (b) Több tagra:
   $$\mathrm{E}(\ a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + \ldots + a_n\,X_n\ ) = a_1\,\mathrm{E}(\ X_1\ ) + a_2\,\mathrm{E}(\ X_2\ ) + \ldots + a_n\,\mathrm{E}(\ X_n\ )$$

4. **Összeadás – azonos várható értékek esetén:**

   Ha a tagok várható értékei egyenlők, akkor az összeg várható értéke egyenlő a várható értékek (μ -vel jelölt) közös értéke szorozva a tagok számával:
   $$\mathrm{E}(\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ ) = n\,\mu$$

5. **Átlagolás – azonos várható értékek esetén:**

   Ha a tagok várható értékei egyenlők, akkor az átlag várható értéke egyenlő a várható értékek (μ -vel jelölt) közös értékével:

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \right) = \mu$$

6. **Független valószínűségi változók szorzata:**

   Független valószínűségi változók szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával:

   (a) Két tényezőre:

$$\mathrm{E}(\ X \cdot Y\ ) = \mathrm{E}(\ X\ ) \cdot \mathrm{E}(\ Y\ )$$

   (b) Több tényezőre:

$$\mathrm{E}(\ X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n\ ) = \mathrm{E}(\ X_1\ ) \cdot \mathrm{E}(\ X_2\ ) \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}(\ X_n\ )$$

Bizonyítás: Az 1-5. állítások kézenfekvőek. A 6. állítás bizonyítása: A $t(x,y) = x\,y$ függvényre alkalmazva a várható érték

$$\mathrm{E}\ (\ t(X,Y)\ ) = \sum_{(x,y)} t(x,y)\ \ p(x,y)$$

általános képletét, ezt kapjuk:

$$\mathrm{E}\ (\ X \cdot Y\ ) = \sum_{(x,y)} x \cdot y\ \cdot\ p(x,y) = \sum_{(x,y)} x \cdot y\ \cdot\ p_1(x) \cdot p_2(y) =$$

$$= \sum_{(x,y)} x \cdot p_1(x)\ \cdot\ y \cdot p_2(y) = \sum_{x} x \cdot p_1(x)\ \cdot \sum_{y} y \cdot p_2(y) = \mathrm{E}\ (\ X\ )\ \cdot\ \mathrm{E}\ (\ Y\ )$$

8.2. Variancia tulajdonságai

1. **Összeadás (két tagra) – általános eset:**

   Összeg varianciája egyenlő a varianciák összegével plusz a kovariancia kétszerese:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{VAR}(\ X\ ) + \mathrm{VAR}(\ Y\ ) + 2\,\mathrm{COV}(\ X, Y\ )$$

   ahol COV $(\ X, Y\ )$ az X és Y közötti kovarianciát jelentik. A kovariancia fogalmát később tanuljuk.

2. **Összeadás (két tagra) – független tagok esetén:**

   Független valószínűségi változók összegének a varianciája egyenlő a tagok varianciáinak az összegével:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{VAR}(\ X\ ) + \mathrm{VAR}(\ Y\ )$$

3. **Konstanssal való szorzás:**

   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a variancia a konstans négyzetével szorzódik:

$$\mathrm{VAR}(\ c \cdot X\ ) = c^2\ \cdot\ \mathrm{VAR}(\ X\ )$$

4. **Összeadás – független tagok és azonos varianciák esetén:**

   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az összeg varianciája egyenlő varianciák (σ^2 -val jelölt) közös értéke szorozva a tagok számával:

$$\mathrm{VAR}(\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ ) = n\,\sigma^2$$

Móricz András – Valószínűségszámítás – 2. rész. Nyelvezetes diszkrét eloszlások

5. **Átlagolás – független tagok és azonos varianciák esetén:**
   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az átlag varianciája egyenlő varianciák (σ^2 -val jelölt) közös értéke osztva a tagok számával:

$$\mathrm{VAR}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Megjegyzés: Nem függetlenek valószínűségi változókra ezek a szabályok általában nem igazak.

Bizonyítás: Csak a 2. állítás szorul magyarázatra, a többi kézenfekvő. A 2. állítás bizonyítása, amikor $+$ jel áll a bal oldalon:

A variancia definícióját az $X + Y$ valószínűségi változóra alkalmazzuk:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big([\ X + Y\ -\ \mathrm{E}(\ X + Y\ )\ ]^2 \Big)$$

Felhasználjuk, hogy $\mathrm{E}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}(\ X\ ) + \mathrm{E}(\ Y\ )$, és ezt kapjuk:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big([\ X + Y\ -\ \mathrm{E}(\ X\ )\ -\ \mathrm{E}(\ Y\ )\ ]^2 \Big)$$

A szögletes zárójelen belül átrendezzük a tagokat:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big([\ (\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ ) + (\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ )\ ]^2 \Big)$$

Elvégezzük a négyzetre emelést:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big((\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 + (\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ )^2 + 2 \cdot (\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ ) \cdot (\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ ) \Big)$$

A három tag összegének a várható értékére három várható érték összegére esik szét:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big((\ X - \mathrm{E}(X)\ )^2 \Big) + \mathrm{E}\Big((\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ )^2 \Big) + \mathrm{E}\,(\ 2 \cdot (\ X - \mathrm{E}(\ X\ )) \cdot (\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ )\ )$$

A harmadik tagban a függetlenség miatt a szorzat várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával,

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big((\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 \Big) + \mathrm{E}\Big((\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ )^2 \Big) + 2 \cdot \mathrm{E}\,(\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ ) \cdot \mathrm{E}\,(\ Y - \mathrm{E}(Y)\ )$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{E}\,(\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ ) = 0 \ \text{ és } \ \mathrm{E}\,(\ Y - \mathrm{E}(\ Y\ )\ ) = 0$$

kiadódik, hogy a harmadik tag eltűnik:

$$\mathrm{VAR}\,(X + Y\ ) = \mathrm{E}\Big((\ X - \mathrm{E}(X)\ )^2 \Big) + \mathrm{E}\Big((\ Y - \mathrm{E}(Y)\ )^2 \Big)$$

Itt pedig ráismerünk a varianciák összegére:

$$\mathrm{VAR}(\ X + Y\ ) = \mathrm{VAR}(\ X\ ) + \mathrm{VAR}(\ Y\ )$$

Megjegyzés: Az Olvasó győződjön meg arról, hogy a fenti formulákban a bal oldali összegekben a $+$ jel mindenhol kicserélhető $\pm$ jelre is:

$$\mathrm{VAR}(\ X \pm Y\ ) = \mathrm{VAR}(\ X\ ) + \mathrm{VAR}(\ Y\ )$$

$$\mathrm{VAR}(\ X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n\ ) = \mathrm{VAR}(\ X_1\ ) + \mathrm{VAR}(\ X_2\ ) + \ldots + \mathrm{VAR}(\ X_n\ )$$

$$\mathrm{VAR}(\ X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n\ ) = n\,\sigma^2$$

$$\mathrm{VAR}\left(\frac{X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n}{n} \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész – Nevezetes diszkrét eloszlások

8.3. Szórás tulajdonságai

1. **Konstanssal való szorzás:**

   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a szórás a konstans abszolút értékével szorzódik:

$$\mathrm{SD}(\ c\,X\ )\ =\ |c|\ \mathrm{SD}(\ X\ )$$

2. **Négyzetgyök szabály az összegre:**

   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az összeg szórása egyenlő szórások (σ -val jelölt) közös értéke szorozva a tagok számának a négyzetgyökével.

$$\mathrm{SD}(\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ )\ =\ \sqrt{n}\,\sigma$$

3. **Négyzetgyök szabály az átlagra:**

   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az átlag szórása egyenlő szórások (σ -val jelölt) közös értéke osztva a tagok számának a négyzetgyökével.

$$\mathrm{SD}\left(\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\ \right)\ =\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Egyik állítás sem szorul különösebb magyarázatra.

Megjegyzés: Az Olvasó győződjön meg arról, hogy a fenti formulákban a bal oldali összegekben a $+$ jel mindenhol kicserélhető $\pm$ jelre is:

$$\mathrm{SD}^2(\ X \pm Y\ )\ =\ \mathrm{SD}^2(\ X\ ) + \mathrm{SD}^2(\ Y\ )$$

$$\mathrm{SD}(\ X \pm Y\ )\ =\ \sqrt{\mathrm{SD}^2(\ X\ ) + \mathrm{SD}^2(\ Y\ )}$$

$$\mathrm{SD}(\ X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n\ )\ =\ \sqrt{n}\,\sigma$$

$$\mathrm{SD}\left(\ \frac{X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n}{n}\ \right)\ =\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák

9.1. Hipergeometrikus eloszlás

paraméterek: M , N , n

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ n\ \frac{M}{N}$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ n\ \frac{N-n}{N-1}\ \frac{M}{N}\ (1-\frac{M}{N})$

szórás: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \sqrt{n\ \frac{N-n}{N-1}\ \frac{M}{N}\ (1-\frac{M}{N})}$

módusz:

Ha $(n+1)\ \frac{M+1}{N+2}$ egész szám, akkor két módusz van: $(n+1)\ \frac{M+1}{N+2}$ és $(n+1)\ \frac{M+1}{N+2}-1$

Ha $(n+1)\ \frac{M+1}{N+2}$ nem egész szám, akkor egy módusz van: $\left\lfloor (n+1)\ \frac{M+1}{N+2} \right\rfloor$

9.2. Binomiális eloszlás

paraméterek: n és p

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ n\ p$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ n\ p\ (1-p)$

szórás: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \sqrt{n\ p\ (1-p)}$

módusz:

Ha $(n+1)\ p$ egész, akkor két módusz van: $(n+1)\ p$ és $(n+1)\ p-1$

Ha $(n+1)\ p$ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor (n+1)\ p \rfloor$

9.3. Indikátor eloszlás

paraméter: p

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ p$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ p\ (1-p)$

szórás: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \sqrt{p\ (1-p)}$

módusz:

Ha $p=\frac{1}{2}$, akkor két módusz van: 0 és 1

Ha $p<\frac{1}{2}$, akkor egy módusz van: 0

Ha $p>\frac{1}{2}$, akkor egy módusz van, az 1

Vetien András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

9.4. Optimista geometriai eloszlás

paraméter: p

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \frac{1}{p}$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \frac{(1-p)}{p^2}$

szórás: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \frac{\sqrt{(1-p)}}{p}$

módusz: 1

9.5. Pesszimista geometriai eloszlás

paraméter: p

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \frac{1}{p} - 1 \ = \ \frac{1-p}{p}$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \frac{(1-p)}{p^2}$

szórás: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \frac{\sqrt{(1-p)}}{p}$

módusz: 0

9.6. Optimista negatív binomiális eloszlás

paraméterek: $n\ ,\ p$

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \frac{n}{p}$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \frac{n\ (1-p)}{p^2}$

szórása: $\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \frac{\sqrt{n\ (1-p)}}{p}$

módusza:

Ha $\frac{n-1}{p}$ egész, akkor két módusz van: $\frac{n-1}{p} + 1$ és $\frac{n-1}{p}$

Ha $\frac{n-1}{p}$ nem egész, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor + 1$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

9.7. Pesszimista negatív binomiális eloszlás

paraméterek: n, p

várható érték: $\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \frac{n}{p} - n \ = \ n\ \frac{1-p}{p}$

variancia: $\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \frac{n\ (1-p)}{p^2}$

szórás: $\mathrm{SD}(X) \ = \ \frac{\sqrt{n\ (1-p)}}{p}$

módusz:

Ha $\frac{n-1}{p}$ egész, akkor két módusz van: $\frac{n-1}{p} - n + 1$ és $\frac{n-1}{p} - n$

Ha $\frac{n-1}{p}$ nem egész, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor - n + 1$

9.8. Poisson eloszlás

paraméter: λ

várható érték: λ

variancia: λ

szórás: $\sqrt{\lambda}$

módusz:

Ha λ egész, akkor két módusz van: λ és $\lambda - 1$

Ha λ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor \lambda \rfloor$

Feladat: Telefonhívások. Tanszékünkre a délelőtti órákban óránként átlagosan 3.3 telefonhívás érkezik. Mi a valószínűsége annak, hogy

1. délelőtt 9 és 10 óra között pontosan 4 hívás érkezik?
2. délelőtt 9 és 11 óra között pontosan 4 hívás érkezik?
3. délelőtt 9 és 11 óra között 4 -nél több hívás érkezik?

Megoldás: Egy adott időintervallumban a hívások száma Poisson eloszlást követ. Egy óra alatt a várható érték 3.3 , két óra alatt 6.6 . Ezért

1.

$$\mathrm{P}(\text{ délelőtt } 9 \text{ és } 10 \text{ között pontosan 4 hívás }) \ =$$

$$= \frac{(3.3)^4}{4!}\ \mathrm{e}^{-3.3} \ = \texttt{POISSON(4 ; 3.3 ; FALSE)} \ = \ 0.18$$

Vetter András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

2.

$$\text{P(délelőtt } 9 \text{ és } 11 \text{ között pontosan 4 hívás)} =$$

$$= \frac{(6.6)^4}{4!}\,\mathrm{e}^{-6.6} = \texttt{POISSON(4 ; 6.6 ; FALSE)} = 0.11$$

3.

$$\text{P(délelőtt } 9 \text{ és } 11 \text{ között } 4 \text{ -nél több hívás)} =$$

$$= 1 - \text{P(délelőtt 9 és 11 között 4 vagy kevesebb hívás)} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{(6.6)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-6.6} = \texttt{1 - POISSON(4 ; 6.6 ; TRUE)} = 0.79$$

Feladat: Csillaghullás. Fogadjuk el, hogy augusztus közepén átlagosan kb. 10 percenként lehet egy-egy csillaghullást látni. Mi a valószínűsége annak, hogy 15 perc alatt (pontosan) 2 csillaghullást lát valaki?

Megoldás: A 15 perc alatti csillaghullások száma Poisson eloszlást követ, hiszen sok a meteorit a világűrben, melyek egymással mit sem törődve száguldoznak, és minden meteoritra igaz, hogy a tekintett 15 perc alatt kis eséllyel lép be a fejünk felett a légkörbe. Mivel átlagosan 10 percenként jönnek a csillaghullások, 15 perc alatt a csillaghullások számának a várható értéke 1.5 . A Poisson eloszlás paramétere 1.5. Ezért a kérdezett valószínűség:

$$\text{P(2 csillaghullás)} = \frac{(1.5)^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-1.5} =$$

$$= \texttt{POISSON(2 ; 1.5 ; FALSE)} = 0.25$$

9.9. Példa: Ha eltalálod, mindet neked adom

Az alábbi feladat is egy kedves, érdeklődő diák ötlete alapján született:

Feladat: A Poisson eloszlással való ismerkedésünk elején szerepelt a **Hány hal lesz az *ÖREG* halász hálójában?** című feladat (lásd: 45. oldal). Ebben a feladatban a halász ezt mondta nekem:

Ha eltalálod, hogy hány hal lesz a hálóban, meghívlak vacsorára.

Ott kiderült, hogy a vacsorán való részvételem esélye akkor a legnagyobb, ha 2 halra tippelek.

Ha a célom nem a vacsorán való részvétel, hanem valami más, akkor nyilván máshogyan kell taktikáznom. Kérdés: hogyan gondolkodtam és taktikáztam volna, ha a halász ezt mondta volna:

Ma még sokszor kiemelem a hálót.
Mindig tippelhetsz, hogy hány hal lesz a hálóban.
Amikor eltalálod, neked adom a hálóban lévő összes halat.

Megoldás: Kézenfekvő, hogy ebben az esetben arra törekednék, hogy a nyert halak összes száma avagy – ami ugyanazt jelenti – a nyert halak számának az átlaga a lehető legnagyobb legyen. Mivel a hálót sokszor emeli ki a halász, a nyert halak számának az átlaga közelíthető az átlag elméleti értékével, a várható értékkel. Ezért azt kell megkeresni, hogy a nyert halak számának a várható értéke milyen tipp esetén lesz a lehető legnagyobb.

A halak száma a hálóban – mint tudjuk régebbről – Poisson eloszlást követ 2.81 paraméterrel. Ha én minden merítésnél k halra tippelek, akkor minden alkalommal

Vetics András – Valószínűségszámítás – 2. rész. Nevezetes diszkrét eloszlások

$$\frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81} \qquad \text{valószínűséggel} \quad k \quad \text{darab}$$

$$1 - \frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81} \qquad \text{valószínűséggel} \quad 0 \quad \text{darab}$$

halat nyerek. Ezért a nyert halak számának a várható értéke

$$k \cdot \frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81} + 0 \cdot \left(1 - \frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81}\right) = k \cdot \frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81}$$

Ezért azt kell megkeresni, hogy a

$$k \cdot \frac{(2.81)^k}{k!}e^{-2.81}$$

kifejezésnek milyen k értéknél van a maximuma. Ezt a k értéket akár a numerikus értékek táblázatából, akár a maximum keresésére tanult módszerrel könnyű megtalálni. Legyen az Olvasó feladata ellenőrizni, hogy a maximum a $k = 3$ értékre adódik.

Megjegyzés: Természetesen nem csak úgy lehet taktikázni, hogy mindig ugyanazzal a k számmal tippelünk. Legyen az is az Olvasó feladata, hogy belássa: rosszabbul járnék, ha nem mindig 3 -ra tippelnék.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások

10.1. Egyenletes eloszlás

$$\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \sum_x \ x\ p(x) \ = \ \sum_{x=A}^{B} x \ \ \frac{1}{B-A+1} =$$

$$\frac{1}{B-A+1} \ \sum_{x=A}^{B} x \ = \ \frac{1}{B-A+1} \ (B-A+1) \ \frac{A+B}{2} \ = \ \frac{A+B}{2}$$

Mivel az eloszlás szimmetrikus az $\frac{a+b}{2}$ pontra, nyilvánvaló, hogy a várható érték $\frac{a+b}{2}$.

10.2. Hipergeometrikus eloszlás *(Extra tananyag)*

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x \ x\ p(x) =$$

$$\sum_{x=\max(0,n-B)}^{\min(n,A)} x \ \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} \ =$$

$$\sum_{x=\max(1,n-B)}^{\min(n,A)} x \ \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} \ =$$

$$\sum_{x=\max(1,n-B)}^{\min(n,A)} \frac{x \ \binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} \ =$$

$$\sum_{x=\max(1,n-B)}^{\min(n,A)} \frac{A \ \binom{A-1}{x-1}\binom{B}{n-x}}{\frac{A+B}{n}\binom{A-1+B}{n-1}} \ =$$

$$n \ \frac{A}{A+B} \ \sum_{x=\max(1,n-B)}^{\min(n,A)} \frac{\binom{A-1}{x-1}\binom{B}{n-x}}{\binom{A-1+B}{n-1}} \ =$$

$$n \ \frac{A}{A+B} \ \sum_{x=\max(0,n-1-B)}^{\min(n-1,A-1)} \frac{\binom{A-1}{y}\binom{B}{n-1-y}}{\binom{A-1+B}{n-1}} \ = \ n \ \frac{A}{A+B}$$

A levezetés során $x-1$ et y -nal helyettesítettük, és ennek megfelelően $1+y$ helyére x -et irtunk. Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy

$$\sum_{x=\max(0,n-1-B)}^{\min(n-1,A-1)} \frac{\binom{A-1}{y}\binom{B}{n-1-y}}{\binom{A-1+B}{n-1}} \ = \ 1$$

ami következik abból a tényből, hogy az $A-1, B, n-1$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás súlyfüggvénye:

$$\frac{\binom{A-1}{y}\binom{B}{n-1-y}}{\binom{A-1+B}{n-1}}$$

$$(\ \max(\ 0\ ,\ n-1-B\ )\ \leq\ x\ \leq\ \min(\ n-1\ ,\ A-1\ )\ )$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész – Nevezetes diszkrét eloszlások

10.3. Indikátor eloszlás

10.3.1. Heurisztikus levezetés

Jelentsen A egy p valószínűségű eseményt. Ha egyetlen kísérletet végzünk A -ra, akkor az X valószínűségi változó mutassa azt, hogy A hányszor következik be eme egyetlen kísérlet során:

- X értéke 1, ha A bekövetkezik
- X értéke 0, ha A nem bekövetkezik be

Ha erre az X valószínűségi változóra N kísérletet végzünk, akkor N darab kísérleti eredményt kapunk:

$$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

Itt minden X_i vagy 1 vagy 0 , attól függően, hogy i -ik kísérlet során A bekövetkezik-e vagy sem. Egyrészt, mint a nagy számok törvénye alapján tudjuk, az $X_1, X_2, \ldots X_N$ kísérleti eredmények átlaga – nagy N esetén – közelíti X várható értékét:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\ , X\ )$$

Másrészt a tört számlálójában álló $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ összeg i -ik tagja 1 vagy 0 attól függően, hogy az i -ik kísérlet során A bekövetkezik-e vagy sem, maga az összeg azt mutatja, hogy N kísérlet során hányszor következik be az A esemény. Ezért az összeget N-nel osztva a kapott tört – nagy N esetén – körülbelül egyenlő az A esemény valószínűségével:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx p$$

Mindezekből természetesnek tűnik, hogy

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = p$$

10.3.2. Bizonyítás

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x x\, p(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot\ p = p$$

10.4. Binomiális eloszlás

10.4.1. Heurisztikus levezetés

Jelentsen A egy p valószínűségű eseményt. Képzeljük el, hogy n kísérletet végzünk A -ra. Az X valószínűségi változó mutassa azt, hogy A hányszor következik be az n kísérlet során. Ha erre az X valószínűségi változóra N kísérletet végzünk, akkor N kísérleti eredményt kapunk: $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Egyrészt, mint a nagy számok törvénye alapján tudjuk, ezek átlaga – nagy N esetén – közelíti X várható értékét:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\ X\ )$$

Másrészt a bal oldalon álló tört számlálójában álló $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ összeg minden tagja n kísérlet kapcsán mutatja, hogy az A esemény hányszor következik be, maga az összeg azt mutatja, hogy $N \cdot n$ kísérlet során hányszor

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész. Nem szabad diszkrét eloszlások

következik be az A esemény. Ezért az összeget $N \cdot n$ -nel osztva a kapott tört – nagy N esetén – körülbelül egyenlő az A esemény valószínűségével:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N \cdot n} \approx p$$

A közelítő egyenlőség mindkét oldalát n-nel szorozva kapjuk, hogy

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx n \cdot p$$

Mindezekből természetesnek tűnik, hogy

$$\mathrm{E}(\,X\,) = n \cdot p$$

10.4.2. Bizonyítás

$$\mathrm{E}(\,X\,) = \sum_x x\,p(x) =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=1}^{n} n \binom{n-1}{x-1} p\, p^{x-1} (1-p)^{n-x} =$$

$$np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} =$$

$$np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} = np$$

A levezetés során $x-1$ et y -nal helyettesítettük, és ennek megfelelően $1+y$ helyére x -et írtunk. Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy

$$\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} = 1$$

ami következik abból a tényből, hogy az $n-1$ és p paraméterű binomiális eloszlás súlyfüggvénye:

$$\binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \quad \text{if} y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

10.5. Geometriai eloszlás (optimista)

10.5.1. Heurisztikus levezetés

Jelentsen A egy p valószínűségű eseményt. Képzeljük el, hogy addig végzünk kísérleteket A -ra, amíg A esemény végre bekövetkezik. Az X valószínűségi változó mutassa azt, hogy hány kísérlet kell ehhez. Ha erre az X valószínűségi változóra N kísérletet végzünk, akkor N kísérleti eredményt kapunk: $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Egyrészt, mint a nagy számok törvénye alapján tudjuk, ezek átlaga – nagy N esetén – közelíti X várható értékét:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\, X \,)$$

Másrészt a számlálóban álló $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ összeg azt mutatja, hogy hány kísérlet kell az A esemény N -edik bekövetkezéséhez, N osztva az összeggel – nagy N esetén – körülbelül egyenlő az A esemény valószínűségével:

$$\frac{N}{X_1 + X_2 + \ldots + X_N} \approx p$$

vagyis

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \frac{1}{p}$$

Mindezekből természetesnek tűnik, hogy

$$\mathrm{E}(\, X \,) = \frac{1}{p}$$

10.5.2. Bizonyítás

Két bizonyítást is adunk. Az első bizonyítás végtelen mértani sorok összegzésein alapul:

$$\mathrm{E}(\, X \,) = \sum_x x\, p(x) =$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
p & + & 2pq & + & 3pq^2 & + & 4pq^3 & + & \dots & = \\
\\
p & + & pq & + & pq^2 & + & pq^3 & + & \dots \\
 & + & pq & + & pq^2 & + & pq^3 & + & \dots \\
 & & & + & pq^2 & + & pq^3 & + & \dots \\
 & & & & & + & pq^3 & + & \dots \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & = \\
\frac{p}{1-q} & & & & & & & & \\
 & + & \frac{pq}{1-q} & & & & & & \\
 & & & + & \frac{pq^2}{1-q} & & & & \\
 & & & & & + & \frac{pq^3}{1-q} & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & = \\
1 & & & & & & & & \\
 & + & q & & & & & & \\
 & & & + & q^2 & & & & \\
 & & & & & + & q^3 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & =
\end{array}
$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

A második bizonyítás a hatványsorok elméletén alapszik. A $q = 1 - p$ jelöléssel élve ezt kapjuk:

$$\mathrm{E}(\,X\,) = \sum_x x\, p(x) \;=$$

$$1\,p + 2\,p(1-p) + 3\,p(1-p)^2 + 4\,p(1-p)^3 + \dots \;=$$

$$1\,p + 2\,pq + 3\,pq^2 + 4\,pq^3 + \dots \;=$$

$$p\,\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots\right) \;=\; p\,\frac{1}{(1-q)^2} \;=\; p\,\frac{1}{p^2} \;=\; \frac{1}{p}$$

Felhasználtuk a

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots \;=\; \frac{1}{(1-q)^2}$$

azonosságot, amit az alábbiakban le is vezetünk úgy, hogy először felismerjük, hogy az adott sor egy mértani sor deriváltjaként fogható fel, aztán vesszük a végtelen mértani sor összegképletét, és végül azt deriváljuk:

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots \;=$$

$$\frac{d}{dq}\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \dots\right) \;=$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) \;=\; \frac{d}{dq}\left((1-q)^{-1}\right) \;=\; (1-q)^{-2} \;=\; \frac{1}{(1-q)^2}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

10.6. Geometriai eloszlás (pesszimista)

Mivel a pesszimista geometriai eloszlás az optimistából úgy adódik, hogy azt 1 egységgel balra toljuk, a pesszimista geometriai eloszlás várható értéke nem más, mint az optimista geometriai eloszlás várható értéke mínusz 1 .

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \frac{1}{p} - 1$$

10.7. Negatív binomiális eloszlás (optimista)

10.7.1. Heurisztikus levezetés

Jelentsen A egy p valószínűségű eseményt. Képzeljük el, hogy addig végzünk kísérleteket A -ra, amíg A esemény végre n -edszer bekövetkezik. Az X valószínűségi változó mutassa azt, hogy hány kísérlet kell ehhez. Ha erre az X valószínűségi változóra N kísérletet végzünk, akkor N kísérleti eredményt kapunk: $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Egyrészt, mint a nagy számok törvénye alapján tudjuk, ezek átlaga – nagy N esetén – közelíti X várható értékét:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\ X\ )$$

Másrészt a számlálóban álló $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ összeg azt mutatja, hogy hány kísérlet kell az A esemény $N \cdot n$ -edik bekövetkezéséhez, $N \cdot n$ osztva az összeggel – nagy N esetén – körülbelül egyenlő az A esemény valószínűségével:

$$\frac{N \cdot n}{X_1 + X_2 + \ldots + X_N} \approx p$$

vagyis

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N \cdot n} \approx \frac{1}{p}$$

A közelítő egyenlőség mindkét oldalát n -nel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \frac{n}{p}$$

Mindezekből természetesnek tűnik, hogy

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \frac{n}{p}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás_2. rész: levezetés és eloszlások

10.7.2. Bizonyítás *(Extra tananyag)*

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x x\, p(x) =$$

$$= \sum_{x=n}^{\infty} x \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} =$$

$$= \sum_{x=n}^{\infty} n \binom{x}{n} \frac{p^{n+1}}{p} (1-p)^{x-n} =$$

$$= \frac{n}{p} \sum_{x=n}^{\infty} \binom{x}{n} p^{n+1} (1-p)^{x-n} =$$

(itt az $y = x + 1,\ x = y - 1$ helyettesítést alkalmazzuk)

$$= \frac{n}{p} \sum_{y=n+1}^{\infty} \binom{y-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{y-1-n} \ =$$

$$= \frac{n}{p}$$

(Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy

$$\sum_{y=n+1}^{\infty} \binom{y-1}{n} p^{1+n} (1-p)^{y-1-n} \ = \ 1$$

ami azért igaz, mert a szumma az $n+1$, p paraméterű optimista negatív binomiális eloszlás tagjait összegzi.)

10.8. Negatív binomiális eloszlás (pesszimista) *(Extra tananyag)*

Mivel a pesszimista negatív binomiális eloszlás az optimistából úgy adódik, hogy azt n egységgel balra toljuk, a pesszimista negatív binomiális eloszlás várható értéke nem más, mint az optimista geometriai eloszlás várható értéke mínusz n

$$\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \frac{r}{p} - n$$

10.9. Poisson eloszlás

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_{x} \ x\, p(x) \ =$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} x \ \ \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \ =$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \ \ \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \ =$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \lambda \ \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} \ =$$

$$\lambda \ \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} \ =$$

$$\lambda \ \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \ = \ \lambda$$

A levezetés során $x - 1$ et y -nal helyettesítettük, és ennek megfelelően $1 + y$ helyére x-et írtunk. Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \ = \ 1$$

ami következik abból a tényből, hogy a λ paraméterű Poisson eloszlás súlyfüggénye

$$\frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \quad (\ y = 0, 1, 2, \dots\ )$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

11. Binomiáls eloszlással kapcsolatos levezetések

11.1. Második momentum

Állítás:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ )\ =\ np\ +\ n^2p^2\ -\ np^2$$

Bizonyítás *(Extra tananyag)*:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) = \sum_x\ x^2\ p(x)\ =$$

$$\sum_{x=0}^{n}\ x^2\ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\ =$$

$$\sum_{x=1}^{n}\ x^2\ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\ =$$

$$\sum_{x=1}^{n}\ n\ x\ \binom{n-1}{x-1}\ p^x\ (1-p)^{n-x}\ =$$

$$np\ \sum_{x=1}^{n}\ x\ \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x}\ =$$

Most $(x-1\ )$-et y -nal helyettesítjük, és így $(1+y)$-t írunk x helyére:

$$np\ \sum_{y=0}^{n-1}\ (1+y) \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} =$$

Az összeg két összegre bontható:

$$np\ \left[\left(\sum_{y=0}^{n-1}\ 1\ \ \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \right) + \left(\sum_{y=0}^{n-1}\ y\ \ \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \right) \right] =$$

Itt a szögletes zárójal belsejében álló első szumma az $n-1$ és p paraméterű binomiális eloszlás tagjainak az összege, ami 1. A második szumma az $n-1$ és p paraméterű binomiláis eloszlás várható értéke, ami $(n-1)p$. Ezt kapjuk:

$$np\ \ [\ 1\ +\ (n-1)\ p\ ]\ =\ np\ +\ n^2p^2\ -\ np^2$$

11.2. Variancia és szórás

Állítás:

$$\mathrm{VAR}(\ X\ )\ =\ np(1-p)$$
$$\mathrm{SD}(\ X\ )\ =\ \sqrt{np(1-p)}$$

Bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Mint már tudjuk, a binomiális eloszlás második momentuma

$$\mathrm{E}(\ X^2\ )\ =\ n^2p^2 - np^2 + np$$

Vetiére Valószínűségszámítás 12. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

várható értéke

$$\mathrm{E}(\ X\ )\ =\ np$$

Ezért a varianciája

$$\mathrm{VAR}(\ X\ )\ =\ \left(n^2p^2 - np^2 + np\right) - (np)^2\ =\ np - np^2 = np(1-p)$$

szórása pedig

$$\mathrm{SD}(\ X\ )\ =\ \sqrt{np(1-p)}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

12. Feltételes várható érték, variancia, szórás

Először a feltételes várható érték fogalmával ismerkedünk meg, azután jön a többi feltételes "izé".

12.1. Feltételes várható érték

Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók kapcsán korábban bevezettük a $p_{2|1}(y|x)$, $p_{1|2}(x|y)$ feltételes súlyfüggvényeket (feltételes eloszlásokat). Most a feltételes súlyfüggvényekre támaszkodva bevezetjük először a feltételes várható érték fogalmát.

A feltételes súlyfüggvényből számított

$$\sum_y y\, p_{2|1}(y|x)$$

várható értéket **feltételes várható érték**nek nevezzük. Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes várható értékét $\mathrm{E}(Y|X = x)$ -szel jelöljük. Tehát

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = x\ ) = \sum_y y\, p_{2|1}(y|x)$$

Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes várható értéke azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $X = x$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az Y -ra kapott kísérleti eredmények átlaga.

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes várható értékét $\mathrm{E}(\ X \mid Y = y\ )$ -nal jelöljük. Nyilván

$$\mathrm{E}(\ X \mid Y = y\ ) = \sum_x x\, p_{1|2}(x|y)$$

Az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes várható értéke azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $Y = y$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az X értékek átlaga.

12.2. Feltételes variancia

A feltételes súlyfüggvényből számított varianciát **feltételes varianciá**nak nevezzük.

Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes varianciája azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $X = x$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az Y -ra kapott kísérleti eredmények varianciája.

Az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes varianciája azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $Y = y$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az X -re kapott kísérleti eredmények varianciája.

Móri András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Feltételes diszkrét eloszlások

12.3. Feltételes szórás

A feltételes súlyfüggvényből számított szórást **feltételes szórás**nak nevezzük.

Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes szórása azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $X = x$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az Yv-ra kapott kísérleti eredmények szórása.

Az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes varianciája azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $Y = y$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az X -re kapott kísérleti eredmények szórása.

Megjegyzés: A feltételes súlyfüggvényből számított "izé"-t **feltételes "izé"** -nek nevezzük. Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes "izé" -je azt fejezi ki, hogy sok kísérlet kapcsán, ha csak azokat a kísérleteket fogadjuk el érvényesnek, amikor $X = x$, akkor az érvényes kísérletekben körülbelül mennyi az Y-ra kapott kísérleti eredmények "izé" -je.

12.4. Példák: Ha tudjuk, mennyi az egyik, akkor mennyi a másiknak az "izé" -je?

A példák azzal a feladattal kapcsolatosak, melyet az 1. fejezet "Kombinatorikus alapképletek" című 8. pontjában vettünk: Egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 piros, 15 kék, 20 fehér. Kiveszünk 8 golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kihúzottak között hány piros és hány kék lesz. Az így kapott X és Y valószínűségi változókból adódó (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó $p(x, y)$ súlyfüggvényének táblázatát korábban meghatároztuk. Most csak a feltételes eloszlások táblázataival foglalkozunk.

1. Példa: Ha tudjuk, hány piros, akkor mi a kékek számának várható értéke, varianciája, szórása? A feltételes eloszlások táblázatában minden oszlop aljára odaírtuk a kékek számának feltételes várható értékét, feltételes varianciáját és feltételes szórását:

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.040	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.145	0.085	0.037	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.281	0.231	0.160	0.084	0.026	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.300	0.328	0.320	0.266	0.174	0.070	0.000	0.000	0.000
2	0.173	0.242	0.313	0.369	0.381	0.321	0.176	0.000	0.000
1	0.049	0.086	0.143	0.224	0.327	0.435	0.504	0.429	0.000
0	0.005	0.012	0.024	0.048	0.093	0.174	0.319	0.571	1.000
F.v.é.	3.43	3.00	2.57	2.14	1.71	1.29	0.86	0.43	0.00
F.var.	1.56	1.41	1.25	1.08	0.89	0.69	0.48	0.24	0.00
F.sz.	1.25	1.19	1.12	1.04	0.95	0.83	0.69	0.49	0.00

Táblázat: X *adott értéke mellett*
Y **`feltételes`** *eloszlása, várható értéke, varianciája, szórása*

2. Példa: Ha tudjuk, hány kék, akkor mi a pirosak számának várható értéke, varianciája, szórása? A feltételes eloszlások táblázatában minden sor jobb szélére odaírtuk a pirosak számának feltételes várható értékét, feltételes varianciáját és feltételes szórását:

y x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	F.v.é.	F.var.	F.sz.
8	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0,00
7	0.667	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.33	0.22	0.47
6	0.437	0.460	0.103	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.67	0.43	0.66
5	0.281	0.468	0.222	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.62	0.79
4	0.177	0.416	0.312	0.088	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	1.33	0.80	0.89
3	0.109	0.340	0.360	0.160	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	1.67	0.96	0.98
2	0.065	0.261	0.367	0.230	0.067	0.008	0.000	0.000	0.000	2.33	1.10	1.05
1	0.038	0.190	0.343	0.286	0.118	0.024	0.002	0.000	0.000	2.33	1.23	1.11
0	0.022	0.132	0.298	0.318	0.174	0.049	0.007	0.000	0.000	2.67	1.35	1.16

Táblázat: Y *adott értéke mellett*
X **`feltételes`** *eloszlása, várható értéke, varianciája, szórása*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Nevezetes diszkrét eloszlások

Valószínűségszámítás
3. RÉSZ
Egydimenziós folytonos valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2019. november 21.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Tartalomjegyzék

1. Folytonos eloszlások **3**
1.1. Ismétlés kalkulusból . . . 3
1.2. Folytonos valószínűségi változók . . . 3
1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény . . . 4
1.4. Intervallum valószínűsége . . . 6
1.5. Medián . . . 6
1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis . . . 6

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel **9**
2.1. Szemléltetés festékkel (tömeggel) . . . 9
2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen . . . 10
2.2. Szemléltetés pontfelhővel . . . 11
2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen . . . 11
2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban . . . 11
2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt . . . 12

3. Random számok transzformációi **15**
3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka . . . 15
3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel . . . 15
3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 16
3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 22
3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 29
3.3.1. Random számok összege . . . 29
3.3.2. Két random szám maximuma . . . 31
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások . . . 31
3.4.1. Arkusz-színusz eloszlás . . . 32
3.4.2. Cauchy eloszlás . . . 35
3.5. Monoton transzformációk . . . 39
3.6. Folytonos szimuláció . . . 40
3.7. Béta eloszlások . . . 41
3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 41

3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése . . . 46
3.7.3. Nem-egyenletes alap-eloszlás esete *(Extra tananyag)* . . . 47

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)* **50**
4.1. Definíciók . . . 50
4.2. Nagy számok törvényei . . . 51
4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára . . . 51
4.2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára . . . 53
4.2.3. NSZT a második momentumra . . . 55
4.2.4. NSZT a varianciára . . . 55
4.2.5. NSZT a szórásra . . . 56
4.2.6. NSZT a mediánra . . . 56
4.3. Példa: Csónak bérbe adása extra haszonnal . . . 56

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai *(– diszkrét és folytonos eset)* **60**

6. Nevezetes folytonos eloszlások **61**
6.1. Exponenciális eloszlás . . . 61
6.1.1. Örökifjú tulajdonság . . . 62
6.1.2. Exponenciális eloszlások alkalmazásai . . . 64
6.1.3. Öregedő tulajdonság . . . 65
6.1.4. Fiatalodó tulajdonság . . . 66
6.2. Gamma eloszlás . . . 67
6.2.1. Mennyi idő múlva történik az n -ik baleset? . . . 70
6.2.2. Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van? . . . 72
6.3. Normális eloszlások . . . 72
6.3.1. Standard normális eloszlás . . . 72
6.3.2. Normális eloszlás μ , σ paraméterekkel . . . 76
6.3.3. Centrális határeloszlás tétel . . . 80
6.3.4. Normális eloszlások alkalmazásai . . . 81
6.4. Béta eloszlások várható értéke, szórása *(Extra tananyag)* . . . 84

7. Közelítések normális eloszlással **87**
7.1. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással . . . 87
7.1.1. Előkészítés egy példával . . . 87
7.1.2. A de Moivre – Laplace tétel . . . 90
7.1.3. A de Moivre – Laplace tétel, mint a centrális határeloszlás tétel speciális esete . . . 91
7.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 92
7.2.1. A relatív gyakoriság közelítő eloszlása . . . 92
7.2.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 92
7.2.3. Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy . . . ? . . . 93
7.3. Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással . . . 95
7.4. Várható érték közelítése átlaggal . . . 95
7.4.1. Az átlag közelítő eloszlása . . . 95
7.4.2. Várható érték közelítése átlaggal . . . 96
7.4.3. Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy . . . ? . . . 96

8. Eloszlások transzformációi **99**
8.1. Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel . . . 99
8.1.1. Szemléltetés vezérvonalakkal . . . 99
8.1.2. Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi . . . 102
8.1.3. Egyenletes eloszlás monoton transzformációi . . . 104
8.1.4. Exponenciális eloszlás transzformációi . . . 106
8.2. Lineáris transzformációk leírása képletekkel . . . 107
8.2.1. Növekedő eset ($a > 0$) . . . 108

Valószínűségszámítás és statisztika 2. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

8.2.2. Csökkenő eset ($a < 0$) . . . 109
8.2.3. A két képlet egységesítése . . . 111
8.3. Monoton transzformációk leírása képletekkel . . . 111
8.3.1. Növekedő transzformációk . . . 111
8.3.2. Csökkenő transzformációk . . . 112
8.3.3. A két képlet egységesítése . . . 113
8.4. Lognormális eloszlások . . . 113

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)* **117**

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)* **118**
10.1. Trükkös eltolás . . . 118
10.2. Barátok és osztályok . . . 118
10.3. Főnökök . . . 118
10.4. Ellentmondásra jutunk . . . 119

11. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)* **120**
11.1. A probléma megfogalmazása . . . 120
11.2. A valószínűség meghatározása . . . 121
11.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása . . . 122
11.3. Az általános eset megfogalmazása . . . 123
11.4. Miért hívjuk az erős törvényt *erős*nek? . . . 123

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. február 5.

Vetier András

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

1. Folytonos eloszlások

1.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x -re
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük **az** $f(x)$ **terület-függvénye**-ként adódó **primitív függvény**ét:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

aminek deriváltjaként – minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos – az $f(x)$ -et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x)$$

A derivált – mint tudjuk – különbségek határértéke: $a < x < b$ fennállása mellett $a \to x,\ b \to x$ esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \to f(x)$$

Ezt a tény hétköznapi nyelven úgy lehet mondani, hogy $a < x < b$ fennállása mellett x -hez közeli a és b esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \approx f(x)$$

vagy átárendezéssel:

$$F(b) - F(a) \approx f(x)\,(b - a)$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbségként kaphatjuk meg:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ez a jól ismert Newton-Leibniz formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton-Leibniz formulában a és b nem kell hogy közel legyenek egymáshoz.

1.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek, de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumot tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetőek diszkréteknek. Példák:

- X = a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor

Veszely András – Valószínűségszámítás 10. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

- X = amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- X = egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- X = egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- X = a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonos**nak mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy – a fentiekkel ellentétben – egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$ -szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

Az eloszlásfüggvények egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0 -val egyenlő, ezért a definícióban "kisebb vagy egyenlő" helyett "kisebb" is írható:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathrm{P}(X \leq x)$ valószínűség nagyobb a $\mathrm{P}(X < x)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi a x valószínűsége:

$$\mathrm{P}(X \leq x) - \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x)$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy **diszkrét** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz
3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. az eloszlásfüggvény grafikonja vízszintes vonalakból és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **diszkrét** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy **folytonos** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz

Vetter András – Valószínűségszámítás 2. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változó

3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. mindenhol folytonos

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **folytonos** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Vegyük észre, hogy a diszkrét és a folytonos esetek az 1-3. pontokban megegyeznek, és csak a 4. pontban térnek el.

A **jobboldali eloszlásfüggvény** is definiálható a

$$T(x) \;=\; \mathrm{P}\,(\; X \;\geq\; x \;)$$

képlettel. A jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait itt nem soroljuk fel. A tulajdonságok kigondolása az Olvasó dolga lesz a gyakorló feladatok között.

A könyvnek ebben a részében a folytonos esetre fókuszálunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel:

$$F'(x) \;=\; f(x)$$

Az $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**.

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 1$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekszik.

Tekintsünk most az x pont körül egy pici intervallumot, ami lehet például az $[x; x+\Delta x]$ intervallum, ahol Δx egy pici pozitív szám. Az előbbieket az $a \;=\; x$, $b \;=\; x+\Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}\,(\; x \;\leq\; X \;\leq\; x+\Delta x \;) \;=\; \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

A jobboldalon álló integrált $f(x)\Delta x$ -szel közelíthetjük, ezért

$$\mathrm{P}\,(\; x \;\leq\; X \;\leq\; x+\Delta x \;) \;\approx\; f(x)\Delta x$$

vagyis

$$f(x) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\,(\; x \;\leq\; X \;\leq\; x+\Delta x \;)}{\Delta x}$$

Előfordulhat, hogy az $[x; x+\Delta x]$ intervallum helyett kényelmesebb az x pont körüli $[x_1, x_2]$ intervallummal dolgozni. Ilyenkor

$$f(x) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\; x_1 \;\leq\; X \;\leq\; x_2 \;)}{x_2 - x_1}$$

ahol $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül.

1. Megjegyzés: Jól jegyezzük meg: ***a sűrűségfüggvény értéke egy x helyen*** azt mutatja, hogy az x körüli pici intervallumot véve, ***a pici intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa a pici intervallum hosszának.***

2. Megjegyzés: Hangsúlyozzuk, hogy a sűrűségfüggvény $f(x)$ -szel jelölt értéke ***semminek sem a valószínűsége***. Ennek a ténynek az elfogadását és megjegyzését segítheti, ha észbentartjuk: *a sűrűségfüggvény értéke lehet 1 -nél nagyobb is, ámde semilyen valószínűség értéke sem lehet 1 -nél nagyobb*. Mint néhány sorral feljebb már említettük, a sűrűségfüggvény értéke egy arány közelítő értékét jelenti.

Vetter András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egyenletes folytonos valószínűségi változó

1.4. Intervallum valószínűsége

Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$\mathrm{P}(\ a \ \leq \ X \ \leq \ b\ )$$

valószínűsége az $F(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásával adható meg:

$$\mathrm{P}(\ a \ \leq \ X \ \leq \ b\ ) \ = \ F(b) - F(a)$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig – a Newton-Leibniz szabály szerint – az $f(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett határozott integráljával egyenlő:

$$\mathrm{P}(\ a \ \leq \ X \ \leq \ b\ ) \ = \ F(b) - F(a) \ = \ \int_a^b f(x)\ dx$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a, b]$ intervallum helyett a nyílt (a, b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$\mathrm{P}(\ a \ < \ X \ < \ b\ ) \ = \ F(b) - F(a) \ = \ \int_a^b f(x)\ dx$$

1.5. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x) \ = \ \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész és és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}(\ (\ -\infty\ ;\ x\ )\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ (\ x\ ;\ +\infty\ )\ ) \ = \ \frac{1}{2}$$

Ilyenkor az x számot **medián**nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimmetrikus valamilyen pontra, a szimmetriapont a mediánja.

Megjegyzés. Bár gyakorlati jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy a $(\ -\infty\ ;\ x_1\ )$ és az $(\ x_2\ ;\ +\infty\ )$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallum minden pontja medián.

1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás és 0 és 1 közötti akármilyen p esetén az

$$F(x) \ = \ p$$

Szeitl – Antalás – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész valószínűsége p , és a tőle jobbra lévő rész valószínűsége $(1-p)$:

$$\mathrm{P}(\,(-\infty\,;\,x\,)\,) \;=\; p \qquad\qquad \mathrm{P}(\,(\,x\,;\,+\infty\,)\,) \;=\; 1-p$$

Ilyenkor az x számot **a** p **értékhez tartozó kvantilis**nek, vagy rövidebben mondva p **-kvantilis**nek nevezzük. Azt a függvényt, ami a 0 és 1 közötti p számokhoz hozzárendeli a p-kvantilis értékét, **kvantilis függvény**nek nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy *a* p *-kvantilis értéke megegyezik az eloszlásfüggvény inverzének a* p *helyen vett értékével:*

$$p\text{-kvantilis} \;=\; F^{-1}(p)$$

Tehát *a kvantilis függvény megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével.*

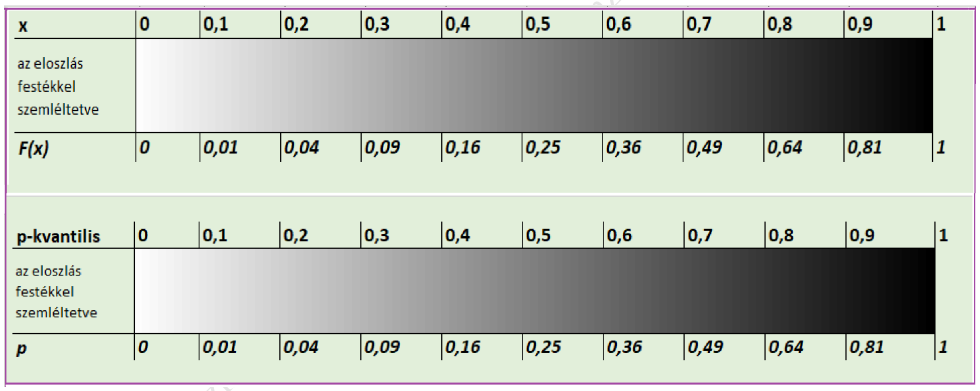
Az alábbi ábrán az

$$f(x) \;=\; 2x \quad (0 \;<\; x \;<\; 1\,) \quad \text{sűrűségfüggvényű}$$

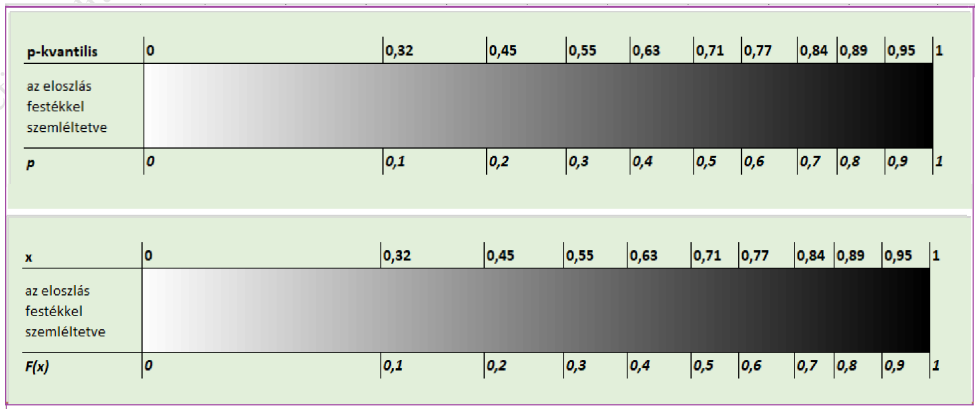
,

$$F(x) \;=\; x^2 \quad (0 \;<\; x \;<\; 1\,) \quad \text{eloszlásfüggvényű}$$

eloszlással kapcsolatban szemléltetjük az eloszlásfüggényt, illetve annak inverzét, a kvantilis függvényt:



1. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei*



2. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei (más számokkal)*

A szóbanforgó eloszlásra a kvantilis függvény képletét így adhatjuk meg: $F^{-1}(p) = \sqrt{p} \quad (0 < p < 1)$.

Vegyük észre, hogy tetszőleges eloszlásra $p = 0.5$ *esetén a* p*-kvantilis éppen a medián*. A 0.25 -kvantilis neve: **alsó kvartilis**, a 0.75 -kvantilis neve: **felső kvartilis**. (Figyelem: a kvantilis és kvartilis szavak csak egyetlen betűben különböznek. Ne keverjük őket össze!) Az ábrán szemléltetett eloszlásra

- az alsó kvartilis $\sqrt{0.25} = 0.5$,
- a medián $\sqrt{0.5} \approx 0.71$,
- a felső kvartilis $\sqrt{0.75} \approx 0.87$.

Azok, akik törtek helyett százalékokban szeretnek gondolkodni, a p -kvantilis helyett a megfelelő százalék értéket és **percentilis**t mondhatnak. Például:

- 0.1 -kvantilis helyett 10 százalékos percentilist,
- 0.9 -kvantilis helyett 90 százalékos percentilist,
- 0.99 -kvantilis helyett 99 százalékos percentilist

lehet mondani.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel

2.1. Szemléltetés festékkel (tömeggel)

A folytonos valószínűségi változókat modellező *folytonos eloszlások* fogalmának megértése nem könnyű. Sok embernek nehézséget okoz. Remélhetőleg segít, hogy az alábbiakban a *folytonos eloszlás*okat **tömegeloszlások, festékeloszlások** segítégével szemléltetjük.

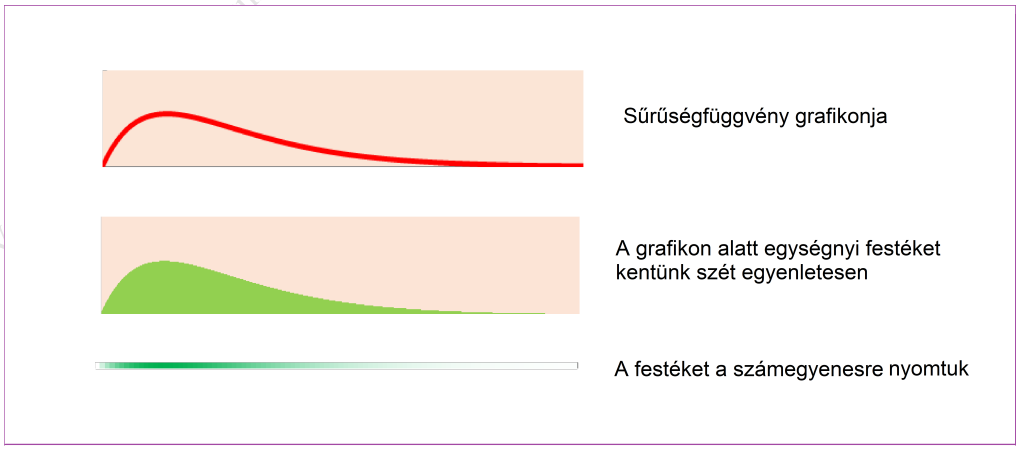
A tömegsűrűség fogalma fizikából ismert. Igaz, leginkább a (3-dimenziós) térben vett sűrűség fogalmát szoktuk meg, de a felületi és a vonal menti sűrűségről is hallhattunk, talán tanultunk is. Ha nem, akkor "jobb most, mint soha".

Ha egy valószínűségszámítási probléma kapcsán egy (1-dimenziós) folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényével van dolgunk, könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a számegyenesen, aminek a vonal (itt a vonal a számegyenes) menti sűrűségét a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le: minden x -re teljesül, hogy az x helyen a tömegsűrűség $f(x)$. Ilyen tömegeloszlást az alábbiak szerint elő is állíthaunk egy "úthenger" segítségével.

Rajzoljuk le az $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonját az (x, y) síkon. A grafikon alatti terület 1 -gyel egyenlő. Kérjünk meg egy szépen dolgozó festő mestert, hogy a grafikon alatti tartományon egyenletesen kenjen el egységnyi össztömegű festéket. A jó festő ezt tökéletesen megcsinálja. Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a tartomány minden részhalmazára annyi festék kerül, mint amekkora a részhalmaz területe. És akkor most jöjjön az úthenger, és a tartományra kent festéket az y tengellyel párhuzamos préseléssel nyomja az x tengelyre! Jobb lenne talán úgy mondani, hogy nyomja az x tengely***be***! A préselés eredményeként a számegyenesen (az x -tengelyen) egy tömegeloszlást kapunk, ami festékből készült, és így a szín árnyalat jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább a festék. Nyilvánvaló (tessék meggondolni!), hogy a számegyenes minden x pontjában a vonalmenti tömegsűrűség éppen $f(x)$.

Természetesen mindezt csak gondolatban lehet megcsinálni, hiszen a valóságban nem lehet a 0 vastagságú egyenesre (egyenes***be***) tömeget préselni. De a fantáziánk – remélhetőleg – elbírja a leírtakat.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme: amikor a könyv következő részében a többdimenziós eloszlásokról fogunk tanulni, akkor egzakt módon is beláthatjuk, hogy egy $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonja alatti síktartományon vett egyenletes eloszlás vetülete az x -tengelyen olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x)$.



3. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés festékkel*

Vegyük észre, hogy

- egy intervallum valószínűsége megfelel az intervallumon lévő tömeg mennyiségének,
- a medián megfelel annak a pontnak, amire igaz az, hogy tőle jobbra is és balra is $\frac{1}{2}$ mennyiségű tömeg van.

A várható érték, a második momentum, a variancia fogalmát egyelőre még csak diszkrét eloszlásokra vettük, folytonosakra majd csak később tanuljuk, de előrebocsátjuk, hogy a folytonos esetre is igaz, hogy

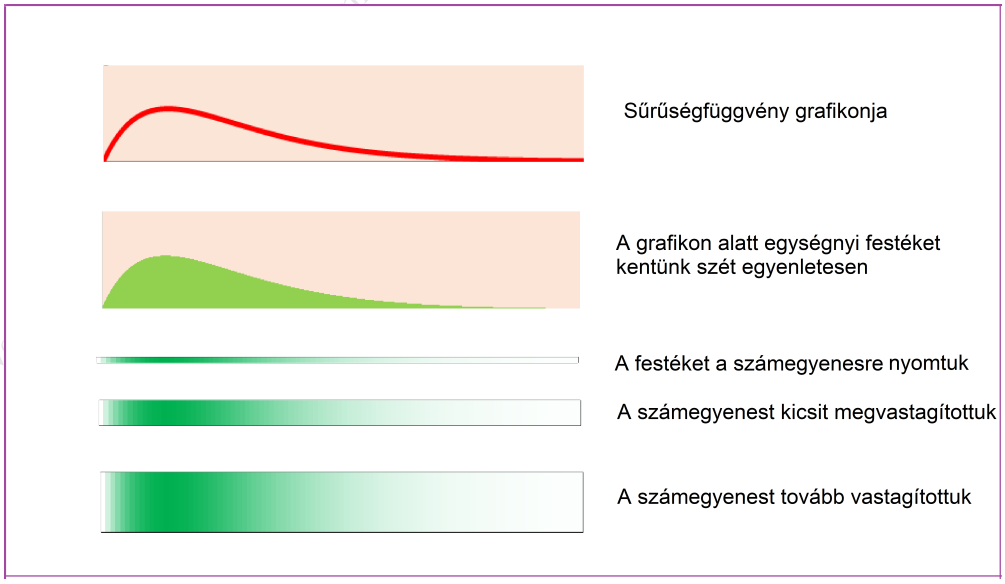
- a várható érték megfelel a tömegeloszlás súlypontjának,
- egy c pontra vonatkozó második momentum megfelel a tömegeloszlás c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának,
- a variancia pedig megfelel a tömegeloszlásnak a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának.

2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen

A könnyebb szemléltethetőség kedvéért a 0 vastagságú számegyenest érdemes kicsit "megvastagítani", azaz az egyenes helyett egy keskeny sávot venni, és sávon elképzelni a festéket úgy, hogy

- a sávon belül minden függőleges szakasz mentén a (síkbeli) sűrűség állandó legyen, tehát
- a (síkbeli) sűrűség csak x -től függjön úgy, hogy
- x -irányban az adott $f(x)$ függvény szerint változzon, vagyis
- minden (x, y) pontban a festék (síkbeli) sűrűsége $f(x)$ -szel legyen egyenlő.

Ennél a szemléltetésnél a megvastagított számegyenes vastagságának, a sáv szélességének nincs jelentősége. Ha a sáv keskeny, akkor jobban hasonlít, jobban emlékeztet a 0 vastagságú igazi számegyenesre. De ha a sávot nagyon keskenyre vesszük, akkor a szétkent festék sáűrűsége, színárnyalata nem látszik túl jól. Izlés dolga, hogy milyen széles sávot veszünk a 0 vastagságú igazi számegyenes helyett. E könyv szerzője szerint valahol fél és egy centiméter között van a legjobb szélesség.



4. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés a megvastagított sávon festékkel*

2.2. Szemléltetés pontfelhővel

2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen

Örvendetes és fontos tény, hogy egy folytonos valószínűségi változó eloszlását szemléltető tömeg- vagy festékeloszlást a valószínűségi változóra végzett kísérleti eredményekből lehet közelíteni. Eléggé kézenfekvő ötlet a következő: sok kísérletet végzünk a valószínűségi változóra, és a számegyenesen a kísérleti eredményeknek megfelelő pontokba apró korongokat rajzolunk, illetve rajzoltatunk a számítógéppel. Természetesen a korongocskák ott lesznek sűrűbben, ahol a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értéke nagyobb, és ott lesznek ritkábban, ahol a sűrűségfüggvény értéke kisebb.

Azonban ezzel az egyszerű módszerrel gondok lépnek fel:

1. Ha kevés kísérletet végzünk, és így kevés korongocskát rakunk ki, akkor nem igazán lehet megmondani, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.

2. Ha sok korongot teszünk a számegyenesre, akkor a korongok átfedik egymást, egybe olvadnak és a korongocskákból egy semmitmondó megvastagodott számegyenest kapunk. A számegyenes szinte mindenhol olyan vastag lesz, mint a korongocskák átmérője, és megint nem lehet látni, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.

2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban

A korongok átfedésének gondja drasztikusan lecsökken, szinte meg is szűnik, ha a korongokat nem a számegyenesre rakjuk, hanem egy keskeny sávba, melyet a számegyenes fölött veszünk fel. Ha a számegyenes a papíron, vagy a képernyőn vízszintes, akkor a kísérleti eredmények adják a korongok közepének a vízszintes koordinátáit, a függőleges koordinátákat pedig az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- ha mondjuk 1000 kísérleti eredményünk van, akkor
  az első korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1}{1000}$ -ed része,
  a második korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{2}{1000}$ -ed része,
  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{3}{1000}$ -ed része,
  és így tovább,
  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1000}{1000}$ -ed része,

  vagy

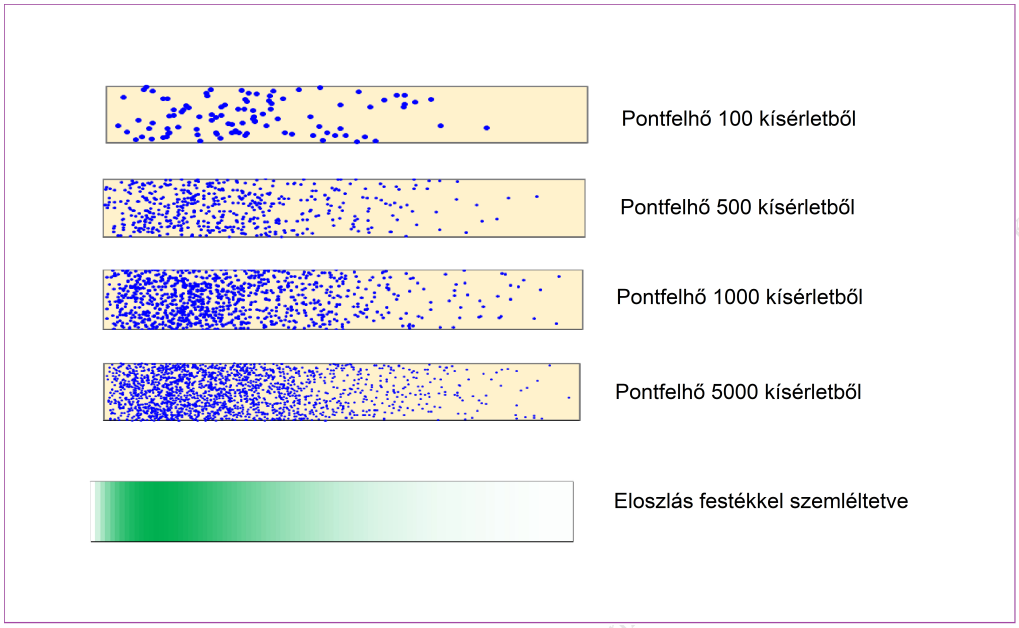
- minden korong függőleges koordinátáját úgy állítjuk elő, hogy a sáv szélességét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmmal.

A két lehetőség mindegyike ugyanazt a szép és látványos eredményt adja:

- a sávban keletkező pontfelhő sűrűsége ránézésre jól érzékelhető, jól értelmezhető,
- függőleges irányban a sűrűség mindenhol állandó, ezért nem is kell a függőleges iránnyal törődni,
- a valójában kétdimenziós ábrát úgy értelmezhetjük, mintha egydimenziós ábra lenne, mintha a 0 vastagságú számegyenes csak éppen megvastagodott volna,
- vízszintes irányban a pontfelhő sűrűsége tökéletesen követi a valószínűségi változó elméleti sűrűségfüggvényét.

Vetier András - Valószínűségszámítás - 2. fejezet: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a pontfelhő annak a folytonos festékeloszlásnak a benyomását adja, melyet a "Festék a megvastagított számegyenesen" című alpontban készítettünk:



5. ábra. *Pontfelhő és festék a megvastagított számegyenesen*

2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt

Továbbra is az $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{1000}$ kísérleti eredmények adják a korongok közepeinek a vízszintes koordinátáit, de a függőleges koordinátákatt az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- az első korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_1) \cdot \frac{1}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_1 helyen szorozva $\frac{1}{1000}$ -del,

  a második korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_2) \cdot \frac{2}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_2 helyen szorozva $\frac{2}{1000}$;-del,

  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_3) \cdot \frac{3}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_3 helyen szorozva $\frac{3}{1000}$ -del,

  és így tovább,

  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_{1000} helyen szorozva $\frac{1000}{1000}$ -del,

  tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

$$\left(X_1 \, , \, f(X_1) \cdot \frac{1}{1000} \right)$$

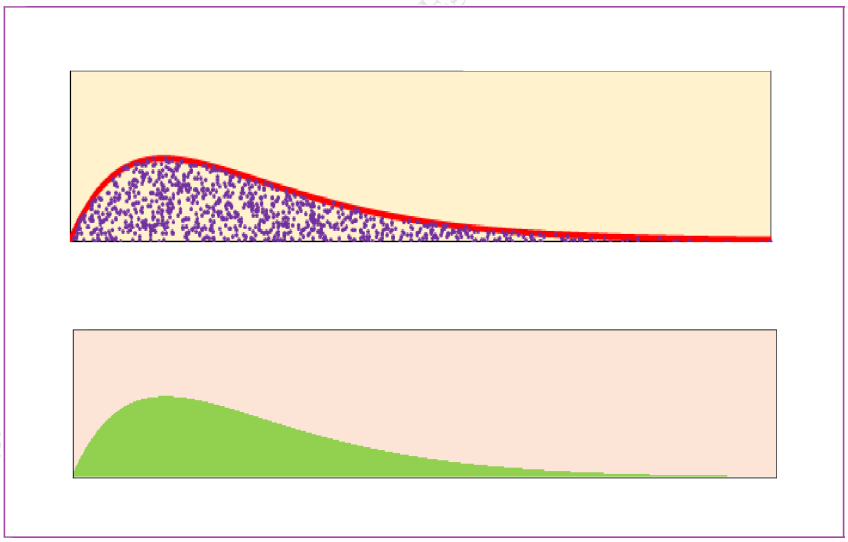
$$\left(X_2 \, , \, f(X_2) \cdot \frac{2}{1000} \right)$$
$$\left(X_3 \, , \, f(X_3) \cdot \frac{3}{1000} \right)$$
$$\vdots$$
$$\left(X_{1000} \, , \, f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000} \right)$$

vagy

- mindent ugyanúgy csinálunk, mint az előbb, de a függőleges koordinátákat úgy állítjuk elő, hogy a sűrűségfüggény értékét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmmal, tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

$$(X_1 \, , \, f(X_1) \cdot \text{RND}_1)$$
$$(X_2 \, , \, f(X_2) \cdot \text{RND}_2)$$
$$(X_3 \, , \, f(X_3) \cdot \text{RND}_3)$$
$$\vdots$$
$$(X_{1000} \, , \, f(X_{1000}) \cdot \text{RND}_{1000})$$

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a sűrűségfüggvény grafikonja alatt olyan pontfelhőt kapunk, melynek síkbeli sűrűsége egyenletes, mintha valaki a sűrűségfüggvény alatti síkrészt véletlenszerűen, de egyenletesen pöttyözné be.



6. ábra. *Pontfelhő és egyenletesen szétkent festék a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*

A módszer egzakt háttere: Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az

$$(X \, , \, f(X) \cdot \text{RND})$$

kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlást követ az $f(x)$ grafikonja alatti síktartományon.

A következő fejezetben a legfontosabb folytonos eloszlásokkal kapcsolatban

- megadjuk a sűrűségfüggvény grafikonját,
- szemléltetjük az eloszlást festékkel,
- ábrázolunk egy pontfelhőt a megvastagított számegyenesen
- és egy pontfelhőt a sűrűségfüggvény grafikonja alatt is,
- és végül lerajzoljuk az eloszlásfüggvény grafikonját.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

3. Random számok transzformációi

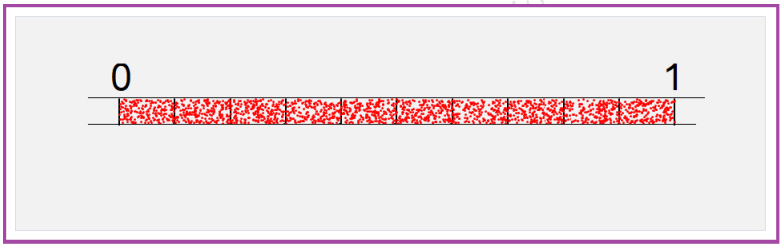
Számítógép által generált random számokkal bárki kísérletezhet, játszadozhat. A játékon túlmenően a random mind tudományos, mind gyakorlati szempontból is fontosak, hasznosak. Ezért először ilyen példákat veszünk.

3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka

Először csak ábrákkal mutatjuk be, hogy mi történik, ha random számokat négyzetre emelünk, vagy gyököt vonunk belőlük, vagy reciprokaikat vesszük. Ezek után következnek majd az egyszerű elméleti számolások. Tessék az ábrákat nézegetni, random számokkal számítógépen kísérletezni, utána pedig az elméleti számolásokat megérteni!

3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel

Ha számítógéppel generálunk 1000 random számot, és azokat a megvastagított számegyenesen ábrázoljuk, akkor egyenletes eloszlású pontfelhőt kapunk:

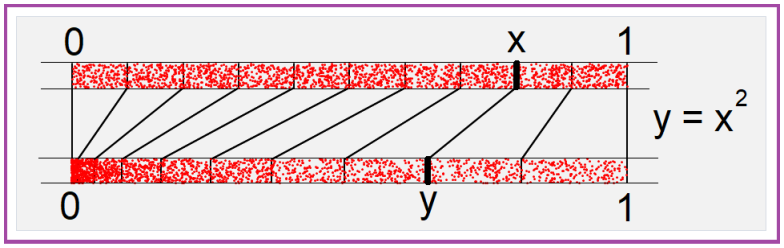


7. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő a* $[\,0\,,\,1\,]$ *intervallumon*

1. Példa: Random szám négyzete

$$Y = \mathrm{RND}^2$$

Ha az 1000 random szám mindegyikét négyzetre emeljük, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a négyzetre emelést megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:

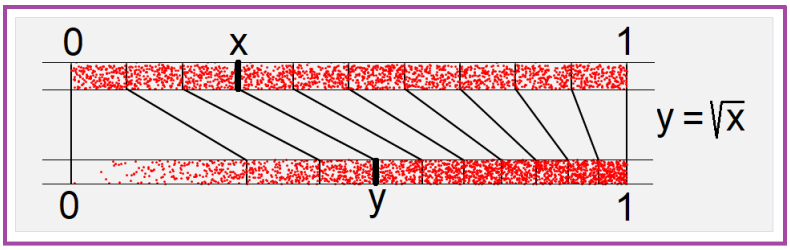


8. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$Y \;=\; \sqrt{\mathrm{RND}}$$

Ha az 1000 random szám mindegyikéből gyököt vonunk, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a gyökvonást megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:

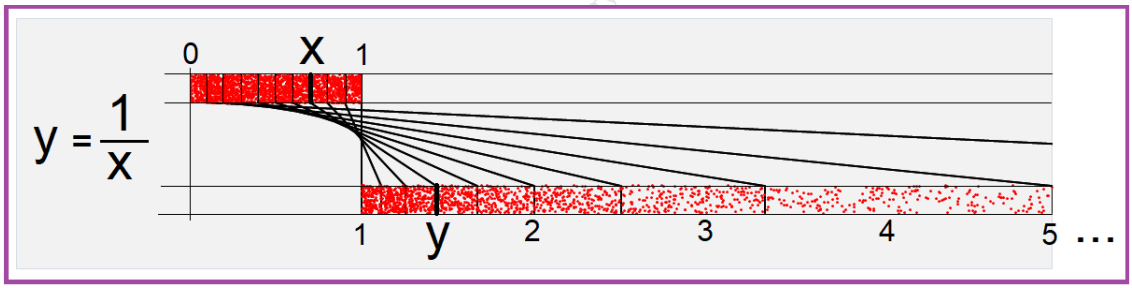


9. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

3. Példa: Random szám reciproka

$$Y \;=\; \frac{1}{\mathrm{RND}}$$

Ha az 1000 random szám mindegyikének a reciprokát vesszük, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a reciprok képzést megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:



10. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a reciprok függvénnyel*

Vetter András – Valószínűségszámítás folytonos valószínűségi változók

3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Mivel a most következő számításokban többször is felhasználjuk, itt kihangsúlyozzuk a tényt:

$$0 \;<\; z \;<\; 1 \qquad \text{esetén} \qquad \mathrm{P}\,(\,\mathrm{RND} \;\leq\; z\,) \;=\; z$$

1. Példa: Random szám négyzete

$$Y \;=\; \mathrm{RND}^2$$

Eloszlásfüggvény:

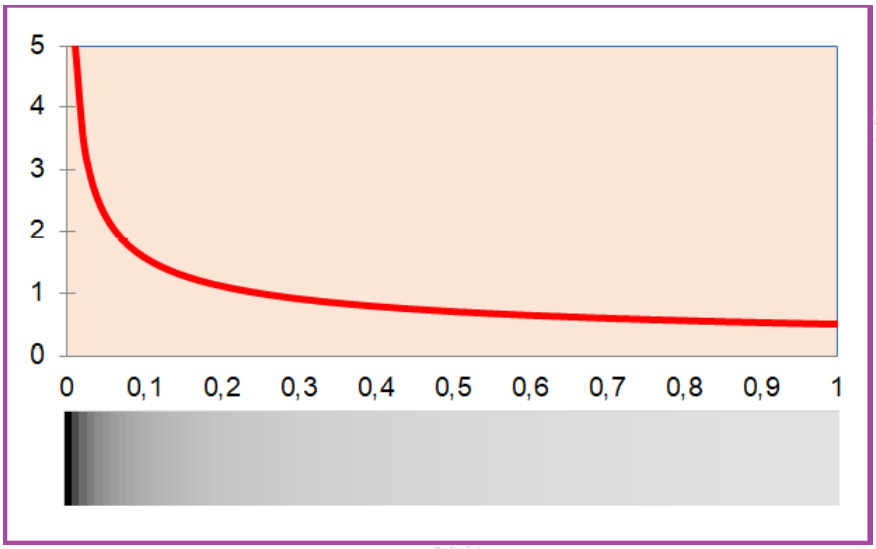
$$G(y) \;=\; \sqrt{y} \qquad \text{ha} \quad 0 \;<\; y \;<\; 1$$

Sűrűségfüggvény:

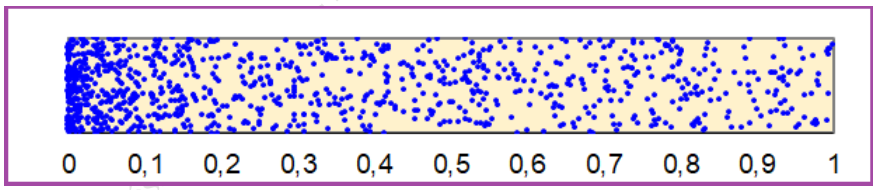
$$g(y) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{ha} \;\; 0 \;<\; y \;<\; 1$$

Tehát egy $[\,a\,;\,b\,]$ intervallum valószínűsége:

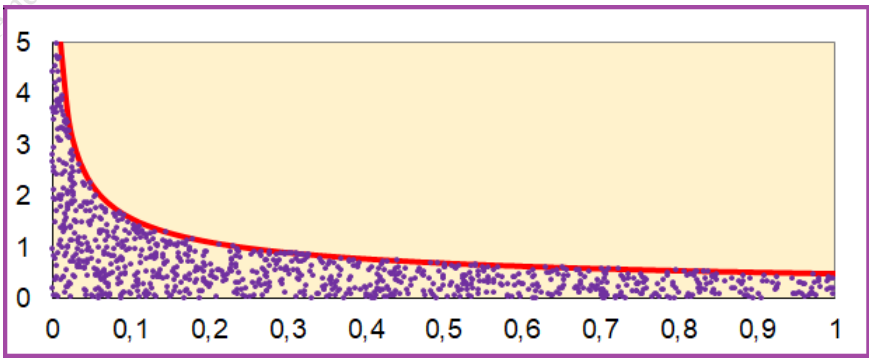
$$\mathrm{P}(\,a \;\le\; Y \;\le\; b\,) \;=\; \sqrt{b} - \sqrt{a} \;=\; \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{y}}\;dy \qquad \text{ha} \;\; 0 \;\le\; a \;<\; b \;\le\; 1$$



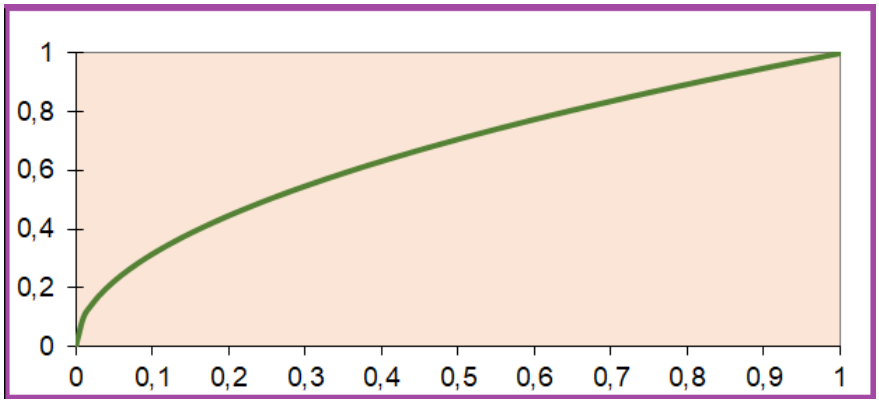
11. ábra. *Random szám négyzete: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



12. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



13. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



14. ábra. *Random szám négyzete: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = \text{RND}^2$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < y < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \text{P}(\, Y \le y \,) = \text{P}\left(\, \text{RND}^2 \le y \,\right) = \text{P}(\, \text{RND} \le \sqrt{y} \,) = \sqrt{y} \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = (\, \sqrt{y} \,)' = \left(y^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}\left(y^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$Y = \sqrt{\text{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = y^2 \qquad \text{ha } \; 0 < y < 1$$

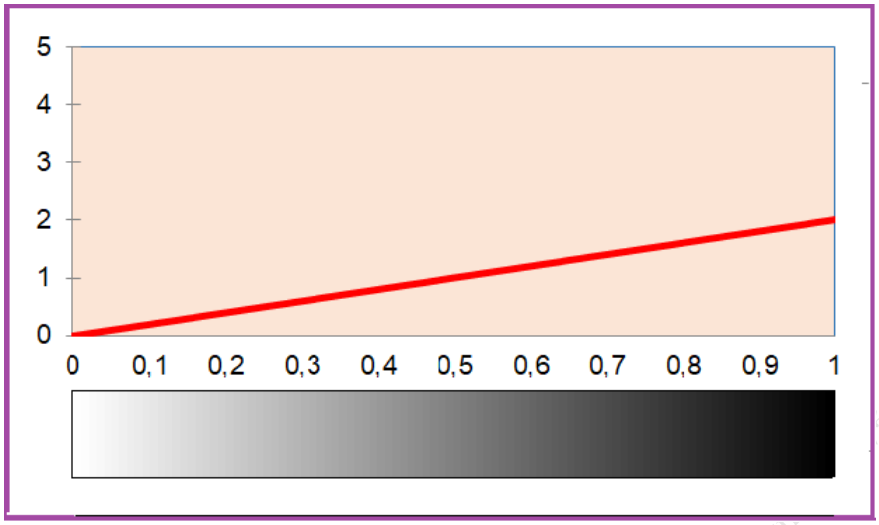
Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = 2y \qquad \text{ha } \; 0 < y < 1$$

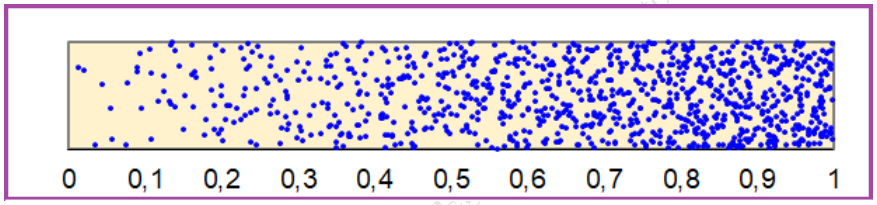
Tehát egy $[\, a \,;\, b \,]$ intervallum valószínűsége:

$$\text{P}(\, a \le Y \le b \,) = b^2 - a^2 = \int_a^b 2y \; dy \qquad \text{ha } \; 0 \le a < b \le 1$$

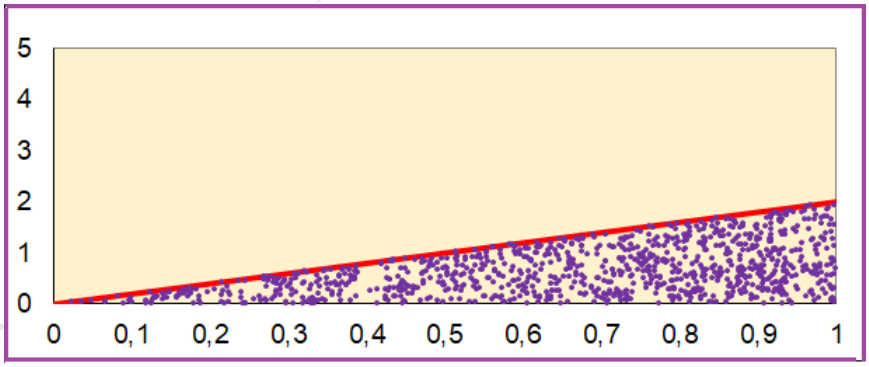
Vetier Antonás – Valószínűségszámítás – 3. részt: egydimenziós folytonos valószínűségi változók



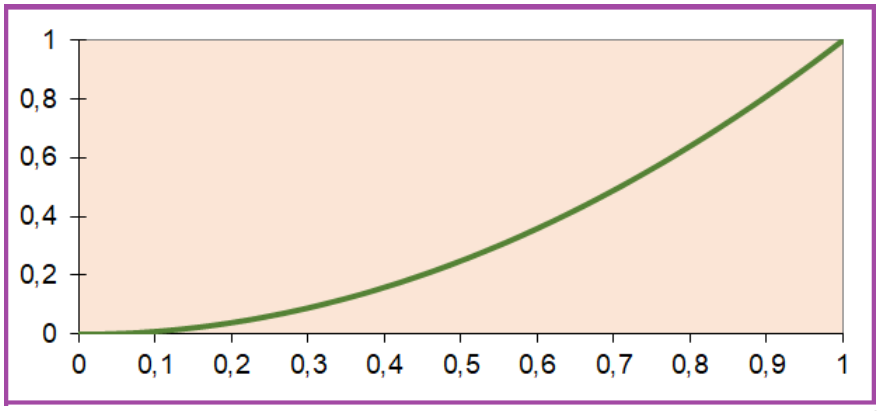
15. ábra. *Random szám négyzetgyöke: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



16. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



17. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



18. ábra. *Random szám négyzetgyöke: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = \sqrt{\text{RND}}$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < y < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \text{P}(\, Y \le y \,) = \text{P}\left(\sqrt{\text{RND}} \le y \right) = \text{P}\left(\text{RND} \le y^2 \right) = y^2 \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = \left(y^2 \right)' = 2y \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

3. Példa: Random szám reciproka

$$Y = \frac{1}{\text{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = 1 - \frac{1}{y} \qquad \text{ha } \ 1 < y < \infty$$

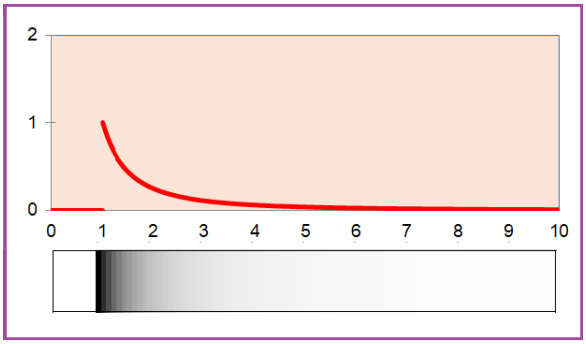
Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = \frac{1}{y^2} \qquad \text{ha } \ 1 < y < \infty$$

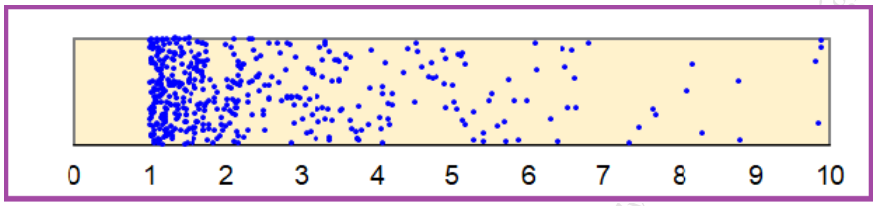
Tehát egy $[\, a \,;\, b \,]$ intervallum valószínűsége:

$$\text{P}(\, a \le Y \le b \,) = \left(1 - \frac{1}{b} \right) - \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \int_a^b \frac{1}{y^2} \, dy \qquad \text{ha } \ 1 \le a < b < \infty$$

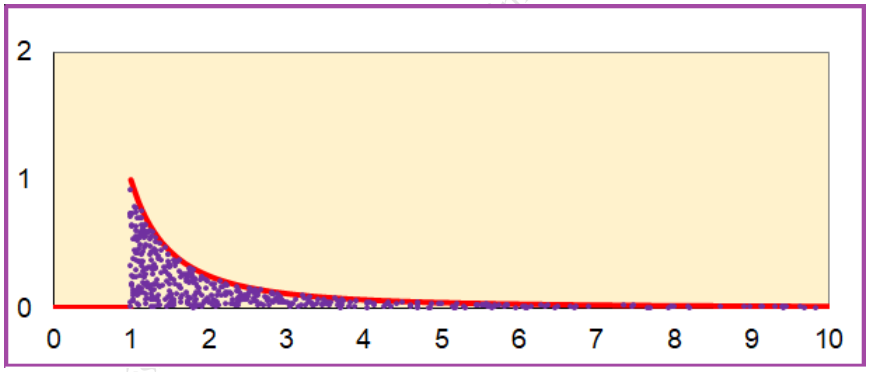
Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók



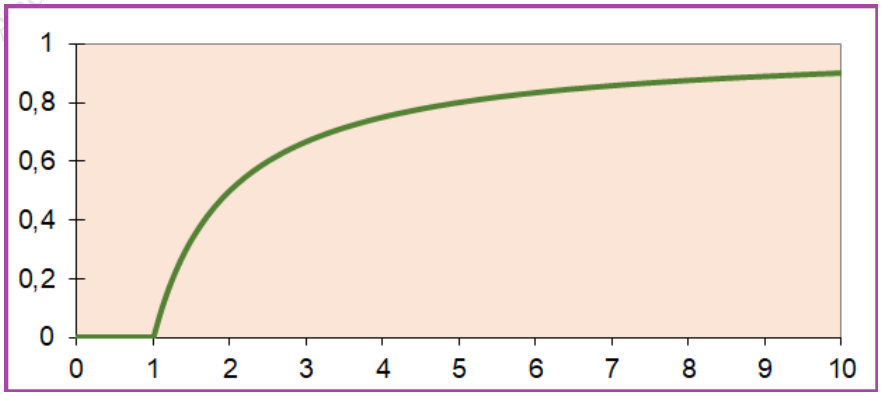
19. ábra. *Random szám reciproka: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



20. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



21. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



22. ábra. *Random szám reciproka: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = 1/\text{RND}$ lehetséges értékei az $(1, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $1 < y < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \text{P}(Y \le y) = \text{P}\left(\frac{1}{\text{RND}} \le y\right) = \text{P}\left(\frac{1}{y} \le \text{RND}\right) = \text{P}\left(\text{RND} \ge \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{x} \qquad (y > 1)$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)' = \left(1 - y^{-1}\right)' = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \qquad (y > 1)$$

3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Ebben az alfejezetben olyan valószínűségi változókat fogunk vizsgálni melyeket két random számból származtatunk valamilyen művelettel. A vizsgált valószínűségi változót nem X -szel, hanem Z -vel fogjuk jelölni. Z eloszlásfüggvényének jele $R(z)$, sűrűségfüggvényének jele pedig $r(z)$ lesz. Mivel az $(\text{RND}_1, \text{RND}_2)$ véletlen pont az egységnégyzeten egyenletes eloszlást követ, egy vele kapcsolatos esemény valószínűsége területek hányadosaként számítható: a kedvező kimenelek halmazának a területét kell osztani a négyzet területével. A négyzet területe egyenlő 1 -gyel, ezért az osztástól el lehet tekinteni.

1. Példa: Random számok összege:

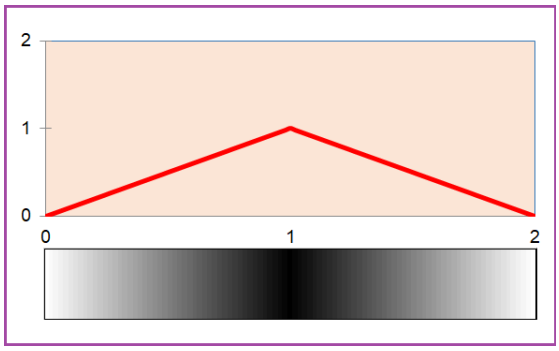
$$Z = \text{RND}_1 + \text{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

$$R(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{ha } 1 < z < 2 \end{cases}$$

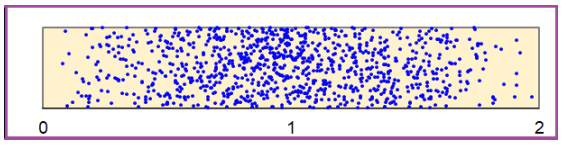
Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = \begin{cases} z & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 2 - z & \text{ha } 1 < z < 2 \end{cases}$$

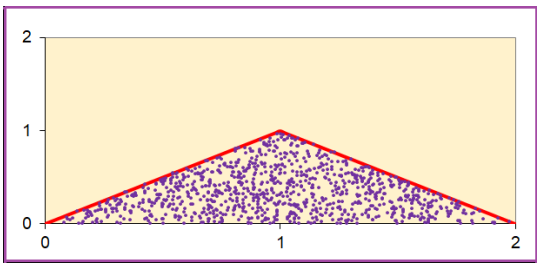


23. ábra. *Random számok összege: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*

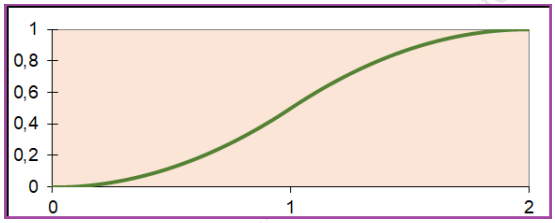
Vetier András – Valószínűségszámítás – 5. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók



24. ábra. *Random számok összege: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



25. ábra. *Random számok összege: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



26. ábra. *Random számok összege: eloszlásfüggvény*

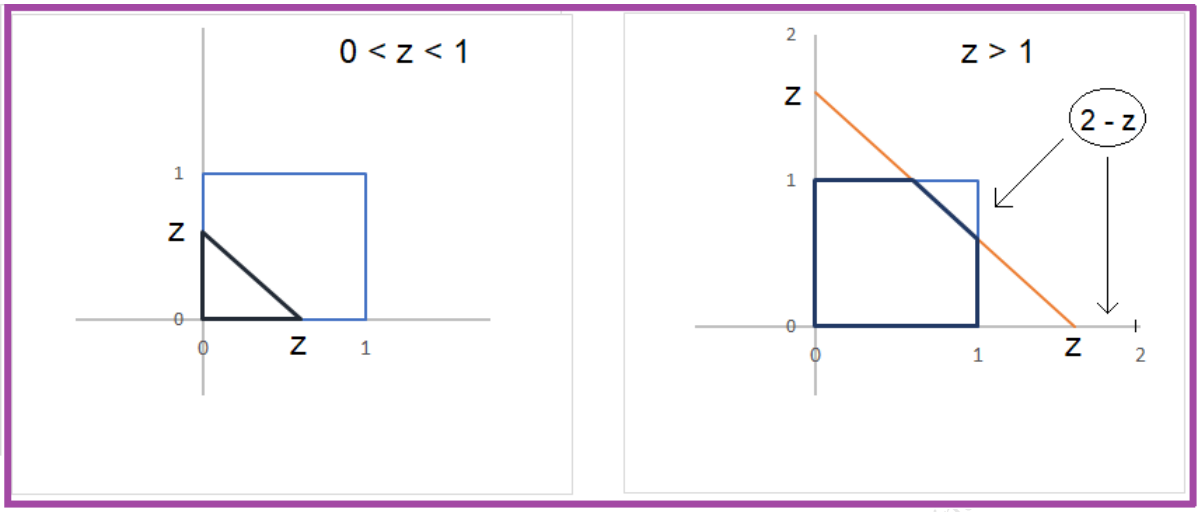
A képletek meghatározása: A $Z = \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $[\ 0\ ,\ 2\ ]$ intervallumot teszik ki, ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < 2$.

Eloszlásfüggvény:

$$R(z) = \mathrm{P}(\ Z \leq z\ ) = \mathrm{P}(\ \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 \leq z\ )$$

Az $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 \leq z$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $x + y = z$ egyenletű egyenes alatti rész jelenti, ami

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész. – Diskrétkonos valószínűségi változók



27. ábra. *$RND_1 + RND_2$ eloszlásfüfggvényének levezetése*

- $0 \le z \le 1$ esetén egy derékszögű háromszög, melynek befogói z hosszúságúak, így területe területe $\frac{z^2}{2}$,
- $1 \le z \le 2$ esetén pedig egy ötszög, melynek komplementere egy derékszögű háromszög $2-z$ hosszúságú befogókkal, $\frac{(2-z)^2}{2}$ területtel, így az ötszög területe $1-\frac{(2-z)^2}{2}$.

Ezért

$$R(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1-\frac{(2-z)^2}{2} & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = R'(z) = \begin{cases} (\frac{z^2}{2})' = z & \text{ha } 0 < z < 1 \\ (1-\frac{(2-z)^2}{2})' = 2-z & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

2. Példa: Random számok szorzata:

$$Z = \text{RND}_1 \cdot \text{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

$$R(z) = z - z\ln z \qquad \text{ha } 0 < z < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = -\ln z \qquad \text{ha } 0 < z < 1$$

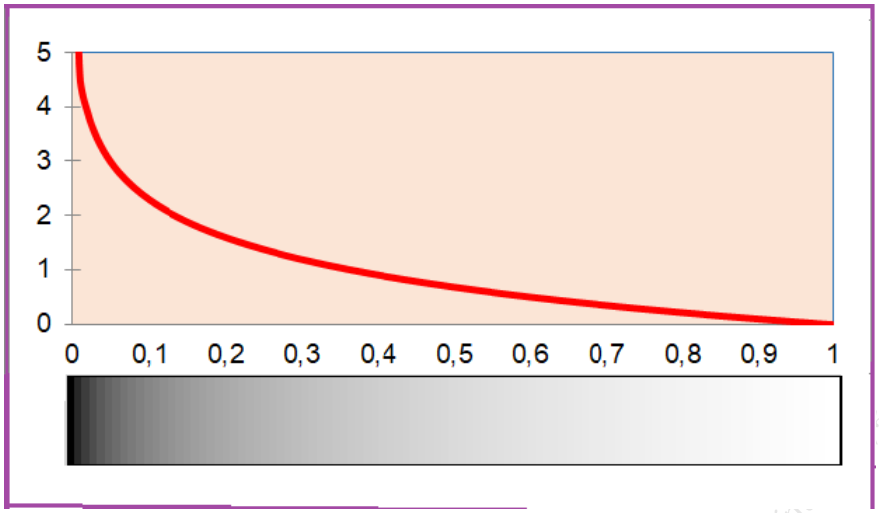
Tehát $0 \le a < b \le 1$ esetén az $[a\,;b]$ intervallum valószínűsége:

$$\text{P}(\,a \le Z \le b\,) = (\,b - b\ln b\,) - (\,a - a\ln a\,)$$

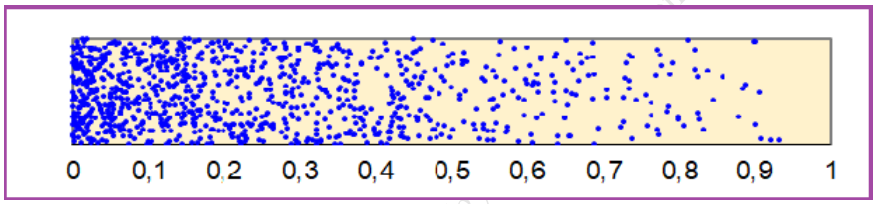
avagy

$$\text{P}(\,a \le Z \le b\,) = \int_a^b (\,-\ln z\,)\;dz$$

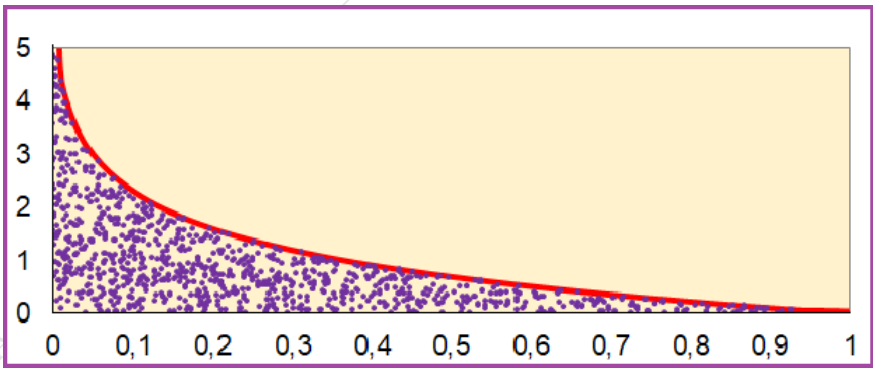
Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Egydimenziós folytonos valószín



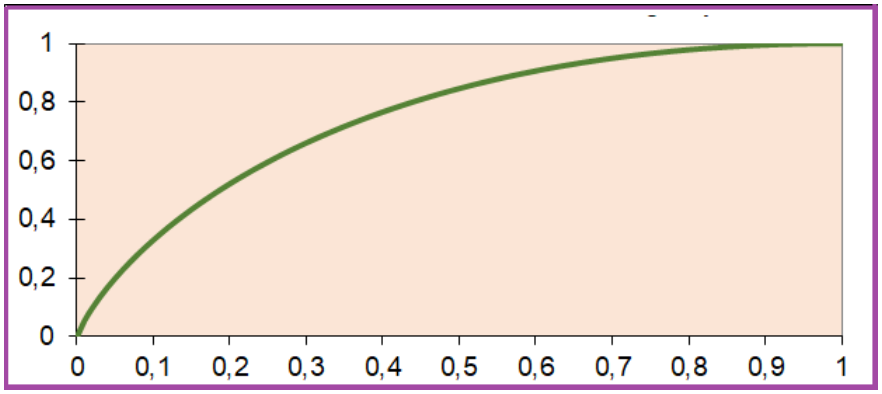
28. ábra. *Random számok szorzata: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



29. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



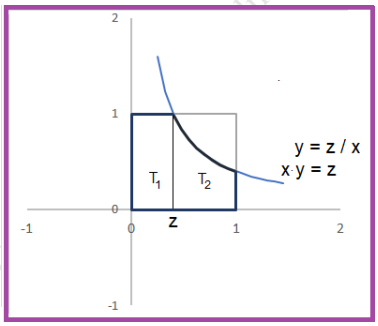
30. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



31. ábra. *Random számok szorzata: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: A $Z = \text{RND}_1 \cdot \text{RND}_2$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $(0, 1)$ intervallumot teszik ki, ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < 1$.

Eloszlásfüggvény: Most is a kedvező kimenelek halmazának a területet kell meghatároznunk. Az $\text{RND}_1 \cdot \text{RND}_2 \leq z$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $x \cdot y = z$ egyenletű hiperbola alatti részt jelenti, ami az x -tengely z abszcisszájú pontjában húzott függőleges szakasszal két részre bontható: a baloldali rész egy téglalap, a jobboldali rész pedig egy "trapéz jellegű" halmaz, melynek a "tetejét" a hiperbola alkotja. Az alábbi ábrán a téglalapot T_1 -gyel, a "trapéz jellegű" halmazt T_2 -vel jelöljük:



32. ábra. *$RND_1 \cdot RND_2$ eloszlásfüfggvényének levezetése*

T_1 területe nyilván z -vel egyenlő. T_2 területe pedig integrálással számítható ki:

$$\int_{x=z}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=z/x} 1 \, dy \right) dx = \int_{x=z}^{x=1} z/x \; dx = -z \ln z$$

A két tag összege éppen $R(z)$ -t adja.

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = F'(z) = (z - z \ln z)' = 1 - \ln z - z \frac{1}{z} = -\ln z \qquad (0 < z < 1)$$

3. Példa: Random számok hányadosa

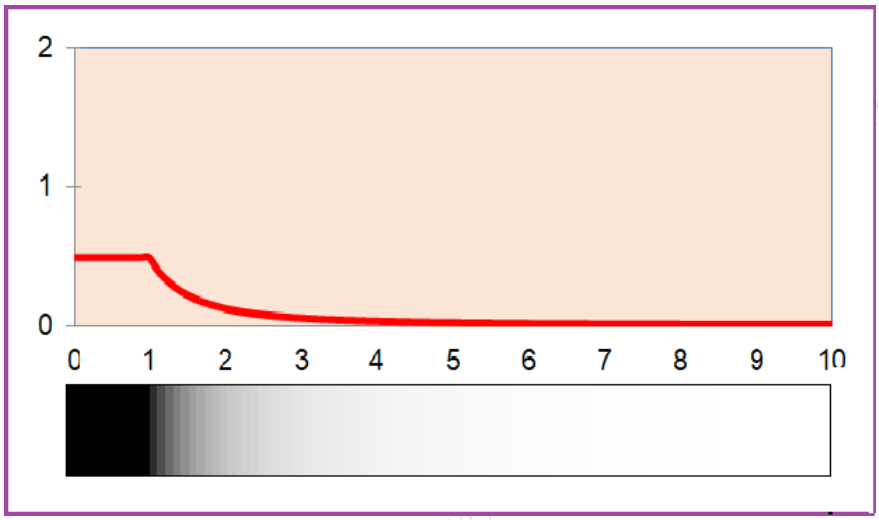
$$Z = \frac{\text{RND}_2}{\text{RND}_1}$$

Eloszlásfüggvény:

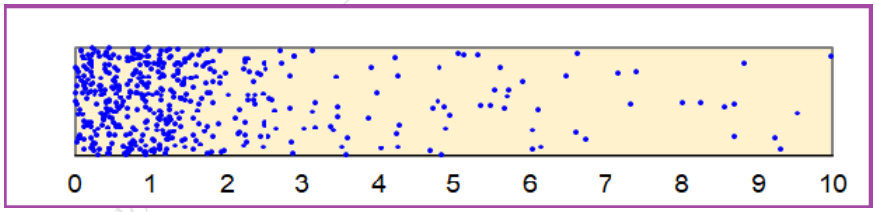
$$R(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & \text{ha} \quad 0 < z < 1 \\ 1 - \frac{1}{2z} & \text{ha} \quad z > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

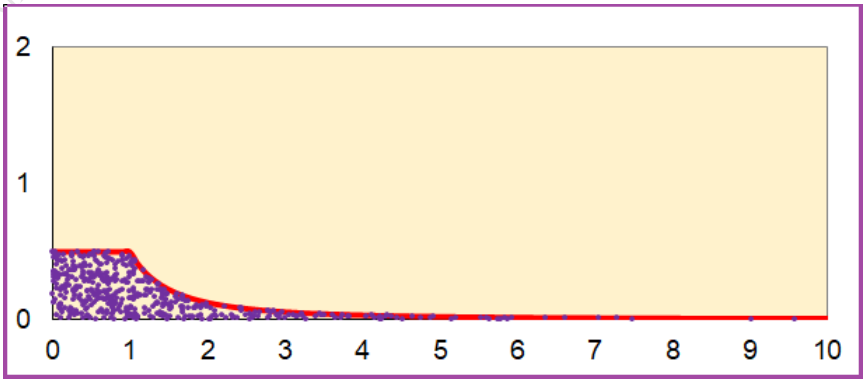
$$r(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha} \quad 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} & \text{ha} \quad z > 1 \end{cases}$$



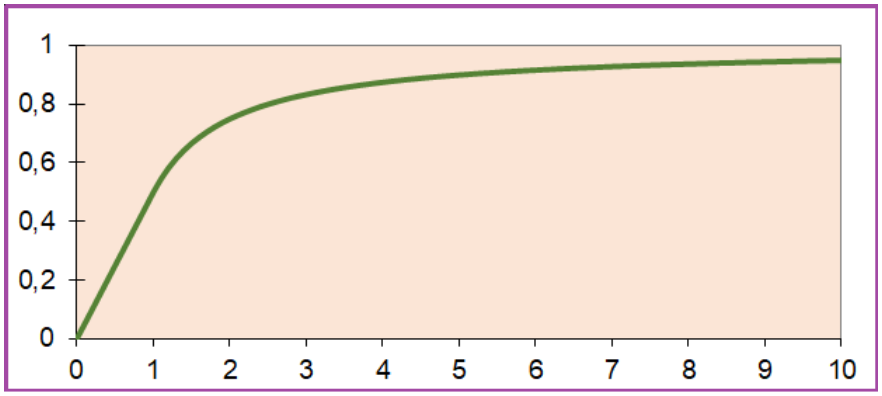
33. ábra. *Random számok hányadosa: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



34. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



35. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



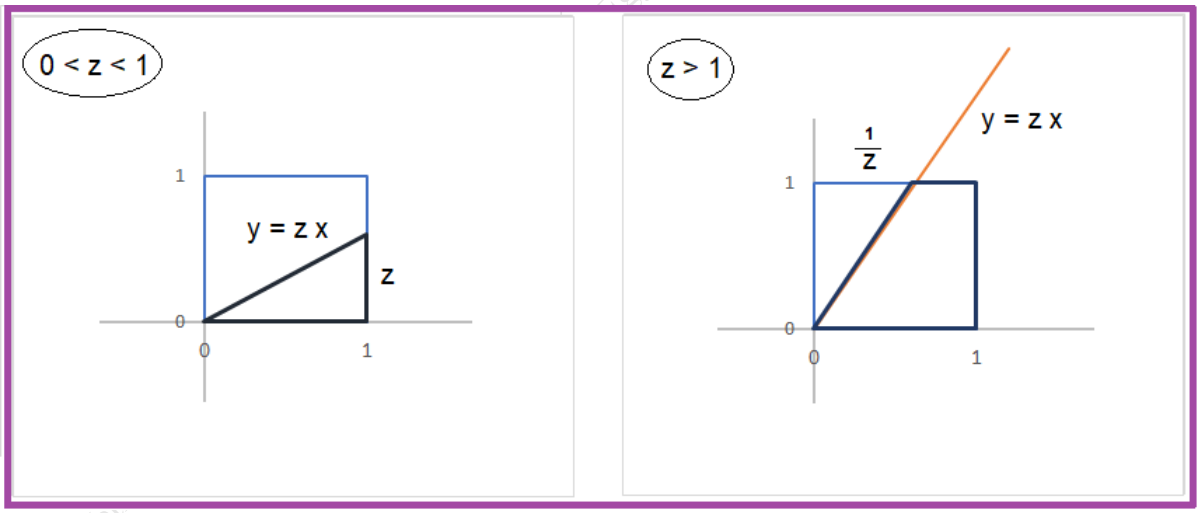
36. ábra. *Random számok hányadosa: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: A $Z = \mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $(0, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < \infty$.

Eloszlásfüggvény: Most is a kedvező kimenelek halmazának a területet kell meghatároznunk.

$$R(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \leq z) = \mathrm{P}(\mathrm{RND}_2 \leq z\,\mathrm{RND}_1)$$

Az $\mathrm{RND}_2 \leq z\,\mathrm{RND}_1$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $y = z \cdot x$ egyenletű egyenes alatti részt jelenti, ami $0 < z < 1$ esetén egy háromszög, $z > 1$ esetén egy trapéz:



37. ábra. *RND_2/RND_1 eloszlásfüfggvényének levezetése*

Két esetet kell most szétválasztanunk:

1. eset: $z \leq 1$. A háromszög területe nyilván $z/2$. Ezért

$$R(z) = z/2$$

2. eset: $z > 1$. A trapéz komplementere egy háromszög, melynek területe $1/(2z)$. Ezért

$$R(z) = 1 - 1/(2z)$$

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) \;=\; F'(z) \;=\; \begin{cases} (\frac{z}{2})' \;=\; \frac{1}{2} & \text{ha} \;\; 0 \;<\; z \;<\; 1 \\ (1-\frac{1}{2z})' \;=\; \frac{1}{2z^2} & \text{ha} \;\; z \;>\; 1 \end{cases}$$

3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése

Két példát is mutatunk arra, hogy hogyan lehet a sűségfüggvényt közvetlenül meghatározni az eloszlásfüggvény kiszámolása nélkül. Számításaink minkét esetben arra épülnek, hogy az $(\;\text{RND}_1\,,\,\text{RND}_2\;)$ kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlást követ az egységnyi területű

$$\{\;(x,y):\;\; 0 \;\le\; x \;\le\; 1\;,\;\; 0 \;\le\; y \;\le\; 1\;\}$$

négyzetben.

3.3.1. Random számok összege

Ebben a részben a

$$Z \;=\; \text{RND}_1 + \text{RND}_2$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét vezetjük le. A sűrűség

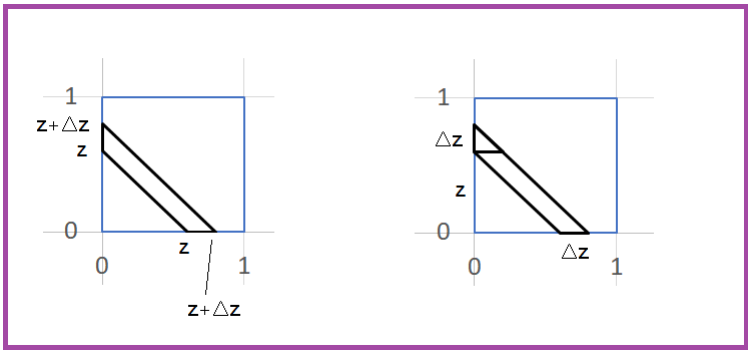
$$r(z) \;\approx\; \frac{\text{P}(\;\; z \;\le\; Z \;\le\; z+\Delta z\;\;)}{\Delta z}$$

jelentéséből indulunk ki, ahol Δz egy pici pozitív értéket jelöl. Két esetet tekintünk:

1. eset: $0 \;\le\; z \;\le\; 1\,.$
A számlálóban álló $z \;\le\; Z \;\le\; z+\Delta z$ eseménynek megfelel a négyzet

$$z \;\le\; x+y \;\le\; z+\Delta z$$

egyenlőtlenségekkel definiált részhalmazának. Ez egy trapéz, amit az alábbi ábra bal oldalán vastagítva láthatunk:



38. ábra. *Balra: a trapéz. Jobbra: a trapéz felbontása egy paralellogramma és egy háromszög egyesítésére*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez a trapéz előáll egy paralellogramma és egy háromszög egyesítéseként. A paralellogramma alapjának hossza Δz , magassága z , ezért területe $z \cdot \Delta z$. A háromszög egy derékszögű háromszög Δz hosszúságú befogókkal, ezért területe $\frac{(\Delta z)^2}{2}$. Így a trapéz területe

$$z \cdot \Delta z \; + \; \frac{(\Delta z)^2}{2}$$

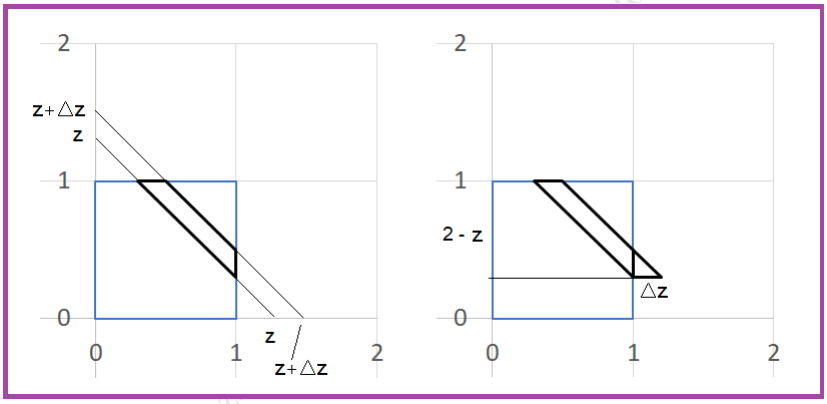
ami egyben a fenti tört számlálójában álló valószínűséggel is egyenlő. Ezért

$$r(z) \; \approx \; \frac{z \cdot \Delta z \; + \; \frac{(\Delta z)^2}{2}}{\Delta z} \; = \; z \; + \; \frac{\Delta z}{2} \; \approx \; z$$

2. eset: $1 \; \leq \; z \; \leq \; 2$.
A számlálóban álló $z \; \leq \; Z \; \leq \; z + \Delta z$ eseménynek megfelelő,

$$z \; \leq \; x + y \; \leq \; z + \Delta z$$

egyenlőtlenségekkel definiált részhalmaz most is egy trapéz, csak máshol helyezkedik el a négyzetben. Az alábbi ábra bal oldalán vastagítva láthatjuk:



39. ábra. *Balra:* ***a trapéz*** *. Jobbra: a trapéz előállítása egy paralellogramma és egy háromszög különbségeként*

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez a trapéz előáll egy paralellogramma és egy háromszög különbségeként. A paralellogramma alapjának hossza Δz , magassága $2 - z$, ezért területe $(2 - z) \cdot \Delta z$. A háromszög egy derékszögű háromszög Δz hosszúságú befogókkal, ezért területe $\frac{(\Delta z)^2}{2}$. Így a trapéz területe

$$(2 - z) \cdot \Delta z \; - \; \frac{(\Delta z)^2}{2}$$

ami egyben a fenti tört számlálójában álló valószínűséggel is egyenlő. Ezért

$$r(z) \; \approx \; \frac{(2 - z) \cdot \Delta z \; - \; \frac{(\Delta z)^2}{2}}{\Delta z} \; = \; (2 - z) \; - \; \frac{\Delta z}{2} \; \approx \; 2 - z$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$r(z) \; = \; \begin{cases} z & \text{ha} \;\; 0 \; \leq \; z \; \leq \; 1 \\ 2 - z & \text{ha} \;\; 1 \; \leq \; z \; \leq \; 2 \end{cases}$$

3.3.2. Két random szám maximuma

Ebben a részben a

$$Z \;=\; \max\,(\,\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2\,)$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét vezetjük le. Természetesen most is a sűrűség

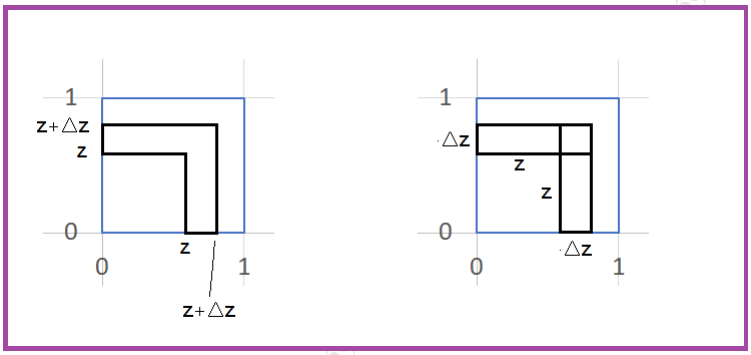
$$r(z) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\;z \;\le\; Z \;\le\; z+\Delta z\;)}{\Delta z}$$

jelentéséből indulunk ki, ahol Δz egy pici pozitív értéket jelöl.

A számlálóban álló $z \;\le\; Z \;\le\; z+\Delta z$ eseménynek megfelel az egységnégyzetnek az a részhalmaza, melyet

$$z \;\le\; \max\,(\,x, y\,) \;\le\; z+\Delta z$$

egyenlőtlenségek definiálnak. Ez egy L-alakú halmaz, amit az alábbi ábra bal oldalán láthatunk:



40. ábra. *Balra:* ***az L-alakú halmaz****. Jobbra: a halmaz felbontása két téglalap és egy négyzet egyesítésére*

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez az L-alakú halmaz előáll két téglalap és egy négyzet egyesítéseként. A téglalapok egyik oldalának a hossza z, a másiké Δz, ezért egy-egy téglalap területe $z \cdot \Delta z$. A négyzet területe nyilván $(\Delta z)^2$. Így az L-alakú halmaz területe

$$2 \;\cdot\; z \cdot \Delta z \;+\; (\Delta z)^2$$

Ezért

$$r(z) \;\approx\; \frac{2 \cdot z \cdot \Delta z \;+\; (\Delta z)^2}{\Delta z} \;=\; 2 \cdot z \;+\; \Delta z \;\approx\; 2 \cdot z$$

Ez azt jelenti, hogy

$$r(z) \;=\; 2 \cdot z \qquad \text{ha} \;\; 0 \;\le\; z \;\le\; 1$$

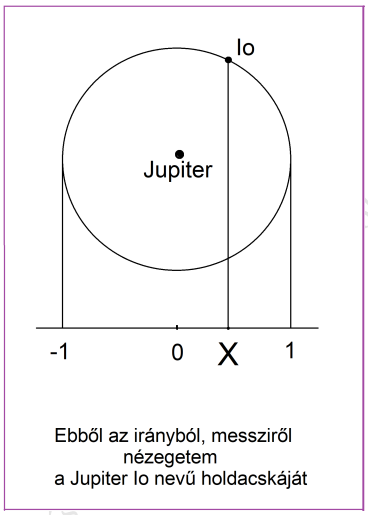
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások

Tegyük fel, hogy egy pontszerű test körpályán mozog konstans szögsebességgel, és mi egy véletlen időpillanatban tekintjük a részecske helyét a kör kerületén. Mivel a mi időpillanatunk véletlenszerű, az észlelt hely egy véletlenszerű pont a kör kerületén. Ha a mi véletlenszerű időpillanatunk semmi módon nincs kapcsolatban a pont mozgásával, akkor az így választott véletlen pont eloszlását kézenfekvő egyenletes eloszlásnak elfogadni.

3.4.1. Arkusz-színusz eloszlás

Szeretem távcsővel nézegetni a Jupiter holdjait, melyeket Galileo Galilei fedezett fel a 17. század elején. A neveik: Io, Európa, Ganümédész (latinul: Ganymedes), Kallisztó (latinul: Callisto). A holdak a Jupiter körül keringenek közelítőleg körpályán egyenletes sebességgel, gyakorlatilag egy síkban. Ebben a síkban a Föld is benne van, ezért a körlapot úgy látom, mintha egy korongot az éle felől néznék. Ezért a holdacskák mozgását nem körmozgásnak érzékelem: úgy látom, mintha egy szakaszon periodikusan mozognának: egyszer jobbra, máskor balra. A szakasz egyik vége a Jupiter baloldalán van, a másik a jobboldalán, és a holdacskák látszólag ezen a szakaszon mászkálnak. Ha a körpálya sugarát választjuk egységnek, és a szakasz középpontját 0 -nak, akkor a szóbanforgó szakasz a $[-1;1]$ intervallum.

Tegyük fel, hogy felismerem a holdakat, és – mondjuk – mindig csak az Io helyzetét figyelem, a másik három holdacskával nem törődök. Ha egy véletlenszerű időpontban tekintem az Io-t, akkor a látszólagos helyzetét a $[-1;1]$ intervallumon jellemezhetem egy véletlen X valós számmal.



41. ábra. *Az X valószínűségi változó definíciója*

X egy folytonos valószínűségi változó. Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ X ? A válasz:

Eloszlásfüggvény:

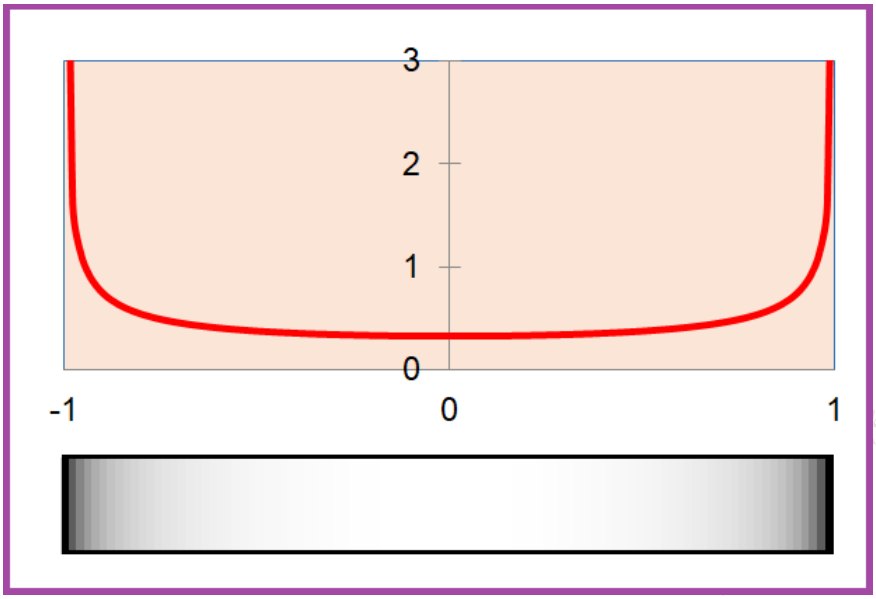
$$F(x) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\arcsin(x) \qquad (\,-1 \;<\; x \;<\; 1\,)$$

Sűrűségfüggvény:

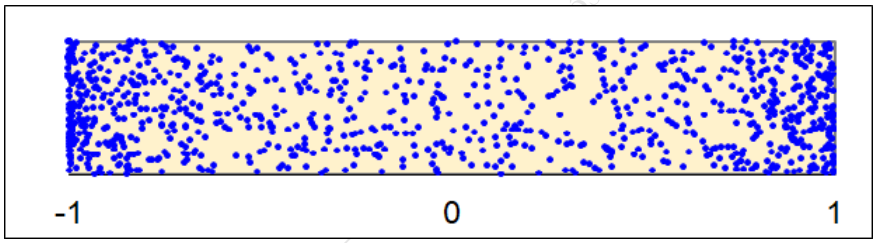
$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\,-1 \;<\; x \;<\; 1\,)$$

Az eloszlás a nevét az eloszlásfüggvény képletében szereplő arkusz-színusz fügvénytől kapta: **arkusz-színusz eloszlás**.

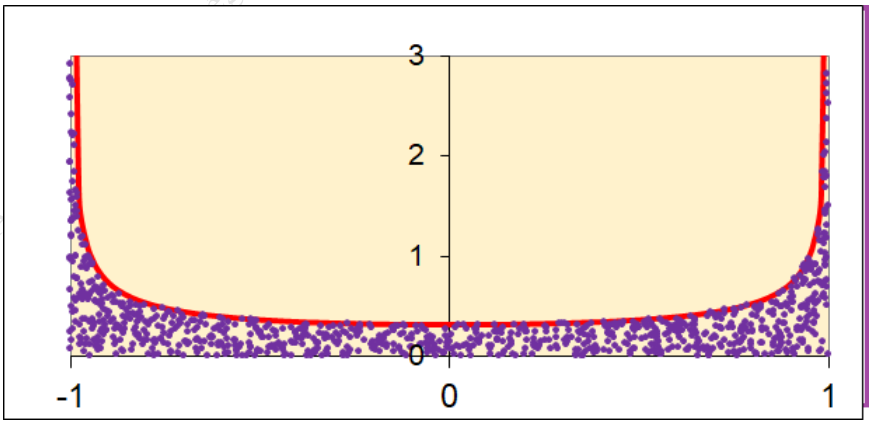
Vetier András – Valószínűségszámítás



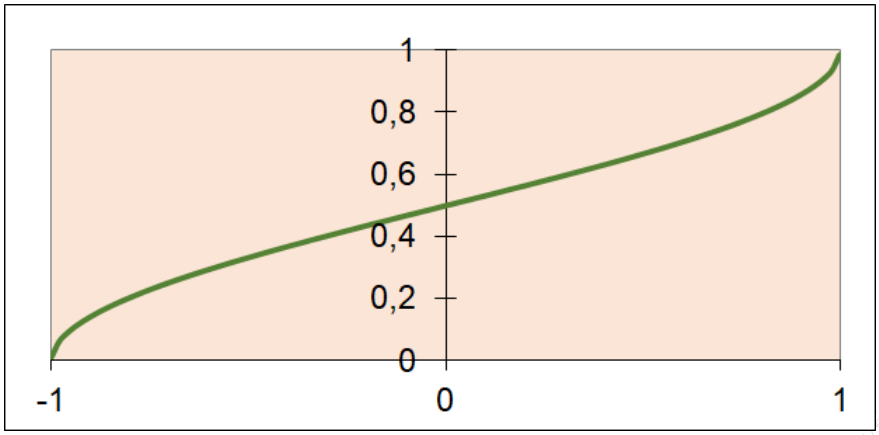
42. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



43. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



44. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



45. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása:

Mivel a Jupiter körüli körpályán a hozzám közelebbi "alsó félkör" és a tőlem távolabbi "felső félkör" a Földről nézve egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a "felső távolabbi" félkörre szorítkozni. Vagyis úgy vehetjük, hogy az Io helyzete abban a véletlenszerű időpillanatban, amikor a távcsövemmel nézem, *egyenletes eloszlású* ***a felső félkörön***.

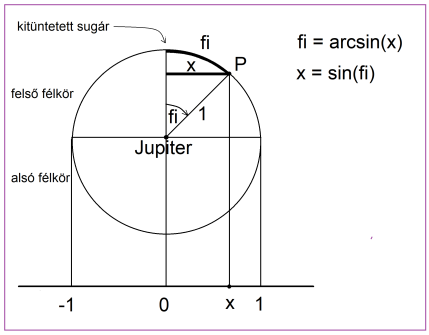
A következő gondolatmenetben kitüntett szerepet kap az sugár, melyet a Jupiterből indítva a felső félkörív közepéhez húzhatunk: a többi sugarat azzal a ($-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső) szöggel fogjuk jellemezni, melyet ezzel a kitünetett sugárral bezárnak.

Eloszlásfüggvény: Válasszunk egy x számot -1 és 1 között. X eloszlásfüggvényének az x helyen vett értékét, vagyis az $X \leq x$ esemény valószínűségét szeretnénk meghatározni. E célból először keressük meg az x -nek megfelelő P pontot a felső félköríven, és aztán rajzoljuk be a Jupitertől a P ponthoz húzható sugarat, lásd a lentebbi ábrát! Ennek a sugárnak a kitüntetett sugárral bezárt szögét jelöljük ϕ -vel.

Egyszerű trigonometriai tény, hogy x és ϕ között fennállnak az

$$x = \sin(\phi) \qquad \phi = \arcsin(x)$$

összefüggések – lásd a alábbi ábrát:

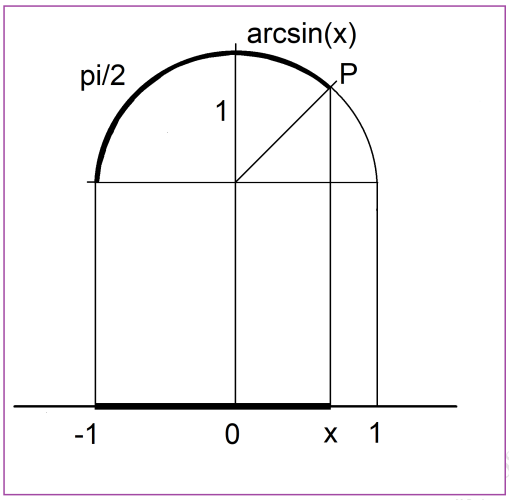


46. ábra. *Az ábráról leolvashatók a* $x = sin(\phi)$, $\phi = arcsin(x)$ *összefüggések*

Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz

Vetier András – Valószínűségszámítás és statisztika: Egyváltozós valószínűségi változók

- a $[-1;1]$ intervallumon belül az x -től balra eső $[-1;x]$ intervallum,
- a felső félkörön belül a P ponttól balra eső körív, melynek hossza $\pi/2 +$ arcsin(x) :



47. ábra. *Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz a felső félkörön belül egy körív*

$F(x)$ értéke egyenlő ennek a körívnek a hossza osztva a felső félkör hosszával:

$$F(x) = \mathrm{P}(\ X \leq x\ ) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x)$$

Sűrűségfüggvény:

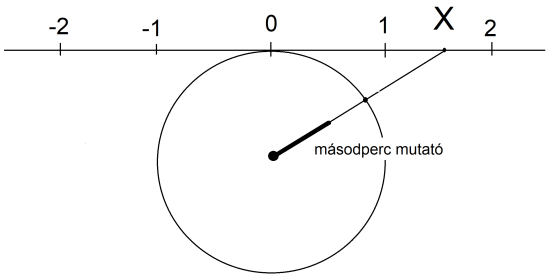
$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Megjegyzés: Egy színuszosan váltakozó váltóáram pillanatnyi feszültségét véletlenszerű pillanatban véve nyilván arkusz-színusz eloszlású valószínűségi változót kapunk.

3.4.2. Cauchy eloszlás

Képzeljük el, hogy valaki egy hosszú egyenes fal elé letesz a földre egy hagyományos, kör alakú órát, és azt vizsgálja, hogy az egyenletes szögsebességgel forgó (tehát nem ugrabugráló) másodperc mutató által definiált egyenes hol metszi a falat. Az óra középpontjának a faltól való távolságát vesszük hosszegységnek. Ezzel a hosszegységgel a falon elképzeljük a számegyenest. Ha véletlenszerű időpontban tekintjük a metszéspont, akkor a metszéspontnak a helyzete a falra rajzolt számegyenesen egy számot definiál, ami számunkra egy X valószínűségi változót jelent:

Szántai Tamás – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós eloszlások, valószínűségi változók



48. ábra. *Az* X *valószínűségi változó definíciója*

Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ az X valószínűségi változó? A válasz:

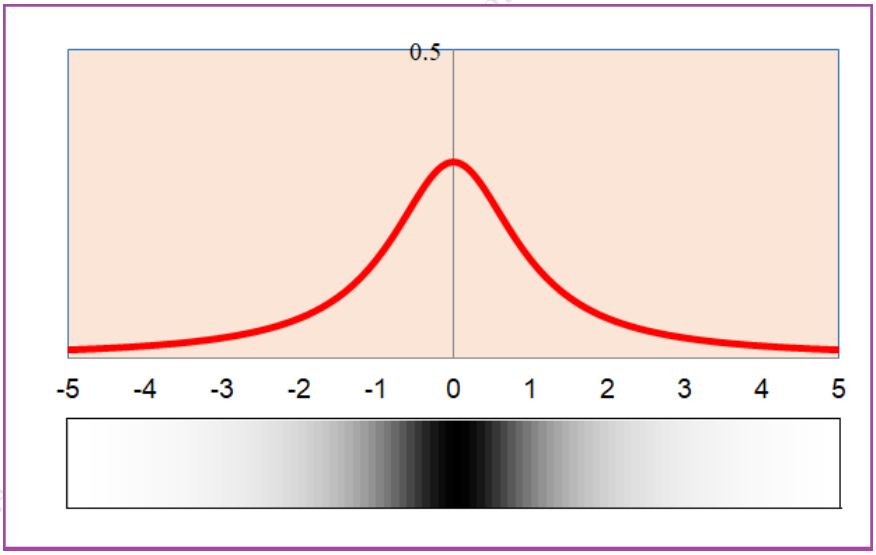
Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

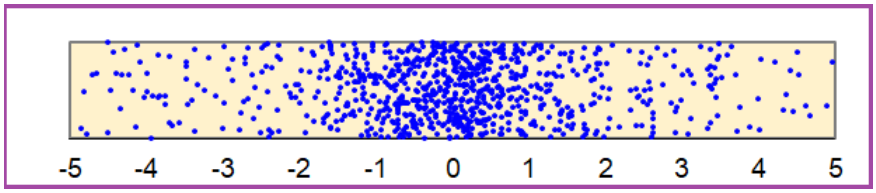
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Az eloszlást jogos lenne arkusz-tangens eloszlásnak hívni, de a neve mégis: **Cauchy eloszlás**.

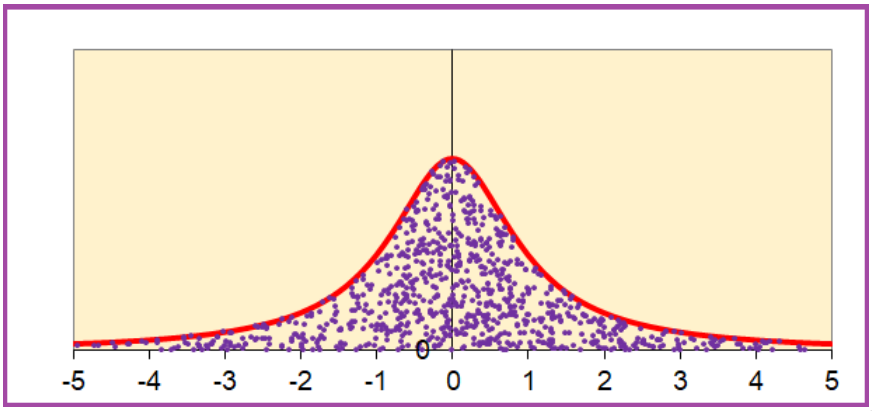


49. ábra. *Cauchy eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*

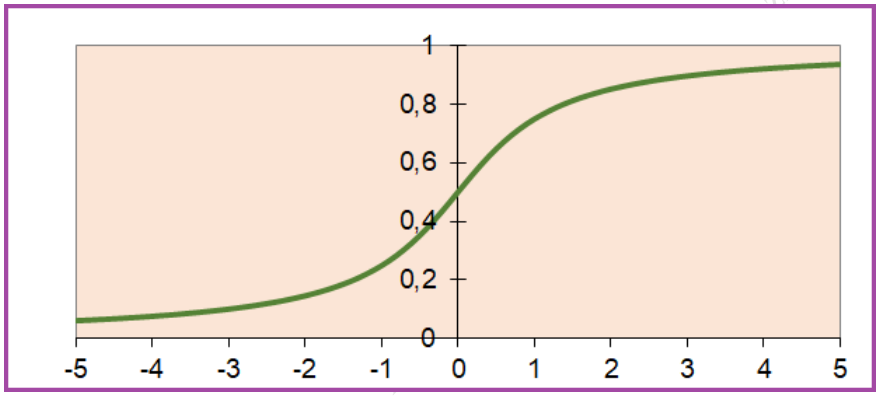


50. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*

Vetier A
dimenziós folytonos valószínűségi változók



51. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



52. ábra. *Cauchy eloszlás: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: Mivel az óra lapján az "alsó félkör" és a "felső félkör" egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a felső félkörre szorítkozni. Vagyis úgy vehetjük, hogy a kör kerületén a másodperc mutató által kijelölt pont *egyenletes eloszlású **a felső félkörön***.

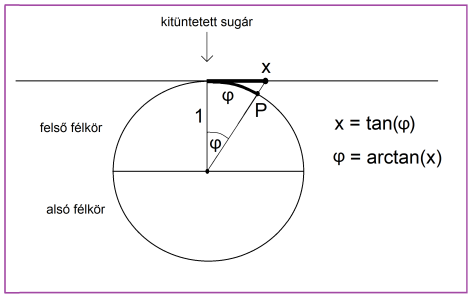
A következő gondolatmenetben kitüntett szerepet kap az sugár, melyet az óra középpontjából a felső félkörív közepéhez húzhatunk: a többi sugarat azzal a ($-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső) szöggel fogjuk jellemezni, melyet ezzel a kitünetett sugárral bezárnak.

Eloszlásfüggvény: Válasszunk egy x valós számot. X eloszlásfüggvényének az x helyen vett értékét, vagyis az $X \leq x$ esemény valószínűségét szeretnénk meghatározni. E célból először keressük meg az x -nek megfelelő P pontot a felső félköríven, és aztán rajzoljuk be az óra középpontjából a P ponthoz húzható sugarat, lásd a lentebbi ábrát! Ennek a sugárnak a kitüntetett sugárral bezárt szögét jelöljük ϕ -vel.

Egyszerű trigonometriai tény, hogy x és ϕ között fennállnak az

$$x = \tan(\phi) \qquad \phi = \arctan(x)$$

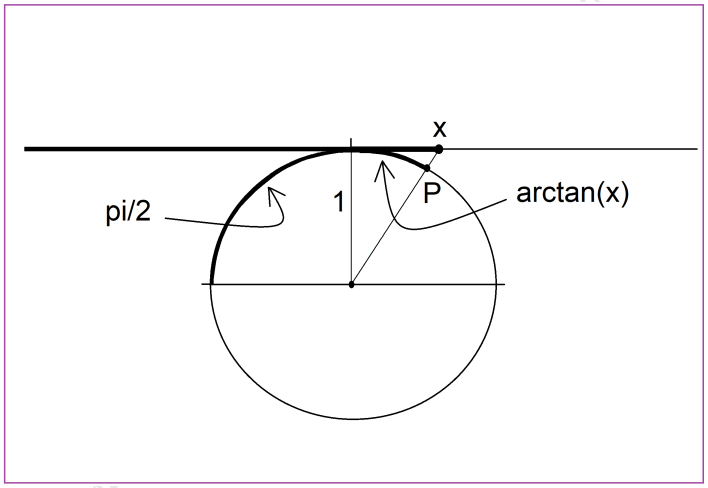
összefüggések – lásd a alábbi ábrát:



53. ábra. *Az ábráról leolvashatók a* $x = tan(\phi)$, $\phi = arctan(x)$ *összefüggések*

Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz

- az érintő egyenesen: az x -től balra eső $[-\infty; x]$ intervallum,
- a felső félkörön: a P ponttól balra eső körív, melynek hossza $\pi/2 +$ arctan(x) :



54. ábra. *Az* $X \leq x$ *eseménynek megfelelő halmaz a felső félkörön belül egy körív*

$F(x)$ értéke egyenlő ennek a körívnek a hossza osztva a felső félkör hosszával:

$$F(x) = \mathrm{P}(\ X \leq x\ ) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)\right)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – Diszkrétnek és folytonos valószínűségi változók

3.5. Monoton transzformációk

Legyen $y = t(x)$ egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekedő függvény, melynek $x = t^{-1}(y)$ -nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha egy random számot behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet $t(\text{RND})$-vel szokás jelölni:

$$Y \;=\; t(\text{RND})$$

Az Y , vagyis $t(\text{RND})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

1. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) \;=\; t^{-1}(y)$$

$$g(y) \;=\; \big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} < t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) \;=\; \text{P}(\, Y \;<\; y \,) \;=\; \text{P}\big(\; t(\text{ RND}) \;<\; y \;\big) \;=\; \text{P}\big(\; \text{RND} \;<\; t^{-1}(y) \;\big) \;=\; t^{-1}(y)$$

A $G(y) = t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) \;=\; \big(\; t^{-1}(y) \;\big)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Legyenek x és y , illetve $x + \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \;=\; t(\Delta x)$$

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x \;<\; \text{RND} \;<\; x + \Delta x$$

eseménnyel. Ezért

$$\text{P}(\, y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y \,) \;=\; \text{P}(\, x \;<\; \text{RND} \;<\; x + \Delta x \,)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(\, x \;<\; \text{RND} \;<\; x + \Delta x \,) \;=\; \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \;\approx\; \frac{\text{P}(\, y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y \,)}{\Delta y} \;=\; \frac{\text{P}(\, x \;<\; \text{RND} \;<\; x + \Delta x \,)}{\Delta y} \;=\; \frac{\Delta x}{\Delta y} \;\approx\; \big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

2. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; t^{-1}(y)$$

$$g(y) \;=\; -\big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

Vekler András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} > t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(\, Y < y \,) = \text{P}(\; t(\text{ RND}) < y \;) =$$

$$= \text{P}\big(\; \text{RND} > t^{-1}(y) \;\big) = 1 - \text{P}\big(\; \text{RND} < t^{-1}(y) \;\big) = 1 - t^{-1}(y)$$

A $G(y) = 1 - t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) = -\big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x - \Delta x < \text{RND} < x$$

eseménnyel, ahol x és y, illetve $x - \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y = t(x - \Delta x)$$

Ezért

$$\text{P}(\, y < Y < y + \Delta y \,) = \text{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x \,)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x \,) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\text{P}(\, y < Y < y + \Delta y \,)}{\Delta y} = \frac{\text{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x \,)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

Az utolsó lépés azért igaz, mert a függvény szigorúan monoton csökkenő mivolta miatt

$$\big(\, t^{-1}(y) \,\big)' \approx -\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\big(\, t^{-1}(y) \,\big)'$$

3.6. Folytonos szimuláció

Tegyük fel, hogy előírnak egy folytonos eloszlást, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan X valószínűségi változót, ami a megadott eloszlást követi. Egyenletes eloszlás esetén egyszerű a helyzet, hiszen a az Excelben angolul a `RAND()`, illetve magyarul a `VÉL()` utasítás olyan véletlen számot állít elő, ami a $[0; 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követi. Ezért

- ha a $[0; 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás: $X = \text{RND}$
- ha az $[5; 15]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = 5 + 10 \cdot \text{RND}$
- ha az $[A; B]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = A + (B - A) \cdot \text{RND}$

Szeber Attila – Valószínűségszámítás – segédanyag: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Ha az előírt eloszlás nem egyenletes, akkor a módszer nem ennyire egyszerű. A következőképpen lehet eljárni:

Meghatározzuk az előírt eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = F^{-1}(\text{RND})$$

Az eljárás igazolásául az előző alfejezetben tárgyaltakra lehet hivatkozni, mely szerint ha egy RND számot egy szigorúan monoton növekedő transzformációnak vetünk alá, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a transzformációs függvény inverze. Ezért, ha a transzformáció a megadott eloszlásfüggvény inverzével történik, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a megadott eloszlásfüggvény lesz.

Megjegyzés: Az itt megadott módszer nem az egyetlen módszer, más módszerekkel is elő lehet állítani a kívánt eloszlást követő valószínűségi változót. Példaképpen említjük, hogy az alábbiak szerint is eljárhatunk:

Meghatározzuk az előírt eloszlás $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = T^{-1}(\text{RND})$$

3.7. Béta eloszlások

Válasszunk egy n és egy k számot úgy, hogy $1 \leq k \leq n \leq$ teljesüljön. Ezek után tekintsünk n darab egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet!

Ugyanez a probléma kicsit életszerűbben:

Tegyük fel, hogy egy n tagú társaság tagjai egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint érkeznek a menzára dél (amit itt most 0 órának teintünk) és 1 óra között. Aki elsőnek megjön leül és vár a többire. Amikor a második megjön, kezet fognak. Amikor a harmadik megjön, udvariasan köszön a már ottlévő két barátjának. Amikor pedig a k -ik is megjön, hangos csatakiáltással üdvözlik őt. Jelöljük X -szel azt a pillanatot, amikor felhangzik a csatakiáltás!

Az ilyen módon értelmezett valószínűségi változók eloszlásait nevezzük **béta eloszlás**oknak.

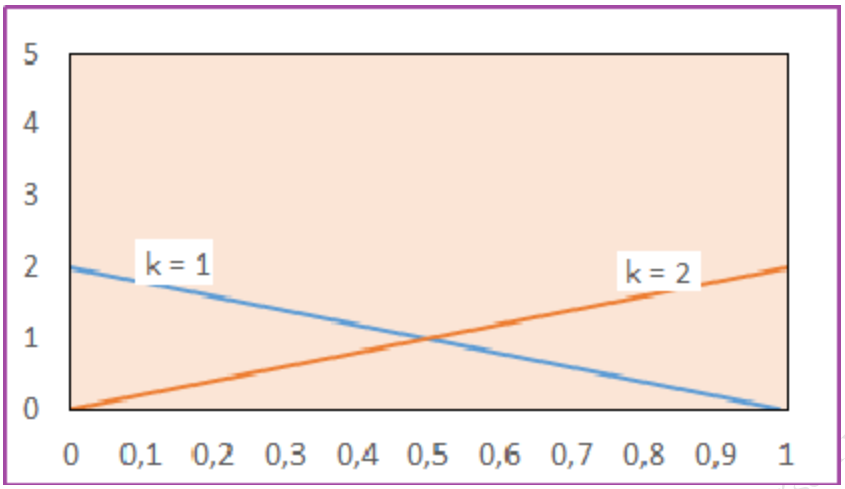
3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése

Memutatjuk, hogy X sűrűségfüggvénye:

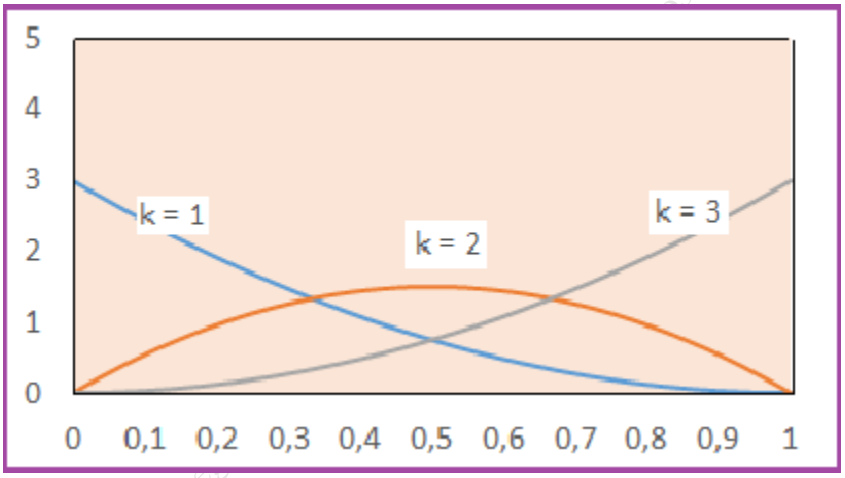
$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Megjegyzés: A béta eloszlásokat tetszőleges n -re és k -ra vezettük be. A kezdő számára ez így ijesztő lehet. Ennek kivédésére tanácsoljuk, hogy – fáradságot és időt nem kímélve – először néhány speciális esetre gondolja át a definíciót, végezzen kísérleteket, értse meg, hogy miről is van szó. Az következő négy ábrán $n = 2, 3, 4, 5$ és a lehetséges k értékekre a megadjuk a sűrűségfüggvények grafikonjait :

Vetier András – Valószínűségszámítás és statisztika – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

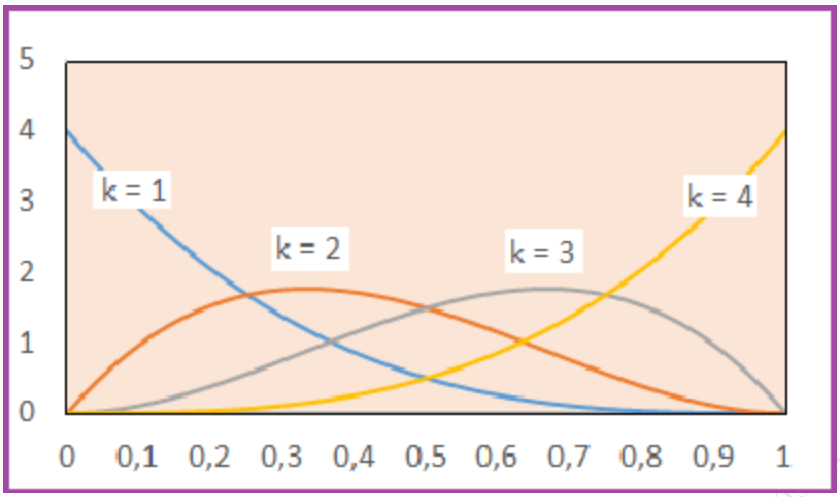


55. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 2,\ k = 1,\ k = 2$

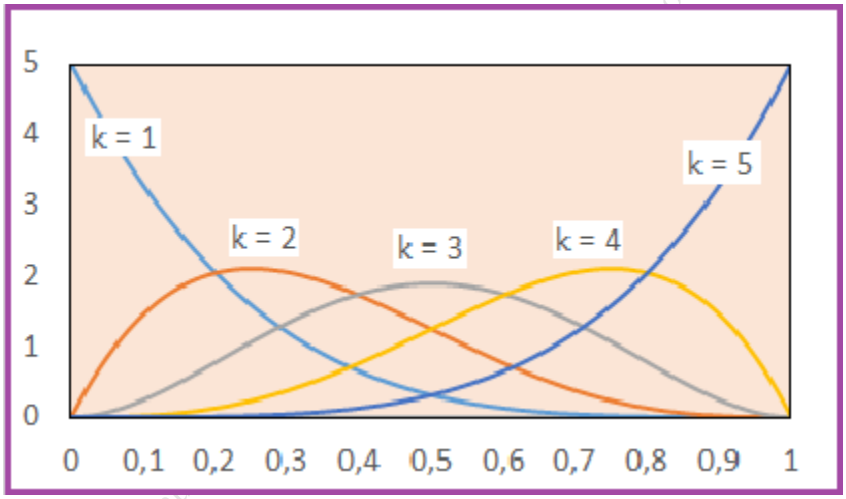


56. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 3,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3$

Vetier András – Valószínűségszámítás és valószínűségi változók

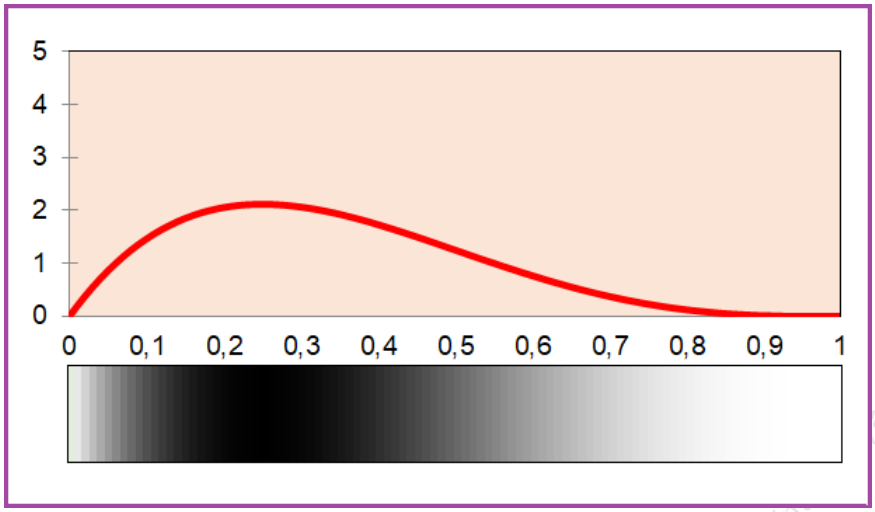


57. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $= 4,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4$

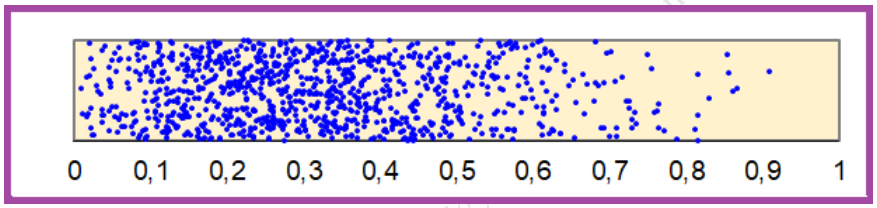


58. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 5,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4,\ k = 5$

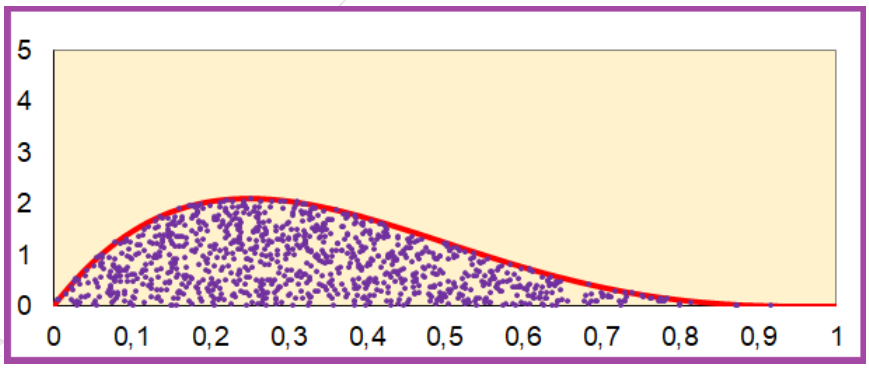
Az $n = 5,\ k = 2$ paraméter értékekre több ábrát is megadunk:



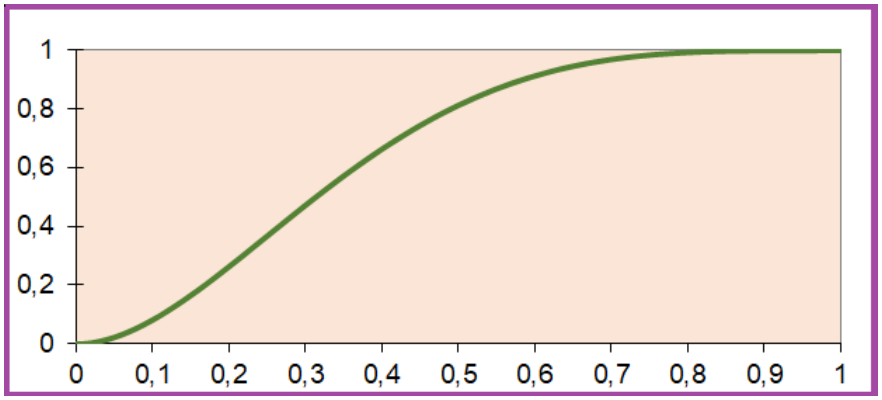
59. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



60. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



61. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



62. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: eloszlásfüggvény*

A sűrűségfüggvény képletének levezetése: Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x_1 \ \leq \ X \ \leq \ x_2\ )}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \ \leq \ X \ \leq \ x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ X\ ]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ X\ ;\ 1\ ]$	intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ x_1\ ]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ x_2\ ;\ 1\ ]$	intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső random szám az n darab random szám akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab random szám az $n-1$ darab többi random szám közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$-gyel, vagyis a random számok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} \ = \ \frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége

$$x_1^{k-1}\ (x_2 - x_1)\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}\ \ x_1^{k-1}\ (x_2 - x_1)\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk $(x_2 - x_1)$ -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}\ \ x_1^{k-1}\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Vetter András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\, x_1 \,,\, x_2 \,]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) \;=\; \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

1. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{5!}{1!\,3!}\; x^1\,(1-x)^3 \;=\; 20\,x\,(1-x)^3 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

2. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{5!}{2!\,2!}\; x^2\,(1-x)^2 \;=\; 30\,x^2\,(1-x)^2 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

3. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{10!}{6!\,3!}\; x^6\,(1-x)^3 \;=\; 840\,x^6\,(1-x)^3 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése

Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között. Meghatározzuk az eloszlásfüggvény értékét az x helyen:

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;\leq\; x \;) \;=$$

$$=\; \mathrm{P}(\;\text{a } k\text{ -ik legkisebb random szám } x\text{ -től balra van}\;) \;=$$

$$=\; \mathrm{P}(\;\text{az } x\text{ -től balra lévő random számok száma legalább } k\;) \;=$$

$$\begin{aligned} =\; & \mathrm{P}(\;\text{az } x\text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } k\;) \;+ \\ +\; & \mathrm{P}(\;\text{az } x\text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } k+1\;) \;+ \\ & \vdots \\ +\; & \mathrm{P}(\;\text{az } x\text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } n-1) \;+ \\ +\; & \mathrm{P}(\;\text{az } x\text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } n\;) \;= \end{aligned}$$

$$=\; \binom{n}{k}\, x^k (1-x)^{n-k} \;+\; \binom{n}{k+1}\, x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \;+\; \ldots + \binom{n}{n-1}\, x^{n-1} (1-x)^1 \;+\; \binom{n}{n}\, x^n (1-x)^0$$

4. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \;=$$

$$= \binom{5}{2} x^2(1-x)^3 \; + \; \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \; + \; \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \; + \; \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 10\, x^2(1-x)^3 \; + \; 10\, x^3(1-x)^2 \; + \; 5\, x^4(1-x)^1 \; + \; x^5$$

5. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \; =$$

$$= \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \; + \; \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \; + \; \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 10\, x^3(1-x)^2 \; + \; 5\, x^4(1-x)^1 \; + \; x^5$$

6. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \; =$$

$$= \binom{10}{7} x^7(1-x)^3 \; + \; \binom{10}{8} x^8(1-x)^2 \; + \; \binom{10}{9} x^9(1-x)^1 \; + \; \binom{10}{10} x^{10}(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 120\, x^7(1-x)^3 \; + \; 45\, x^8(1-x)^2 \; + 10\, x^9(1-x)^1 \; + \; x^{10}$$

Megjegyzés: A sűrűségfüggvény képletét természetesen megkaphatjuk az eloszlásfüggvény deriválásával. Gyakorlásképpen tessék bátran deriválni!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

3.7.3. Nem-egyenletes alap-eloszlás esete *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy a pontokat a $[0,1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás helyett egy $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű folytonos *"alap"-eloszlás* szerint választjuk, ahol $A < x < B$ és $-\infty < A < B < \infty$. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet.

A sűrűségfüggvény képletének levezetése. Most erre az általánosabb esetre is levezetjük az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felveszünk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \; \approx \; \frac{\mathrm{P}(\; x_1 \; \leq \; X \; \leq \; x_2 \;)}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \; \leq \; X \; \leq \; x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\, x_1 \; ; \; x_2 \,]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \; ; \; x_2 \,]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \; ; \; X \,]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, X \; ; \; 1 \,]$	intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \; ; \; x_2 \,]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \; ; \; x_1 \,]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, x_2 \; ; \; 1 \,]$	intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső pont az n darab pont akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab pont az $n-1$ darab többi pont közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$ -gyel, vagyis a pontok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége közelítőleg

$$(\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\,(x_2-x_1)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\,(x_2-x_1)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk (x_2-x_1) -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\ \cdot\ (\ 1-S(x)\ )^{n-k} \qquad (A\ <\ x\ <\ B)$$

1. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x)=x^2\ \ (0\ <\ x\ <\ 1)$ eloszlásfüggvényű, $s(x)=2x\ \ (0\ <\ x\ <\ 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 20\ \cdot\ x^2\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^3 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

2. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 30\,x^2\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^2 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

3. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 840\ \left(\ x^2\ \right)^6\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^3 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

Az eloszlásfüggvény képletének levezetése. Az eloszlásfüggvény képletét is levezetjük. E célból felveszünk egy x pontot 0 és 1 között. Az eloszlásfüggvény jelentése miatt:

$$F(x)\ =\ \mathrm{P}(\ X\ \le\ x\ )\ =$$

$$=\ \mathrm{P}(\ \text{a } k\text{ -ik legkisebb pont } x\text{ -től balra van}\ )\ =$$

$$=\ \mathrm{P}(\ \text{az } x\text{ -től balra lévő pontok száma legalább } k\ )\ =$$

Szántai Tamás – Szétvágott András – Valószínűségszámítás – 3. rész – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

$$
\begin{aligned}
&= \text{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } k\ ) + \\
&+ \text{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } k+1\ ) + \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&+ \text{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } n-1\ ) + \\
&+ \text{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } n\ ) =
\end{aligned}
$$

$$
= \binom{n}{k} (\ S(x)\ )^k (\ 1 - S(x)\ )^{n-k} + \binom{n}{k+1} (\ S(x)\ )^{k+1} (\ 1 - S(x)\ )^{n-(k+1)} + \ldots
$$

$$
\ldots + \binom{n}{n-1} (\ S(x)\ )^{n-1} (\ 1 - S(x)\ )^1 + \binom{n}{n} (\ S(x)\ )^n (\ 1 - S(x)\ )^0
$$

4. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x) = x^2$ $(0 < x < 1)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{5}{2} (\ x^2\ )^2 (\ 1 - x^2\ )^3 + \binom{5}{3} (\ x^2\ )^3 (\ 1 - x^2\ )^2 + \binom{5}{4} (\ x^2\ )^4 (\ 1 - x^2\ )^1 + \binom{5}{5} (\ x^2\ )^5 (\ 1 - x^2
$$

5. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{5}{3} (\ x^2\ )^3 (\ 1 - x^2\ )^2 + \binom{5}{4} (\ x^2\ )^4 (\ 1 - x^2\ )^1 + \binom{5}{5} (\ x^2\ )^5 (\ 1 - x^2\ )^0
$$

6. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{10}{7} (\ x^2\ )^7 (\ 1 - x^2\ )^3 + \binom{10}{8} (\ x^2\ )^8 (\ 1 - x^2\ )^2 + \binom{10}{9} (\ x^2\ )^9 (\ 1 - x^2\ )^1 + \binom{10}{10} (\ x^2\ )^{10} (\ 1 -
$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – jegyzet: Egyszerű folytonos valószínűségi változók

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)*

4.1. Definíciók

Ha az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor X **várható értéké**nek (angolul: *expected value*) definíciója:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Az $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ számot az $f(x)$ sűrűségfüggvényű *eloszlás* **várható értéké**nek is nevezzük.

Tetszőleges $y = t(x)$ függvény esetén az X -ből az $y = t(x)$ *transzformációval kapott* (Y -nal vagy $t(X)$ -szel jelölt) *valószínűségi változó* **várható értéke**:

$$\mathrm{E}(\ Y\ ) \ = \ \mathrm{E}(\ t(X)\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\, dx$$

Speciálisan, $t(x) = x^2$ esetén kapjuk az X **második momentum**át:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

A **variancia** (avagy más néven **szórásnégyzet)** definíciója :

$$\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} (\ x - \mathrm{E}(X)\ )^2\, f(x)\, dx$$

Végül a **szórás** (angolul: *standard deviation*) definíciója:

$$\mathrm{SD}(\ X\ ) = \sqrt{\mathrm{VAR}(\ X\ )}$$

Megjegyzések:

- A várható értéket gyakran szokták μ -vel, a varianciát σ^2 -tel, a szórást pedig σ -val jelölni.
- Látható, hogy egy valószínűségi változó várható értéke a folytonos esetben is ott van, ahol a megfelelő tömegeloszlás tömegközéppontja.
- A variancia (szórásnégyzet) annyi, amennyi a megfelelő tömegeloszlásnak a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.
- A variancia (szórásnégyzet) kiszámítása a folytonos esetben is a (diszkrét esetből már ismert)

  $$\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \mathrm{E}(\ X^2\ ) \ - \ (\ \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2$$

  szabály alapján történhet.

Vetró Ambrás – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

4.2. Nagy számok törvényei

Fontosságuk miatt folytonos valószínűségi változókra – a szükséges módosításokkal – elismételjük a diszkrét valószínűségi változókra már megfogalmazott nagy számok törvényeit.

4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(X)$$

Vázlatos bizonyítás. Osszuk fel a számegyenest Δx hosszúságú kis intervallumokra! Ezután az osztópontokon egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis intervallum bal végpontjához hozzárendeljük az intervallumnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az x osztóponthoz tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\ dx$$

Az X valószínűségi változó megfigyelt értékeit az osztópontokra "lekerekítve" egy X^* diszrét valószínűségi változót kapunk: ha X értéke egy $[\,x\,,\ x+\Delta x\,)$ intervallumba esik, akkor X^* értékét x-nek vesszük:

$$X^* = x \qquad \text{ha} \qquad x \le X < x + \Delta x$$

Az X^* lehetséges értékei az osztópontok. Minden egyes x osztópont esetén az $X^* = x$ esemény valószínűsége, vagyis X^* súlyfüggvényének az x helyen vett értéke, a fenti $p(x)$ érték. Mivel Δx kicsi, $p(x)$-re igaz az alábbi közelítés:

$$p(x) \approx f(x)\,\Delta x$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx$$

$$\approx \frac{X_1^* + X_2^* + \ldots + X_N^*}{N} \approx$$

$$\approx \sum_x x\,p(x) \approx$$

$$\approx \sum_x x\,f(x)\,\Delta x \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\ dx$$

- Az első lépésben, amikor X-et X^*-gal helyettesítjük, a számláló minden tagjában legfeljebb Δx változás történik, ezért a két átlag is legfeljebb Δx-szel tér el egymástól.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az X^* diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyarázztuk, hogy a kísérleti eredmények átlaga közelíti a várható értéket.
- A harmadik lépésben a $p(x)$-re felírt közelítést alkalmazzuk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – Szakasz: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

- A negyedik lépésben a szummát a megfelelő integrállal közelítjük.

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*:

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx$ integrál értéke véges szám, ami akkor és csak akkor teljesül, ha ez az integrál abszolút konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\; f(x)\; dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\,X\,)$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx$ integrál értéke plusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\; dx \quad \text{konvergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \quad \text{divergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; +\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx$ integrál értéke mínusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\; dx \quad \text{divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; -\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

4. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx$ integrál olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\; dx \quad \text{is divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \quad \text{is divergens}$$

   Ekkor nem létezik olyan véges vagy végtelen c határérték, hogy $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; c$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy **a várható érték nem létezik**.

1. Megjegyzés: *(Extra tananyag)* A Cauchy eloszlásnak nem létezik a várható értéke, hiszen

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} x\; \frac{1}{\pi}\; \frac{1}{1+x^2}\; dx \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\; \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\; dx \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\; \Big[\, \ln(1+x^2)\, \Big]_0^{\infty} = \infty$$

Veszer András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

és

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx \;=\; -\int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx \;=\; -\infty$$

Ez a tény nem azt jelenti, hogy a Cauchy eloszlás egy becstelen, csúnya eloszlás, hanem azt, hogy ha sok kísérletet végzünk Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra, akkor a kísérleti eredmények átlagáról nem állíthatjuk azt, hogy közel lesz valamilyen konstans értékhez. Más szóval: Cauchy eloszlást követő valószínűségi változó esetén a kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik egy bizonyos konstans körül.

2. Megjegyzés: *(Extra tananyag)* Ha valakinek kedve támad ahhoz, hogy számítógépes szimulációval ellenőrizze, hogy Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik, akkor ennél látványosabb élményben lesz része, ha nem Cauchy eloszlású valószínűségi változóval játszik, hanem – például – a sokkal "vadabbul viselkedő"

$$\frac{1}{(\ \mathrm{RND}\ -\ 0.5\ )^5}$$

valószínűségi változóval. Sok kísérlet kapcsán az átlagok sorozata őrületes módon fog viselkedni. Jó szórakozást!

Tessék a józan ész logikájával meggondolni, hogy miért vontunk ki RND -ből 0.5 -öt, miért emeltük a különbséget az 5. hatványra, és miért vettük mindennek a reciprokát!

4.2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha a kísérleti eredményeket egy $t(x)$ folytonos függvénybe helyettesítjük, majd az így kapott

$$t(X_1)\ ,\ t(X_2)\ ,\ \ldots, t(X_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\, dx \;=\; \mathrm{E}(\ \ t(X)\ \ )$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha a $t(x)$ függvény speciálisan az identitás függvény, azaz $t(x) \;=\; x$, akkor a most kimondott állítás a kísérleti eredmények átlagáról szóló, az előző pontban kimondott állításra redukálódik. Ezért a mostani állítás a korábbi általánosítása.

Vázlatos bizonyítás. Ez a vázlatos bizonyítás az előző pontban kifejtett bizonyítás kézenfekvő általánosítása. Osszuk fel most is a számegyenest Δx hosszúságú kis intervallumokra! Ezután az osztópontokon egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis intervallum bal végpontjához hozzárendeljük az intervallumnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az x osztóponthoz tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x) \;=\; \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\ \ dx$$

Az X valószínűségi változó megfigyelt értékeit az osztópontokra "lekerekítve" egy X^* diszrét valószínűségi változót kapunk: ha X értéke egy $[\ x\ ,\ x + \Delta x\ )$ intervallumba esik, akkor X^* értékét x -nek vesszük:

$$X^* = x \qquad \text{ha} \qquad x\ \le\ X\ <\ x + \Delta x$$

Szabó András – Valószínűségszámítás – 5. rész – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Az X^* lehetséges értékei az osztópontok. Minden egyes x osztópont esetén az $X^* = x$ esemény valószínűsége, vagyis X^* súlyfüggvényének az x helyen vett értéke, a fenti $p(x)$ érték. Mivel Δx kicsi, $p(x)$ -re igaz az alábbi közelítés:

$$p(x) \approx f(x)\,\Delta x$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \approx$$

$$\approx \frac{t(X_1^*) + t(X_2^*) + \ldots + t(X_N^*)}{N} \approx$$

$$\approx \sum_x t(x)\,p(x) \approx$$

$$\approx \sum_x t(x)\,f(x)\,\Delta x \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,f(x)\;dx$$

- Az első lépésben, amikor X_i -t X_i^* -vel helyettesítjük, akkor minden i esetén az $X_i - X_i^*$ különbség legfeljebb Δx , vagyis kicsi, így a $t(x)$ függvény folytonossága miatt a $t(X_i) - t(X_i^*)$ különbség is kicsi, ezért a két átlag különbsége is kicsi.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az X^* diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyarázztuk, hogy a kísérleti eredmények függvényének az átlaga közelíti a felírt összeget.
- A harmadik lépésben a $p(x)$ -re felírt közelítést alkalmazzuk.
- A negyedik lépésben a szummát a megfelelő integrállal közelítjük.

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,t(\,X\,)\,) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,f(x)\;dx$ integrál értéke véges szám, ami akkor és csak akkor teljesül, ha ez az integrál abszolút konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t(x)|\;f(x)\;dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \to \mathrm{E}(\,t(\,X\,)\,)$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,t(\,X\,)\,) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,f(x)\;dx$ integrál értéke plusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} t(x)\,f(x)\;dx \quad \text{konvergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\,f(x)\;dx \quad \text{divergens}$$

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \to +\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egyváltozós folytonos valószínűségi változók

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(\ X\ )\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx$ integrál értéke mínusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{konvergens}$$

Ekkor $N \ \to \ \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \ \to \ -\infty$$

esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

4. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx$ integrál olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{is divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{is divergens}$$

Ekkor nem létezik olyan véges vagy végtelen c határérték, hogy $N \ \to \ \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \to \ c$$

esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy **ez a várható érték nem létezik**.

Vetter András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

4.2.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \ \approx \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx \ = \ \mathrm{E}(\ X^2\ )$$

Bizonyítás: Ha az előző részben speciálisan a $t(x) = x^2 \ =$ függvényt vesszük, akkor azonnal megkapjuk az állítást.

4.2.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N} \ \approx \ \mathrm{VAR}(\ X\ )$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\ X\ )$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N} \ \approx$$

$$\approx \frac{(\ X_1 - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 + (\ X_2 - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(\ X - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\ X_1 - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 + (\ X_2 - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2}{N} \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} (\ x - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2\, f(x)\, dx \ = \ \mathrm{VAR}(\ X\ )$$

4.2.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények szórása körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}} \approx \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\ x - \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2\, f(x)\, dx} \ = \ \mathrm{SD}(\ X\ )$$

4.2.6. NSZT a mediánra

A mediánra vonatkozó NSZT a folytonos esetre is ugyanúgy érvényes, mint a diszkrét esetre: nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredményekből számított medián körülbelül az X eloszlásából számított (elméleti) mediánnal egyenlő.

1. Példa: Ha Excelben a `NORM.S.INVERZ(RAND())` utasítással standard normális eloszlást követő valósz sínűségi változót szimulálunk jó sok cellában, és a `MEDIAN(...)` utasítással megkeressük a szimulált eredmények mediánját, akkor körülbelül 0 -t fogunk kapni, hiszen a standard normális eloszlás elméleti mediánja a 0 .

2. Példa: Ha egy városban a közlekedési "piros-sárga-zöld" lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama) exponenciális eloszlást követ, és az élettartam mediánja 7.5 hónap, akkor sok lámpa élettartamát összegyűjtve a kapott adathalmaz mediánja körükbelül 7.5 hónap lesz.

Vetier András — Valószínűségszámítás — 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

4.3. Példa: Csónak bérbe adása extra haszonnal

Siófoki barátom leleményes fickó. Jól ismeri a Balatoni időjárási viszonyokat, a csónakkölcsönző nemtörődömségét, a külföldi túristák lelkületét, és egyetemista korában jól megtanulta a valószínűségszámítást. És ebből jól megél. Lássuk csak hogyan. Így:

Bérbe vesz egy csónakot reggel 9 -kor 2000 Ft/óra bérleti díjért valamilyen időtartamra, és azonnal bérbe adja egy külföldinek 3000 Ft/óra bérleti díjért ugyanerre az időtartamra azzal a kedvezménnyel, hogy ha közben kitör a vihar, akkor visszaveszi tőle a csónakot úgy, hogy ilyenkor a visszamaradó, elveszett időtartamra a külföldinek nem kell már fizetnie bérleti díjat. Ez az ajánlat fölöttébb csábítónak tűnik a külföldinek!

Ha például barátom 3.25 (három és egynegyed) óra időtartamra bérli ki a csónakot, de a vihar megjön 2.25 (kettő és egynegyed) óra múlva, akkor barátom fizet a csónakkölcsönzőnek $3.25 \cdot 2000 = 6500$ Ft -ot, de beszed a külfölditől $2.25 \cdot 3000 = 6750$ Ft -ot, ami neki 250 Ft hasznot hoz.

Ha a vihar – barátom nagy szerencséjére – csak késő délután jön meg, akkor a külfölditől $3.25 \cdot 3000 = 9750$ Ft -ot szed be, és ez neki 3250 Ft hasznot jelent.

Ha viszont a vihar – barátom balszerencséjére – már fél óra múlva kitör, akkor barátom jól ráfizet az ügyeskedésére: ebben az esetben az ő költsége 6500 Ft, de a külfölditől csak $0.5 \cdot 3000 = 1500$ Ft jár neki, ami -5000 Ft hasznot, azaz 5000 Ft veszteséget jelent neki.

Vegyük észre, hogy a haszon attól függ, hogy mikor jön a vihar. Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom bevétele a külfölditől

- $x < 3.25$ óra esetén $3000 \cdot x$ Ft
- $x > 3.25$ óra esetén $3000 \cdot 3.25 = 9750$ Ft

A két képletet egybe is olvaszhatjuk:

- $3000 \cdot \min(x, 3.25)$ Ft

Barátom kiadása nem függ x-től: a kiadás mindenképpen $2000 \cdot 3.25 = 6500$ Ft.

Tehát barátom haszna (= bevétel – kiadás) így függ x-től: $t(x) = 3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500$ Ft.

A vihar jövetele véletlentől függ. Tegyük fel, hogy 9 órától számítva X óra múlva jön a vihar, ahol X exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó 5 óra várható értékkel. Barátom – aki jól megtanulta a valószínűségszámítást – ki tudja számolni a haszon várható értékét:

$$\int_0^\infty t(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty (\, 3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500 \,)\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = 669.3$$

Ha tehát barátom rendszeresen úgy taktikázik, ahogy fentebb leírtuk, akkor átlagosan kb. 670 Ft -ot nyer csónakonként.

Felmerül a kérdés: A 3.25 óra helyett lehetne-e olyan c időtartamot találni, ami nagyobb átlagos hasznot hoz?

Még jobb kérdés: Mennyi az a c időtartam, ami legnagyobb átlagos hasznot hozza?

Megoldás: Általánosabban kezeljük a problámát:

- Barátom A Ft/óra bérleti díjat fizet a csónakkölcsönzőnek.
- Barátom B Ft/óra bérleti díjat kap a külfölditől.
- Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom haszna

$$t(x) = B \cdot \min(x, c) - A \cdot c \qquad \text{Ft}$$

- 9 órától számítva a vihar jöveteléig eltelt X időtartam – mint valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$
- Barátom hasznának a várható értéke – természetesen – függ c-től, ezért BHV(c)-vel jelöljük:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BHV}(c) &= \int_0^\infty t(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty (\; B \cdot \min(x, c) - A \cdot c \;) \cdot f(x)\, dx = \\
&= \int_0^\infty B \cdot \min(x, c) \cdot f(x)\, dx \quad - \quad A \cdot c = \\
&= \int_0^c B \cdot x \cdot f(x)\, dx \quad + \quad \int_c^\infty B \cdot c \cdot f(x)\, dx \quad - \quad A \cdot c \\
&= B \cdot \int_0^c x \cdot f(x)\, dx \quad + \quad B \cdot c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx \quad - \quad A \cdot c
\end{aligned}$$

Idáig tartott a feladat megoldásának az a része, ami a valószínűségszámítási gondolkodásmódot mutatta be. A hátralévő rész a calculus eszközeivel megkeresi a BHV(c) függvény maximumhelyét.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

- A BHV(c) függvény deriváltjának meghatározását segítendő emlékeztetünk az alábbi (itt most c szerinti) deriválási szabályokra:

$$\left(\int_0^c x \cdot f(x)\, dx \right)' = c \cdot f(c)$$

$$\left(\int_c^\infty f(x)\, dx \right)' = -f(c)$$

$$\left(c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx \right)' = 1 \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx + c \cdot (-f(c))$$

Ezeknek a szabályoknak a felhasználásával a

$$\text{BHV}(c) = B \cdot \int_0^c x \cdot f(x)\, dx + B \cdot c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx - A \cdot c$$

kifejezés tagonkénti deriválása azt adja, hogy

$$\text{BHV}'(c) = B \cdot (c \cdot f(c)) + B \cdot \left(1 \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx + c \cdot (-f(c)) \right) - A \cdot 1 =$$

$$= B \cdot T(c) - A$$

ahol a $T(c)$ függvény az X valószínűségi változó a jobboldali eloszlásfüggvényét jelenti a c helyen:

$$T(c) = \int_c^\infty f(x)\, dx$$

- A deriváltat nullával egyenlővé téve a

$$B \cdot T(c) - A = 0$$

egyenletből azt kapjuk, hogy barátom számára a legkedvezőbb c érték eleget tesz a

$$T(c) = \frac{A}{B}$$

egyenletnek.

- Nyilvánvaló, hogy
  - az egyenlet megoldásánál kisebb c esetén $\text{BHV}'(c) > 0$
  - az egyenlet megoldásánál nagyobb c esetén $\text{BHV}'(c) < 0$

  ezért az egyenlet megoldása a BHV(c) függvény maximumhelyét adja.

- Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel, akkor a jobboldali eloszlásfüggvény

$$T(c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$$

Az

$$\mathrm{e}^{-\lambda c} = \frac{A}{B}$$

egyenlet megoldása:

$$c = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{B}{A} \right)$$

- Ha X exponenciális eloszlást követ 5 óra várható értékkel, akkor $\lambda = \frac{1}{5}$. Ha még $A = 2000$, $B = 3000$, akkor

$$c = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{B}{A} \right) = 5 \cdot \ln \left(\frac{3000}{2000} \right) = 2.03 \text{ óra} \approx 2 \text{ óra } 2 \text{ perc} \approx 2 \text{ óra}$$

Ezt a $c = 2.03$ értéket behelyettesítve a BHV(c) függvénybe haszon várható értékének a maximumát kapjuk:

$$\text{BHV}(2.03) = 945.3 \quad \text{Ft}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

- Tehát ha barátom 2 óra 2 perc időtartamra bérli ki és adja bérbe a csónakokat – a fentebb vázolt feltételek mellett –, akkor csónakonként átlagosan 945 Ft haszna van. (A dolog erkölcsi tartalmáról itt most nem ejtünk szót.)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai *(– diszkrét és folytonos eset)*

A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságait a könyv 2. részének 8. fejezetében felsoroltuk. Annak ellenére, hogy akkor még nem tanultunk a folytonos modellekről, már ott megemlítettük, hogy *az ott felsorolt tulajdonságok diszkrét és folytonos valószínűségi változókra és eloszlásokra egyaránt igazak*.

A nem triviális állításokat ott – természetesen – csak a diszkrét esetre bizonyítottuk. A bizonyítások – tessék megnézni – kétdimenziós gondolatmeneteken alapultak, hiszen *kettős szummákkal* dolgoztunk. A bizonyításokat a folytonos esetre értelemszerűen át fogjuk majd ültetni a megfelelő *kettős integrálok* segítségével. Mivel a kétdimenziós folytonos modellek tárgyalására a könyv 4. részében kerül sor, ezeket a bizonyításokat is ott adjuk majd meg.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6. Nevezetes folytonos eloszlások

6.1. Exponenciális eloszlás

A λ paraméterű **exponenciális eloszlás**t a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(x) = e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

Várható érték:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

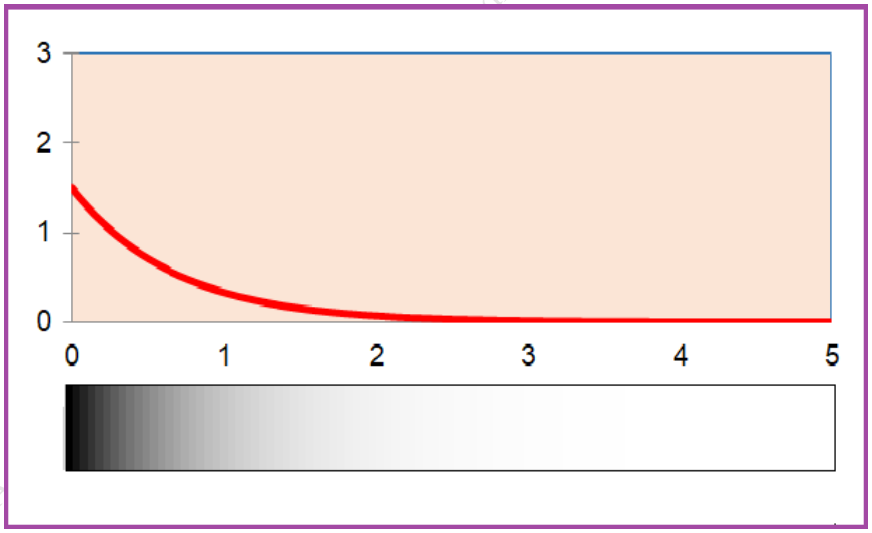
Szórás:

$$\mathrm{SD}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

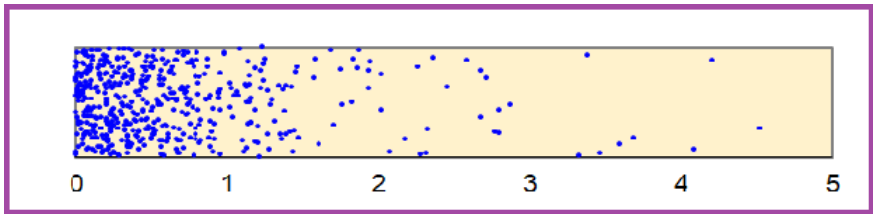
A λ paraméter pozitív valós szám lehet.

Jegyezzük meg, hogy exponenciális eloszlás esetén a paramétert megkaphatjuk a várható érték avagy a szórás reciprokaként:

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(X)} = \frac{1}{\mathrm{SD}(X)}$$

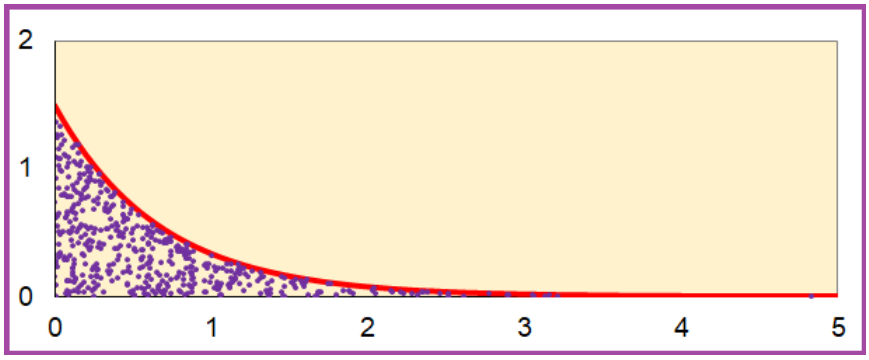


63. ábra. *Exponenciális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*

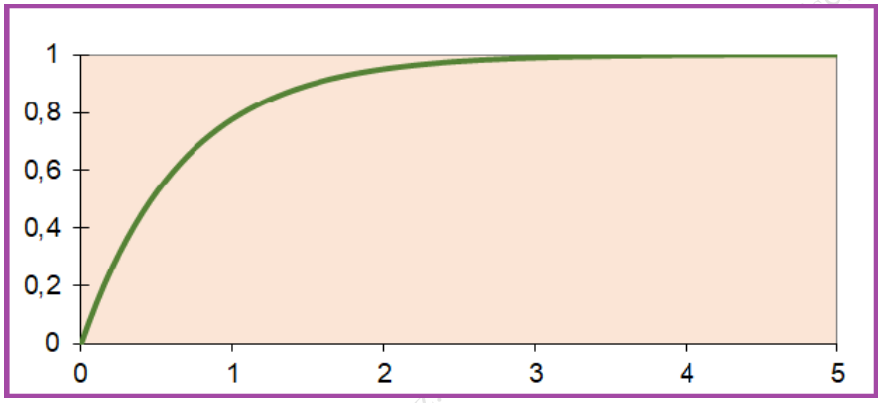


64. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*

Vetier A
dimenziós folytonos valószínűségi változók



65. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



66. ábra. *Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény*

6.1.1. Örökifjú tulajdonság

Egy X valószínűségi változóra, illetve egy folytonos eloszlásra azt mondjuk, hogy **örökifjú** tulajdonságú (más néven: **memória nélküli**), ha teljesül rá a következő:

$$\mathrm{P}(\ X > s+t \mid X > t\ ) = \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

minden $s, t \geq 0$ esetén. Fontossága miatt szavakban is elmondjuk a képlet értelmét: feltéve, hogy X nagyobb, mint t, annak a valószínűsége, hogy $X > s+t$, ugyanannyi, mint annak a (feltétel nélküli) valószínűsége, hogy $X > s$.

Példa: Poharak élettartama. Ha például X egy pohár élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság

"az élettartamnak a múltra vonatkozó érzéketlenségét fejezi ki":

ha egy pohár már valamennyi – mondjuk t ideig – élt már (eddig még nem tört össze),
akkor annak az esélye, hogy
még további bizonyos – mondjuk s – ideig élni fog (addig nem fog összetörni)
ugyanannyi, mint annak az esélye, hogy
egy vadonatúj pohár ezt a bizonyos s időt túléli.

Tehát egy élő pohár kora nincs befolyással az ő további életének alakulására. Egy élő pohár – a további élethosszát illetően – olyan mint egy új pohár.

Állítás: Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Bizonyítás:

1. Az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

Be akarjuk látni, hogy exponenciális eloszlás esetén fennáll az örökifjú tulajdonságot definiálló

$$\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t|X\ >\ t\ ) = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

összefüggés. Az egyenlőség baloldalán álló feltételes valószínűséget törtként írjuk fel:

$$\frac{\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t\ )}{\mathrm{P}(\ X\ >\ t\ )} = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

Ha az egyenletben a valószínűségeket mindhárom helyen átírjuk a $\mathrm{P}(\ X\ >\ x\ ) = e^{-\lambda x}$ összefüggés alapján, akkor az igazolandó egyenlőség az alábbi egyenlsőségbe megy át:

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Ez az egyenlőség pedig nyilván igaz, hiszen a baloldalon $e^{-\lambda t}$ -val egyszerűsítve kiadódik a jobboldal.

2. Csak az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

A $\mathrm{P}(\ X\ >\ x\ )$ valószínűséget jelöljük $T(x)$ -szel. $T(x)$ -szel kapcsolatban leszögezünk néhány egyszerű tényt:

- $T(x) = 1 - F(x)$, azaz $F(x) = 1 - T(x)$
- $T(x)$ csökkenő függvény
- $T'(0)$ értéke negatív

Legyen $\lambda = -T'(0)$, azaz $T'(0) = -\lambda$. A

$$\frac{\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t\ )}{\mathrm{P}(\ X\ >\ t\ )} = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

egyenletet így írhatjuk:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} = T(s)$$

Mindkét oldalon s szerint deriválva a

$$\frac{T'(s+t)}{T(t)} = T'(s)$$

egyenletet adódik. Ha most s helyére 0 -t helyettesítünk, akkor a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

differenciál egyenletet kapjuk. A differenciál egyenlet mindkét oldalát t szerint integálva ezt kapjuk:

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t + C$$

Mivel $T(0) = 1$, ezért $C = 0$. Így

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t$$

azaz

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

amiből kiadódik az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = 1 - T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Szettier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.1.2. Exponenciális eloszlások alkalmazásai

1. Élettartamok: Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: ha egy adott pillanatban a szóbanforgó dolog „él”, akkor a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak. A múltja nincs hatása a jövőjére. Ameddig él, olyan, mint egy újszülött.

2. Várakozási idők: Bizonyos feltételek mellett a várakozási idők is expoenciális eloszlást követnek. Ezért a várakozási időket is gyakran modellezzük exponenciális eloszlással. Itt most megmutatjuk, ha egy városban, a forgalom éjjel-nappal folyamatosan állandó intenzitással dübörög, és valaki azt vizsgálja, hogy egy adott időpillanattól számolva mennyi időt kell várni az első baleseteig, akkor ez a várakozási idő exponenciális eloszlást követ valamilyen λx paraméterrel.

Az eloszlásfüggvények képletének levezetése: Minden x időtartammal kapcsolatban tekinthetjük azt a valószínűségi változót, ami azt mutatja, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban hány baleset történik. Világos, hogy adott x mellett ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ. A Poisson eloszlás paramétere nyilván függ a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallum hosszától. Ha a forgalom folyamatosan ugyanolyan körülmények között zajlik, akkor ennek a valószínűségi változónak a várható értéke arányos az x időtartam hosszával, vagyis λx -szel egyenlő, ahol λ az egységnyi hosszúságú időtartam alatti balesetek számának a várható értékét jelöli. Ezért annak a valószínűsége, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban pontosan k baleset történik, egyenlő

$$\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}$$

-szel. Erre a képletre támaszkodik a következő számítás:

$$\begin{aligned}
&\text{P(az \textbf{első} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = \\
&= 1 - \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont után történik)} = \\
&= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ baleset történik)} = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!}e^{-\lambda x} = \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Tehát az első balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

vagyis *az első balesetig eltelt időtartam expoenciális eloszlást követ* λ *paraméterrel*.

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

`EXPON.DIST(` x `;` λ `; FALSE )`

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt pedig

`EXPON.DIST(` x `;` λ `; TRUE )`

Vetter András – Valószínűségszámítás – 3. fejez: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.1.3. Öregedő tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik az **öregedő tulajdonsággal**, ha

$$\mathrm{P}(\, X \;>\; s+t \mid X \;>\; t\,) \;<\; \mathrm{P}(\, X \;>\; s\,)$$

teljesül minden $s, t \;\geq\; 0$ esetén.

Példa az életből: Ilyen öregedő valószínűségi változó egy elhasználódó alkatrész (mondjuk gumiabroncs) élettartama. Egy használt abroncs nyilván rosszabb esélyekkel néz a jövő elébe, mint egy új.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \;\; (x \;\geq\; 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá az öregedő tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\, X \;>\; s+t \mid X \;>\; t\,) \;<\; \mathrm{P}(\, X \;>\; s\,)$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} \;<\; T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-(s+t)^2}}{\mathrm{e}^{-t^2}} \;<\; \mathrm{e}^{-s^2}$$

$$\mathrm{e}^{-(s+t)^2} \;<\; \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \mathrm{e}^{-s^2}$$

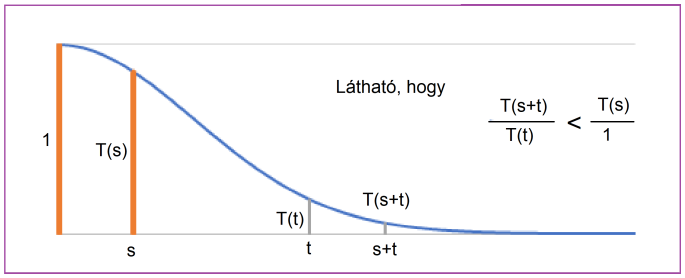
$$-(s+t)^2 < \; -t^2 - s^2$$

$$(s+t)^2 \;>\; t^2 + s^2$$

$$s^2 + t^2 + 2st \;>\; t^2 + s^2$$

$$2st \;>\; 0$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük az öregedés tényét:



67. ábra. *A* $T(x) = e^{-x^2} \;\; (x \;\geq\; 0)$ *öregedő jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

Vetier András – Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.1.4. Fiatalodó tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik a **fiatalodó tulajdonsággal**, amennyiben

$$\mathrm{P}(\, X \,>\, s+t \mid X \,>\, t\,) \;>\; \mathrm{P}(\, X \,>\, s\,)$$

minden $s, t \,\geq\, 0$ esetén.

Életből vett példa: Ilyen fiatalodó valószínűségi változó például egy elmaradott országban született csecsemő életének hossza. Ahogy a sorozatos veszélyeken túljut, egyre nő a további életbenmaradásának az esélye. Egy öregebb gyermek jobb esélyekkel bír a jövőre nézve, mint egy újszülött.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá a fiatalodó tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\, X \,>\, s+t \mid X \,>\, t\,) \;>\; \mathrm{P}(\, X \,>\, s\,)$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} \;>\; T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}} \;>\; \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}} \;>\; \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$-\sqrt{s+t} \;>\; -\sqrt{t} - \sqrt{s}$$

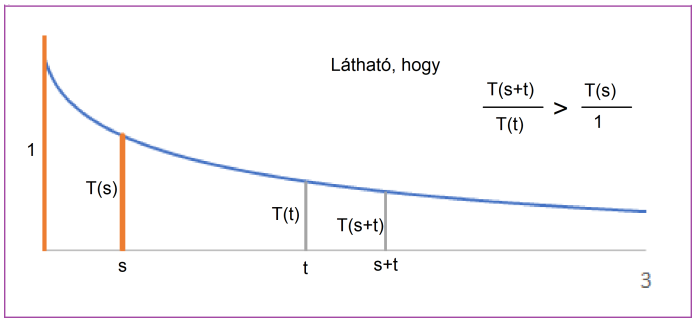
$$\sqrt{s+t} \;<\; \sqrt{t} + \sqrt{s}$$

$$\left(\, \sqrt{s+t}\,\right)^2 \;<\; \left(\, \sqrt{t} + \sqrt{s}\,\right)^2$$

$$s+t \;<\; s+t+2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

$$0 \;<\; 2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük a fiatalodás tényét:



68. ábra. *A* $T(x) = e^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$ *fiatalodó jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

Vetier András: Valószínűségszámítás – rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.2. Gamma eloszlás

Az n-ed rendű, λ paraméterű **gamma eloszlás**t az eloszlás- és a sűrűségfüggvény képletével definiáljuk.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Várható érték:

$$\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \frac{n}{\lambda}$$

Szórás:

$$\mathrm{SD}(\,X\,) \;=\; \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$$

Paraméterek: n pozitív egész, λ pozitív valós szám.

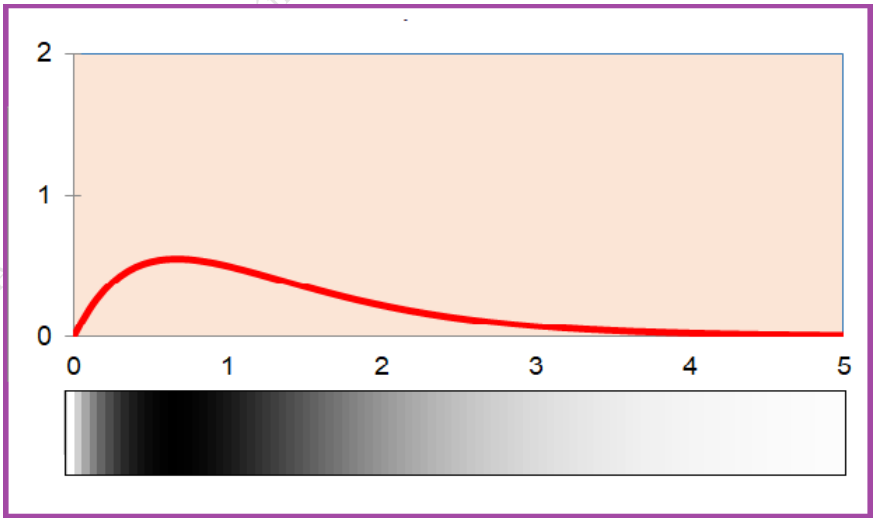
Az eloszlásfüggvény képletét $n = 1, 2, 3$ -ra szumma jel nélkül is felírjuk:

$n = 1$ -re: $\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (exponenciális eloszlás)

$n = 2$ -re: $\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}$

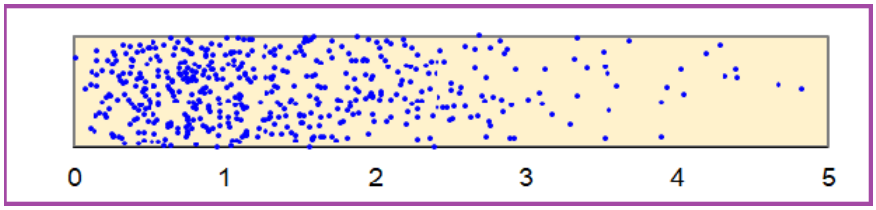
$n = 3$ -ra: $\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \dfrac{(\lambda x)^2}{2}\, e^{-\lambda x}$

Másod rendű gamma eloszlás ábrái:

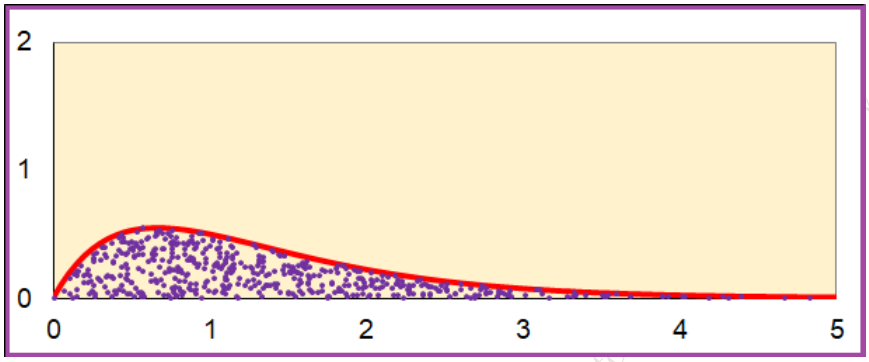


69. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*

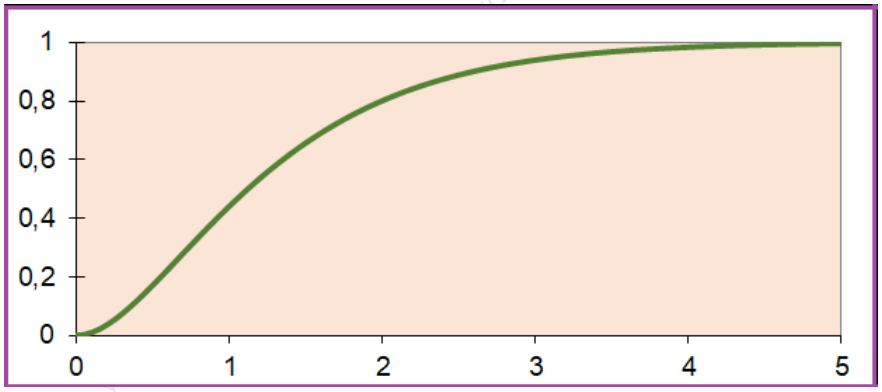
Vetier Á mítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók



70. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*

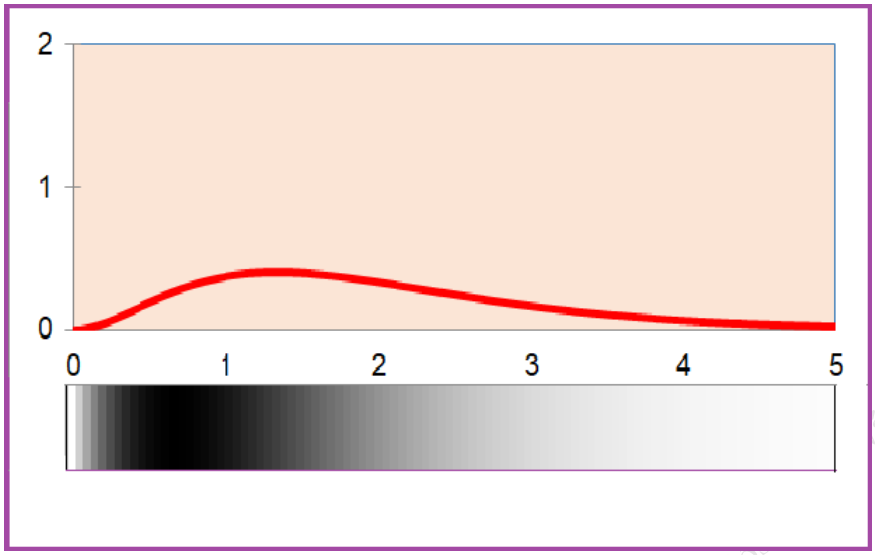


71. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*

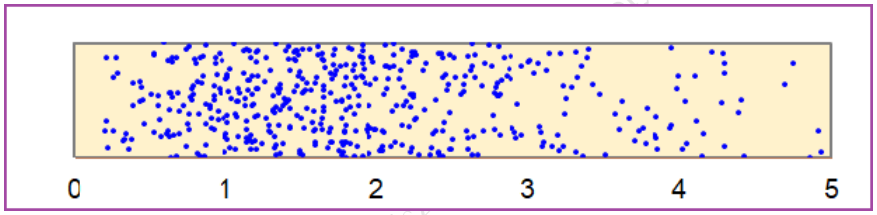


72. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: eloszlásfüggvény*

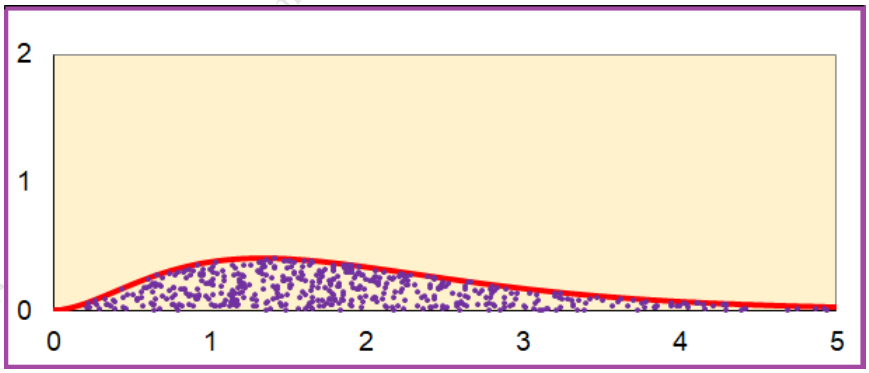
Harmad rendű gamma eloszlás ábrái:



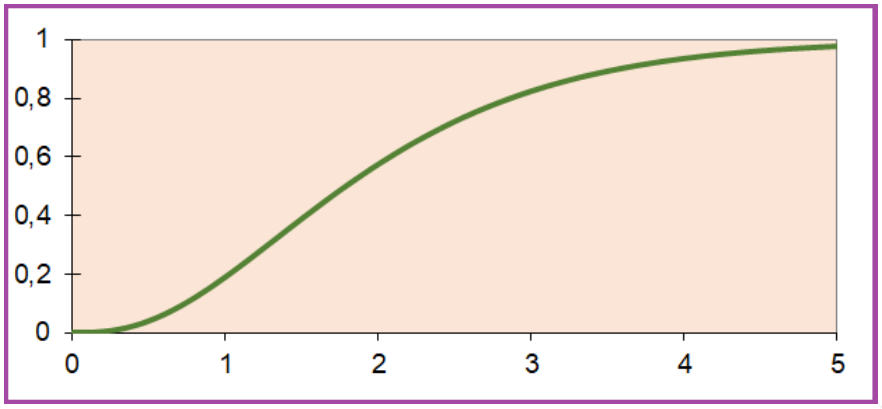
73. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



74. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



75. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



76. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: eloszlásfüggvény*

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

$$\texttt{GAMMA.DIST(}\ x\ ;\ n\ ;\ \tfrac{1}{\lambda}\ ;\ \texttt{FALSE}\ \texttt{)}$$

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt pedig

$$\texttt{GAMMA.DIST(}\ x\ ;\ n\ ;\ \tfrac{1}{\lambda}\ ;\ \texttt{TRUE}\ \texttt{)}$$

A képletben az $\frac{1}{\lambda}$ nem sajtó hiba: A szóbanforgó argumentum tényleg a λ reciproka.

Vegyes András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.2.1. Mennyi idő múlva történik az n -ik baleset?

Képzeljünk el egy nagy várost, ahol a forgalom éjjel-nappal egyforma intenzitással zajlik. Állítjuk, hogy :

1. az az időtartam, amennyit várni kell az **első** baleset bekövetkezésére, exponenciális eloszlást követ,
2. az az időtartam, amennyit várni kell a **második** baleset bekövetkezésére, 2 -od rendű gamma eloszlást követ,
3. az az időtartam, amennyit várni kell a **harmadik** baleset bekövetkezésére, 3 -ad rendű gamma eloszlást követ,

   és így tovább

Az eloszlásfüggvények képletének levezetése: Itt kissé lejjebb az 1. pontban megismételjük azt a gondolatmenetet, melyet az exponenciális eloszlással kapcsolatban már korábban elmondtunk. Ezután a 2. és 3. pontban általánosítjuk ezt a gondolatmenetet.

Minden x időtartammal kapcsolatban tekinthetjük azt a valószínűségi változót, ami azt mutatja, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban hány baleset történik. Világos, hogy adott x mellett ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ. A Poisson eloszlás paramétere nyilván függ a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallum hosszától. Ha a forgalom folyamatosan ugyanolyan körülmények között zajlik, akkor ennek a valószínűségi változónak a várható értéke arányos az x időtartam hosszával, vagyis λx -szel egyenlő, ahol λ az egységnyi hosszúságú időtartam alatti balesetek számának a várható értékét jelöli. Ezért annak a valószínűsége, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban pontosan k baleset történik, egyenlő

$$\frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

-szel. Erre a képletre támaszkodnak a következő számítások:

1.

$$\text{P(az \textbf{első} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ baleset történik)} = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} =$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Tehát az első balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

vagyis *az első balesetig eltelt időtartam expoenciális eloszlást (első rendű gamma eloszlást) követ* λ *paraméterrel.*

2.

$$\text{P(a \textbf{második} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ vagy } 1 \text{ baleset történik)} =$$
$$= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!} e^{-\lambda x} =$$
$$= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) e^{-\lambda x}$$

Tehát a második balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) e^{-\lambda x}$$

vagyis *a második balesetig eltelt időtartam másod rendű gamma eloszlást követ* λ *paraméterrel.*

3.

$$\text{P(a \textbf{harmadik} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$
$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ vagy } 1 \text{ vagy } 2 \text{ baleset történik)} =$$
$$= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2!} e^{-\lambda x} =$$
$$= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x}$$

Tehát a harmadik balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x}$$

vagyis *a harmadik balesetig eltelt időtartam harmad rendű gamma eloszlást követ* λ *paraméterrel.*

És így tovább, kiadódik, hogy az n -ik balesetig eltelt időtartam n -ed rendű gamma eloszlást követ λ paraméterrel.

Sűrűségfüggvények: A sűrűségfüggvények képletei deriválással és egyszerűsítéssel könnyen adódnak. Ez a számolás legyen az Olvasó feladata!

Megjegyzések:

Vetter Antonis – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

- A fenti gondolatmenetben szerepelt az a valószínűségi változó, ami azt mutatta, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban hány baleset történik. Mint már megbeszéltük, a mondott feltételek mellett ennek a valószínűségi változónak a várható értéke λx -szel egyenlő.
- A λ paraméter jelentése: átlagosan hány baleset történik egy egységnyi hosszúságú időintarvallumban.
- Az exponenciális eloszlás tárgyalásánál már említettük, hogy a várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokával. Ha például egy óra alatt a balesetek számának a várható értéke 2.5 , akkor az első balesetre átlagosan $\frac{1}{2.5} = 0.4$ órát kell várni.
- Az n -ed rendű λ paraméterű gamma eloszlás várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokának n -szeresével.

Vincze András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

6.2.2. Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van?

n darab izzóm van, melyekkel a világosságot fogom biztosítani a pincénkben addig, amíg az izzó-készletem tart. Az izzókat egymás után használom. Feltesszük, hogy az izzók élettartamai függetlenek és exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. Mindig, amikor az izzó kiég, azonnal becsavarom a következő izzót. Legyen X az az időtartam, amíg a készletemmel a világosságot tudom biztosítani.

Meg lehet mutatni, hogy ez az X valószínűségi változó gamma eloszlást követ n és λ paraméterekkel. A levezetést a feladatok között egy feladatsorozat formájában tálaljuk.

6.3. Normális eloszlások

6.3.1. Standard normális eloszlás

Ismert tény kalkulusból:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi}$$

Ha valakit izgat, hogy ezt a kissé furcsának tűnő tényt hogyan lehet igazolni, akkor íme a bizonyítás.

Bizonyítás: *(Extra tananyag)* A szóbanforgó integrál négyzetéről látjuk be, hogy 2π -vel egyenlő:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx =$$

A második integrálban az x változót y -ra cseréljük:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy =$$

A két integrál szorzatából egy kettős integrált kapunk a síkon:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \, dx \, dy = \iint_{\mathrm{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy =$$

Áttérünk polárkoordinátákra, és a kapott integrált szépen kiszámoljuk:

$$= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \, r \, dr \right) d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_{r=0}^{r=\infty} d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 1 \, d\phi = 2\pi$$

Ennyi volt a bizonyítás. Lám, nem is volt olyan bonyolult.

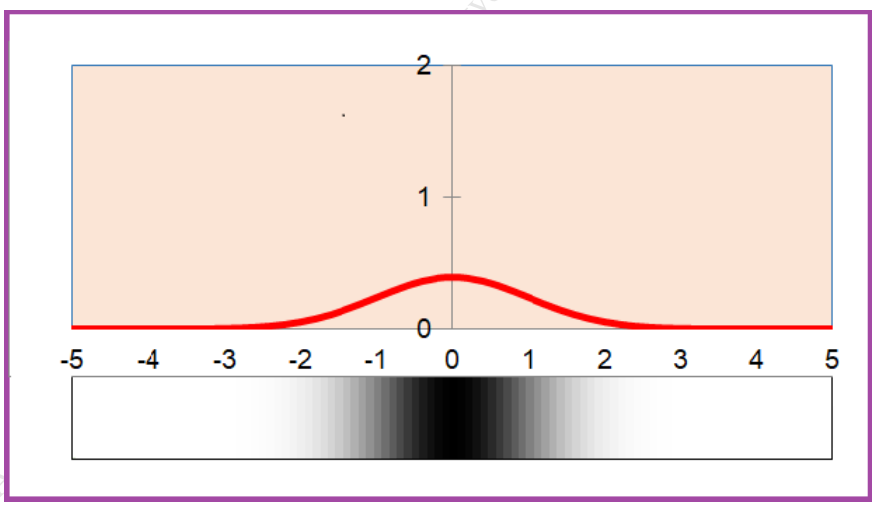
A *standard normális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

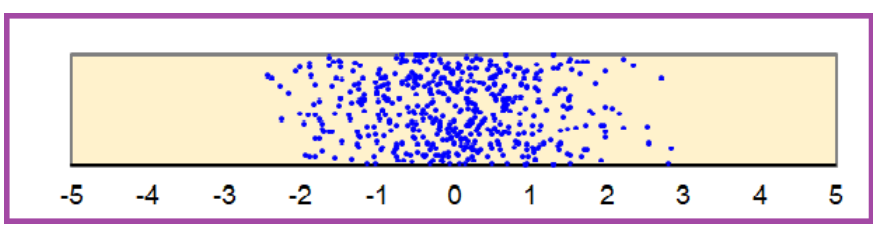
Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \, dt \quad (-\infty < x < \infty)$$

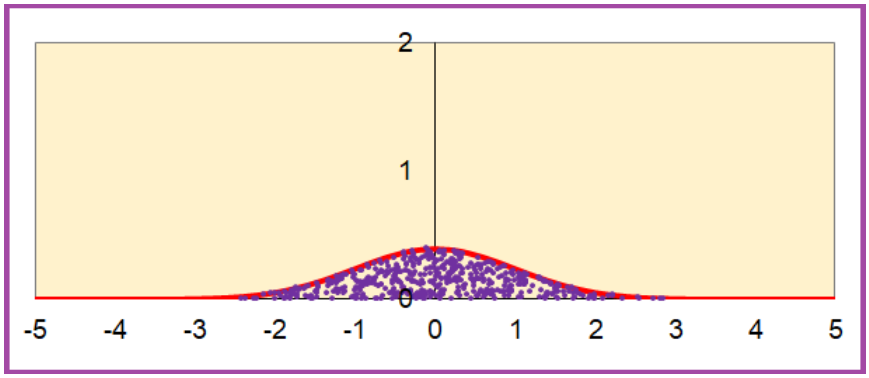
Vetier A... ydimenziós folytonos valószínűségi változók



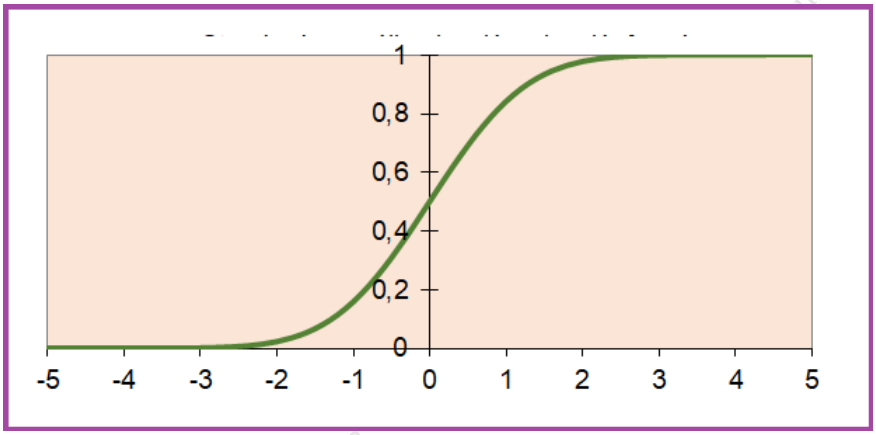
77. ábra. *Standard normális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



78. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



79. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



80. ábra. *Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény*

A megfelelő integrálok kiszámolásával adódik, hogy a standard normális eloszlás **várható értéke** 0 , **szórása** 1 .

Megjegyzés: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét és annak inverzét jól és biztonságosan kell tudni használni! Az eloszlásfüggvény és az inverzfüggvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Íme a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének egy egyszerű táblázata:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3.
ségi valtozók

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500	1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.9987
0.1	0.540	1.1	0.864	2.1	0.982	3.1	0.9990
0.2	0.579	1.2	0.885	2.2	0.986	3.2	0.9993
0.3	0.618	1.3	0.903	2.3	0.989	3.3	0.9995
0.4	0.655	1.4	0.919	2.4	0.992	3.4	0.9997
0.5	0.691	1.5	0.933	2.5	0.994	3.5	0.9998
0.6	0.726	1.6	0.945	2.6	0.995	3.6	0.9998
0.7	0.758	1.7	0.955	2.7	0.997	3.7	0.9999
0.8	0.788	1.8	0.964	2.8	0.997	3.8	0.9999
0.9	0.816	1.9	0.971	2.9	0.998	3.9	1.0000
1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.999	4.0	1.0000

A standard normális eloszlás szimmetriája. A standard normális eloszlás $\phi(x)$ sűrűségfüggvénye páros függvény, szimmetrikus az origóra. Ezért a $(-\infty; -x]$ és az $[x; +\infty)$ intervallumok valószínűségei egyenlők:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (x > 0)$$

A Φ függvény táblázatában ezért nincsenek negatív argumentumok. Negatív argumentum esetén a Φ függvény értékei – például – így számolhatók ki:

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841 = 0.159$$

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.033$$

Origóra szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy origóra szimmetrikus $[-r\,;\,r]$ intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$\Phi(r) - \Phi(-r) = \Phi(r) - [1 - \Phi(r)] = 2\,\Phi(r) - 1 \qquad (r > 0)$$

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan origóra szimmetrikus $[-r\,;\,r]$ intervallumot, melynek valószínűsége előre adott q érték. Ehhez – adott q mellett a

$$2\,\Phi(r) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani r -re. A megoldás:

$$r = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

Excel-függvények. A következő táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk standard normális eloszlással kapcsolatos számításokban:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$\varphi(x)$	`NORM.S.DIST(` x `;FALSE)`
Eloszlásfüggvény	$\Phi(x)$	`NORM.S.DIST(` x `;TRUE)`
Eloszlásfüggvény inverze	$\Phi^{-1}(y)$	`NORM.S.INV(` y `)`

Bizonyos Excel verziókban

`NORM.S.DIST` helyett `NORMSDIST`
`NORM.S.INV` helyett `NORMSINV`

is írható.

6.3.2. Normális eloszlás μ , σ paraméterekkel

Ha μ tetszőleges valós szám és σ tetszőleges pozitív szám, akkor a μ , σ paraméterű **normális eloszlás**t a sűrűségfüggvényével definiáljuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

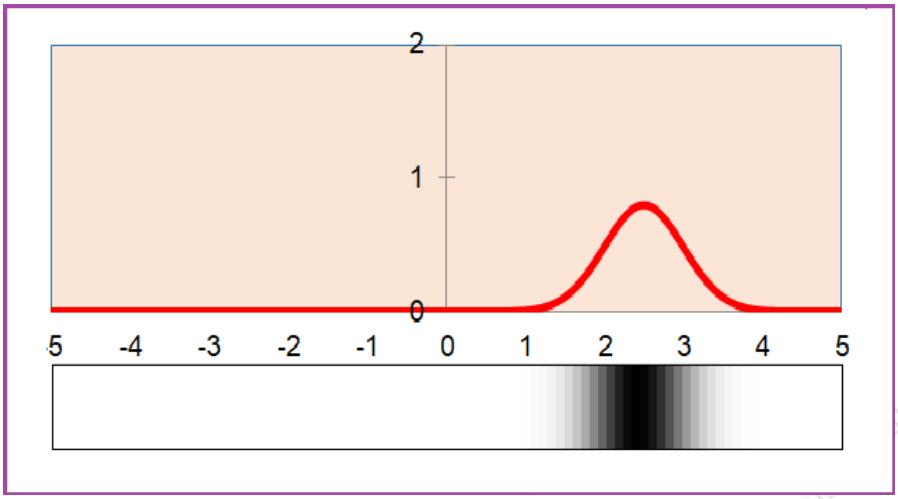
Az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}\, du \qquad (-\infty < x < \infty)$$

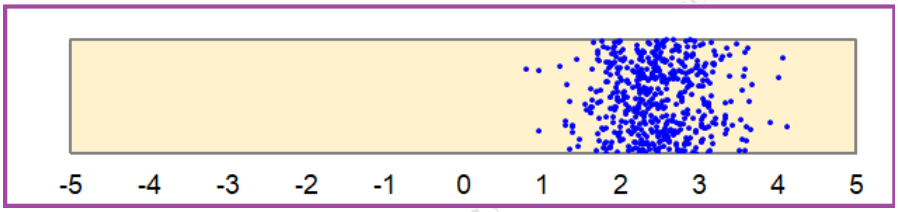
Ugyanezt az integrált kicsit pongyola, de előnyös módon úgy is írhatjuk, hogy az u integrálási változót is x -szel jelöljük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx \qquad (-\infty < x < \infty)$$

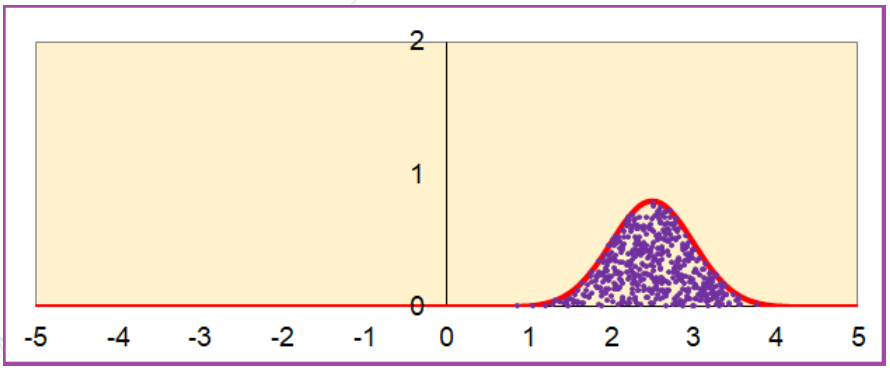
Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók



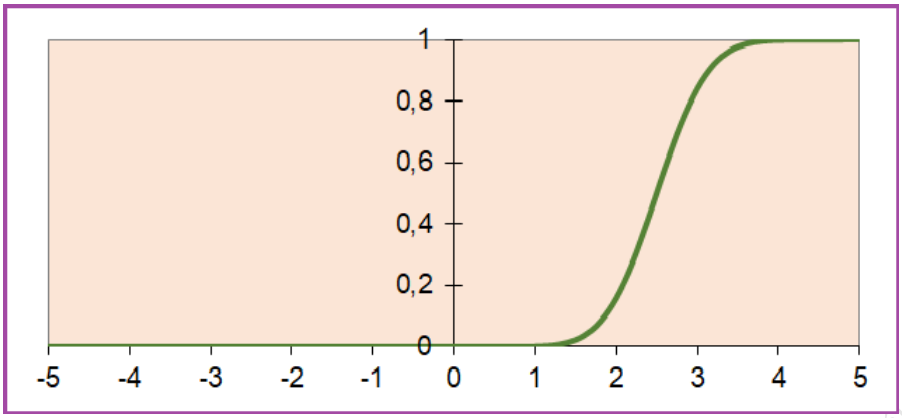
81. ábra. *Normális eloszlás* ($\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5$)*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



82. ábra. *Normális eloszlás* ($\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5$)*: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



83. ábra. *Normális eloszlás* ($\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5$)*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



84. ábra. *Normális eloszlás* ($\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5$)*: eloszlásfüggvény*

Az μ , σ paraméterű normális eloszlás **várható értéke** μ , **szórása** pedig σ .

A standard és nem standard normális eloszlások kapcsolata. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, és X -et megszorozzuk pozitív σ számmal, majd hozzáadunk μ -t, akkor μ, σ paraméterű normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk. Megfordítva is igaz: ha az Y valószínűségi változó μ , σ paraméterű normális eloszlást követ, és Y -ból kivonunk μ -t, majd pedig az eredményt elosztjuk σ -val, akkor standard normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk.

Standardizált érték, standardizált. Tetszőleges normális eloszlás eloszlásfüggvényének valamilyen x helyen vett $F(x)$ értéke egyenlő a standard normális eloszlás Φ -vel jelölt eloszlásfüggvényének a

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

helyen vett értékével:

$$F(x) = \Phi(\ z\ )$$

A most bevezetett z értéket az x érték *standardizált értéké*nek, *standardizáltjá*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a standardizált z értékből az

$$x = \mu + z \cdot \sigma$$

inverz összefüggéssel megkaphatjuk (visszakaphatjuk) az x értéket.

Tehát az $F(x)$ értékét úgy számoljuk ki, hogy vesszük az x szám z -vel jelölt standardizáltját, és a Φ táblázatában a z értéknél leolvassuk a $\Phi(z)$ -t.

Várható értékre szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy a várható értékre szimmetrikus

$$(\ \mu - r\,;\, \mu + r\ )$$

intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$F(\ \mu + r\ ) - F(\ \mu - r\ ) =$$

$$= \Phi\left(\ \frac{\mu + r - \mu}{\sigma}\ \right) - \Phi\left(\ \frac{\mu - r - \mu}{\sigma}\ \right) = \Phi(\ \frac{r}{\sigma}\ ) - \Phi(\ -\frac{r}{\sigma}\ ) =$$

Szeger András – Valószínűségszámítás – Jegyzet: Egyváltozós valószínűségi változók

$$= 2\,\Phi(\,\frac{r}{\sigma}\,) - 1$$

Ha r helyett $z \cdot \sigma$ -t írunk, akkor a

$$(\,\mu - z\,\sigma\,;\,\mu + z\,\sigma\,)$$

intervallum valószínűségét így kapjuk:

$$F(\,\mu + z\,\sigma\,) - F(\,\mu - z\,\sigma\,) =$$

$$= \Phi\left(\,\frac{\mu + z\,\sigma - \mu}{\sigma}\,\right) - \Phi\left(\,\frac{\mu - z\,\sigma - \mu}{\sigma}\,\right) = \Phi(\,z\,) - \Phi(\,-z\,) =$$

$$= 2\,\Phi(\,z\,) - 1$$

Az egy-szigma, két-szigma, három-szigma szabályok. Jegyezzük meg, hogy

- $z = 1$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 = 2\,(0.841) - 1 = 0.68 = 68\,\%$
- $z = 2$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 = 2\,(0.977) - 1 = 0.95 = 95\,\%$
- $z = 3$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 = 2\,(0.999) - 1 = 0.997 = 99.7\,\%$

vagyis a

- $(\mu - 1\,\sigma\,;\,\mu + 1\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.68 = 68\,\%$
- $(\mu - 2\,\sigma\,;\,\mu + 2\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.95 = 95\,\%$
- $(\mu - 3\,\sigma\,;\,\mu + 3\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.997 = 99.7\,\%$

Ezekre a szabályokra mint **egy-szigma szabály**, **két-szigma-szabály**, illetve **három-szigma-szabály** szokás hivatkozni. Nyilván 1-től, 2-től és 3-tól különböző z értékre is meg lehetne fogalmazni z **-szigma szabály**-t:

$$(\mu - z\,\sigma\,;\,\mu + z\,\sigma) \quad \text{intervallum valószínűsége körülbelül} \quad 2\,\Phi(z) - 1 = (\;2\,\Phi(z) - 1\;) \cdot 100\,\%$$

Intervallum keresése. Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan

$$(\,\mu - r\,;\,\mu + r\,)$$

avagy (r helyett $z \cdot \sigma$ -t írva)

$$(\,\mu - z\,\sigma\,;\,\mu + z\,\sigma\,)$$

intervallumot, melynek valószínűsége q . Ehhez a

$$2\,\Phi(z) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$z = \Phi^{-1}\left(\,\frac{1+q}{2}\,\right)$$

vagyis

$$r = \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\,\frac{1+q}{2}\,\right)$$

Lineáris transzformációk. Ha X normális eloszlású valószínűségi változó μ , σ paraméterekkel, a , b konstans számok, és X -et megszorozzuk a -val, majd hozzáadunk b -t:

$$Y = a\,X + b$$

Vetics András – Valószínűségszámítás – sorrészletek, gyűjtemények és folytonos valószínűségi változók

akkor normális eloszlást követő Y valószínűségi változóhoz jutunk. Y várható értéke nyilván $a\mu + b$, szórása pedig $|a| \cdot \sigma$.

Normális eloszlás az Excelben: A normális eloszlások eloszlásfüggvényeit és azok inverzeit *jól és biztonságosan kell tudni használni*! Az eloszlásfüggvény és az inverz függvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk normális eloszlásokkal kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$f(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `FALSE`)
Eloszlásfüggvény	$F(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `TRUE`)
Eloszlásfüggvény inverze	$F^{-1}(y)$	`NORM.INV(` y ; μ ; σ)

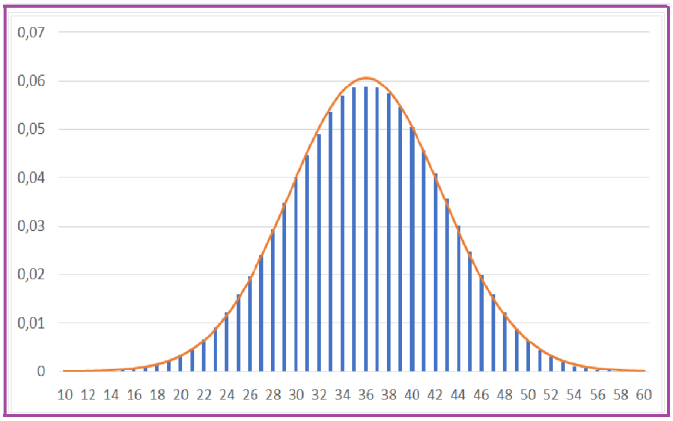
Bizonyos Excel verziókban

`NORM.DIST` helyett `NORMDIST`
`NORM.INV` helyett `NORMINV`

is írható.

6.3.3. Centrális határeloszlás tétel

A könyv első részében, a "Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt" című fejezetben láttuk, hogy a tagok számát növelve az összeg eloszlása egyre jobban közelített egy szép harang alakot. Most felfedjük a titkot, amit ott nem mondtunk meg: ez a harang alak egy normális eloszlás sűrűségfüggvényének a grafikonját jelenti. Az alábbi ábrán a tíz hamis dobókocka összegeként kapott valószínűségi változó eloszlásához hozzáillesztjük a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvényének a grafikonját is:



85. ábra. *Tíz hamis dobókocka összegének eloszlása és a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvénye*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Mivel a centrális határeloszlás tétel egzakt tárgyalása messze meghaladja egy bevezető valószínűségszámítás kurzus kereteit, az egzakt tárgyalástól eltekintünk. Csak pongyola formában fogalmazzuk meg a centrális határeloszlás tétel lényegét:

Ha egy valószínűségi változó *sok, független valószínűségi változó összege*ként áll elő, akkor – általában – ez a valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Fontos lenne azt megvizsgálni, hogy ebben a kijelentésben mit takarnak a *"sok"*, az *"általában"* és a *"közelítőleg"* szavak. Ennek a kérdésnek a részleteit nem tárgyaljuk csak megjegyezzük, hogy a *"sok"* általában nem is kell hogy igazán sok legyen. Például 12 darab (0 és 1 között egyenletes eloszlású) random szám összege már nagyon nagy pontossággal normális eloszlásúnak vehető. 12 darab random szám összegének a várható értékét és szórását könnyű kiszámolni, nemsokára megtanuljuuk, hogy hogyan lehet. A várható értékre nyilvánvalóan 6 , a szórásra pedig 1 jön ki. Ezért az

$$X = \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 + \mathrm{RND}_3 + \mathrm{RND}_4 + \mathrm{RND}_5 + \mathrm{RND}_6 +$$
$$+ \mathrm{RND}_7 + \mathrm{RND}_8 + \mathrm{RND}_9 + \mathrm{RND}_{10} + \mathrm{RND}_{11} + \mathrm{RND}_{12} - 6$$

(12 darab random szám összege mínusz 6)

képlettel definiált valószínűségi változó – még kényes, pontos számításokban is! – standard normális eloszlásúnak vehető.

6.3.4. Normális eloszlások alkalmazásai

1. A centrális határeloszlás tétel alapján normális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy *sok független tag összege*ként áll elő.

2. Sokszor csak *kényelmi okokból* használjuk a normális eloszlásokat, mert – különösebb elméleti magyarázat nélkül! – elfogadjuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és a normális eloszlás egyszerű lehetőséget kínál fel arra, hogy a várható érték, a szórás és bennünket érdeklő intervallumok valószínűségeivel numerikus számításokat végezzünk.

   (Ezt a munka stílust – hogy valamit csak kényelmi okokból használunk – nem szabad leszólni! Például az egyenletes eloszlásokat is – különösen többdimenziós problémák esetén – gyakran csak kényelmi okokból részesítjük előnyben a nem egyenletesekkel szemben.)

3. Mint látni fogjuk, *többdimenziós problémák* esetén, amikor vetület és feltételes eloszlásokkal kapcsolatban kell számításokat végeznünk, normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen – integrálások nélkül! – lehet dolgozni.

A normális eloszlás paramétereit vagy elméleti úton lehet kigondolni, vagy kísérleti eredmények átlagával, illetve szórásával kell közelíteni. A paraméterek elméleti kigondolásában segít, ha tájékozottak vagyunk a várható érték, a variancia és a szórás tulajdonságaival.

1. Feladat: Deszkák hossza. Egy faüzemben deszkákat gyártanak, melyek hossza normális eloszlást követ 200 cm várható értékkel és – egyelőre – ismeretlen σ szórással. Tapasztalatból tudjuk, hogy a deszkák 75 %-ának a hossza 195 és 205 cm közé esik. Hány százalékot tesznek ki azok a deszkák, melyek hossza 190 és 210 cm közé esik?

Megoldás: Ha egy véletlenszerűen választott deszka hosszát X -szel jelöljük, akkor a feladat szövege alapján:

$$\mathrm{P}(\ 195 < X < 205\ ) = 0.75$$

Ladányi András: Valószínűségszámítás jegyzet. Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Ez azt jelenti, hogy

$$F(205) - F(195) \;=\; 0.75$$

amiből néhány egyszerű lépéssel megkapjuk σ értékét:

$$\Phi\left(\frac{205-200}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{195-200}{\sigma}\right) = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sigma}\right) = 0.75$$

$$2\,\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = \frac{1+0.75}{2} = 0.875$$

$$\frac{5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.875) = 1.15$$

$$\sigma = \frac{5}{1.15} = 4.35$$

Ezek után:

$$\mathrm{P}(\,190 \;<\; X \;<\; 210\,) \;=\; F(210) - F(190) =$$

$$= \;\Phi\left(\frac{210-200}{4.35}\right) - \Phi\left(\frac{190-200}{4.35}\right) \;=\; \Phi(2.30) - \Phi(-2.30) \;=\; 2\,\Phi(2.30) - 1 \;=\; 0.98$$

Tehát a deszkák kb. $98\,\%$-ának a hossza esik 190 és 210 cm közé.

2. Feladat: A sarki zöldséges kerekítésekből adódó haszna (vesztesége). A sarki zöldségesnél csak készpénzzel lehet fizetni. A fizetendő összeget fel- vagy lekerekítik úgy, hogy a fizetendő összeg 5 -tel osztható legyen. Felmerül a kérdés: vajon a kerekítésekből a zöldségesnek mennyi extra haszna (vagy vesztesége) jöhet össze – mondjuk – egy nap alatt? A kérdést árnyaltabban kell feltenni, hiszen a napi extra haszon egyrészt függ a vásárlók számától, másrészt nyilván a véletlentől.

Árnyaltabban megfogalmazott kérdés: Mennyi annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – napi 1000 vásárló esetén a bolt kerekítésekből adódó extra haszna 100 forintnál több?

Megoldás: Egy-egy vevő esetében a kerekítésből adódó extra haszon a -2 , -1 , 0 , 1 , 2 (forint) lehetséges értékeket veheti fel. A zöldségesnél ezek az értékek egyforma esélyűeknek vehetők. (Nem így lenne, ha "Óra és ékszer" boltot vizsgálnánk!) A -2 , -1 , 0 , 1 , 2 értékeken vett egyenletes eloszlás várható értéke 0 , szórása pedig $\sqrt{2}$ -vel egyenlő – tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető 0 várható értékkel és $\sqrt{1000}\cdot\sqrt{2}$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, egyszerűen számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{1000}\cdot\sqrt{2}}\right) \;=\; 0.013$$

Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{N}\cdot\sqrt{2}}\right)$$

Az extra haszon eloszlásának a 0 -ra vonatkozó szimmetriája miatt ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy bolt vesztesége több, mint x forint.

A következő táblázatban néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vetier – Valószínűségszámítás – 2. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.013	0.240	0.412	0.472	0.491	0.497
100 Ft haszon	0.000	0.000	0.013	0.240	0.412	0.472
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.013	0.240
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

A táblázatból látszik az, amit mindennapos tapasztalatunkból is érzünk: a kerekítésekből adódó extra haszon vagy veszteség olyan kis eséllyel lépi túl az irigységre vagy aggodalomra okot adó forint határokat, hogy nyugodt szívvel eltekinthetünk az 1 és 2 forintos érmék használatától.

Köszönet: A kerekítésekből adódó extra haszonra, mint mindennapi életünkben felbukkanó valószínűségi változóra egy kedves (nevét közzé tenni nem akaró) hallgató hívta fel figyelmemet. Ezúton fejezem ki köszönetemet.

3. Feladat: Mi lenne, ha az 5 forintos érmét is kivonnák a forgalomból? Nyilvánvaló, hogy a zöldséges számára kedvező lenne, ha fizetéskor az 5 -re végződő számokat felkerekítenék, a vevő számára pedig az lenne kedvező, ha lekerekítenék. De vajon az ebből a kerekítésből adódó extra nyereségek is az elhanyagolható kategóriába esnek, vagy már nem? Vajon a felkerekítéses esetben mennyi lenne annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 1000 vásárló kapcsán a bolt extra haszna 100 forintnál több? (Ennek az eseménynek a valószínűségére az előző példában 0.013 jött ki.) És hogy is nézne ki ebben az esetben az előbbi táblázat?

Megoldás: A felkerekítéses esetben egy-egy vevőre vonatkoztatva a zöldséges kerekítésből adódó haszna a -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 (forint) lehetséges értékeket venné fel egyforma esélyekkel. Ennek az eloszlásnak a várható értéke 0.5 , a szórása 2.87. Tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető $1000 \cdot 0.5 = 500$ várható értékkel és $\sqrt{1000} \cdot 2.87$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, így számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100 - 500}{\sqrt{1000} \cdot 2.87}\right) = 0.999\,999\,9999\,9996$$

ami egy elég nagy valószínűség érték, ahhoz, hogy a szóbanforgó eseményt gyakorlatilag biztosnak tekintsük! Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x - N \cdot 0.5}{\sqrt{N} \cdot 2.87}\right)$$

Néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megint megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vetier András - Valószínűségszámítás 1. – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.291	0.918	1.000	1.000	1.000	1.000
100 Ft haszon	0.000	0.041	1.000	1.000	1.000	1.000
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000

A táblázatból is látszik az, amit józan eszünk is súg: felkerekítés esetén a zöldséges extra haszna, és így a vevők extra vesztesége mindenképpen több lenne annál, mint amit etikusan el lehet fogadni! Ha mégis meg kellene szüntetni az 5 forintos érmét, akkor valamit tenni kellene az igazságosság megőrzése érdekében.

6.4. Béta eloszlások várható értéke, szórása *(Extra tananyag)*

Ebben az alfejezetben levezetjük a béta eloszlások várható értékét, majd pedig második momentumát, varianciáját, szórását.

Mivel minden sűrűségfüggvénynek a teljes értelmezési tartományán vett integrálja 1 -gyel egyenlő, ezért fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^1 \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\;x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = 1$$

Ha valaki ezt az egyenlőséget közvetlenül integrálással szeretné megkapni akkor ennek sincs különösebb akadálya, hiszen parciális integrálásokkal és kellő türelemmel az $\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx$ integrál értékére kijön:

$$\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \qquad \textit{(nulladik formula)}$$

Érdemes ebben a nulladiknak nevezett formulában k és n helyett $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et, illetve $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t is írni. Hasznos összefüggéseket kapunk:

1. Írjunk k és n helyett először $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et! Ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+1)-1}\,(1-x)^{(n+1)-(k+1)}\,dx = \frac{((k+1)-1)!\,((n+1)-(k+1))!}{(n+1)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} \qquad \textit{(első formula)}$$

Szerző: András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

2. Írjunk most k és n helyett $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t! Most ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+2)-1}\,(1-x)^{(n+2)-(k+2)}\,dx = \frac{((k+2)-1)!\,((n+2)-(k+2))!}{(n+2)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!} \qquad \textit{(második formula)}$$

A béta eloszlások **várható érték**ének meghatározásánál az *első formula* segít nekünk:

$$\text{várható érték} = \int_0^1 x \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x \cdot x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^{k}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel az első formulát)

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{k}{n+1}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ***ha*** n ***random szám közül tekintjük a*** k ***-ik legkisebbet, és mindezt*** N ***-szer megismételjük, akkor – nagy*** N ***esetén – a tekintett a számoknak az átlaga körülbelül*** $\frac{k}{n+1}$ ***-nel egyenlő.***

Például ha 9 random szám közül az 5 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számok átlaga közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ hez.

A **második momentum** meghatározásánál a *második formula* segít nekünk:

$$\text{második momentum} = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!} =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel a második formulát)

$$= \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

A **variancia** és a **szórás** innen már egyszerűen adódik:

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{ várható érték })^2 = \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 = \frac{k}{n+1}\cdot\left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1}\right)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

$$\text{szórás} = \sqrt{\text{variancia}} = \sqrt{\frac{k}{n+1} \cdot \left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1} \right)}$$

A szórás képletekből látszódik, hogy ***ha*** k ***és*** n ***úgy tartanak a végtelenhez, hogy a*** $\frac{k}{n}$ ***arányuk egy*** c ***konstanshoz tart, akkor a szórás*** 0 ***-hoz tart.***

A két vastag dőlt betűvel írt tény együttesen azt fejezi ki, hogy *ha nagy* n *esetén* n *random szám közül tekintjük a nagyság szerinti* k *-ik legkisebbet, ahol* k *a* cn *-hez legközelebbi egész szám, és ezt* N *-szer megcsináljuk, akkor nagy* N *esetén a tekintett számoknak nem csak az átlaga lesz közel a* c *értékhez, hanem maguk a tekintett számok is a* c *érték körül fognak tömörülni.*

Például 999 random szám közül az 500 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számoknak nem csak az átlaga, hanem a számok döntő többsége közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ -hez.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

7. Közelítések normális eloszlással

7.1. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással

7.1.1. Előkészítés egy példával

Tegyük fel, hogy egy esős vasárnap délután egy 25 tagú társaság minden tagja – a többitől függetlenül – 0.3 valószínűséggel megy moziba. Véletlentől függ, hogy közülük hányan mennek moziba. Jelöljük ezt a valószínűségi változót X -szel. Ennek az X valószínűségi változónak az eloszlása, mint azt jól tudjuk, binomiális eloszlás $n = 25$ és $p = 0.3$ paraméterekkel. Az eloszlást először táblázatosan adjuk meg három tizedesjegy pontossággal:

x	$p(x)$
0	0.000
1	0.001
2	0.007
3	0.024
4	0.057
5	0.103
6	0.147
7	0.171
8	0.165
9	0.134
10	0.092
11	0.054
12	0.027
13	0.011
14	0.004
15	0.001
16	0.000
...	...

A táblázat utolsó sorában álló pontok azt fejezik ki, hogy az eloszlás többi tagja három tizedesjegyre kerekítve nullát ad. Ezért azokat már nem is foglaltuk bele a táblázatba.

Az eloszlás várható értéke:

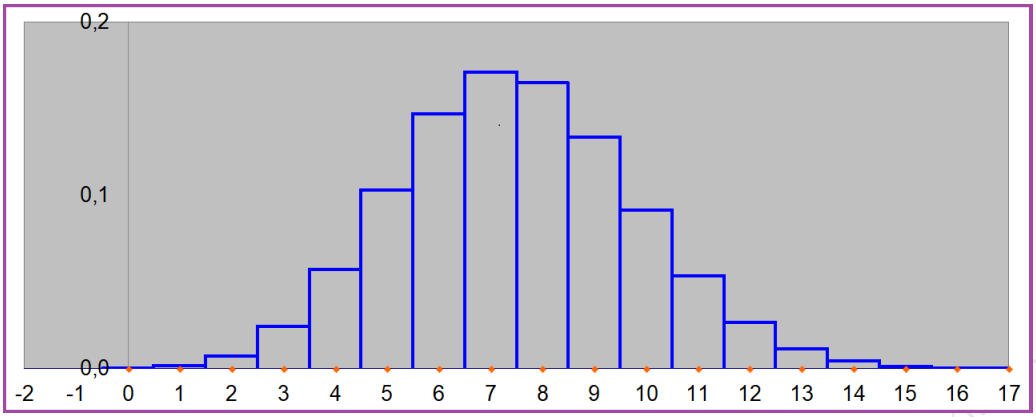
$$n \cdot p \;=\; 25 \cdot 0.3 \;=\; 0.75$$

szórása:

$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \;=\; \sqrt{25 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)} \;=\; 2.291$$

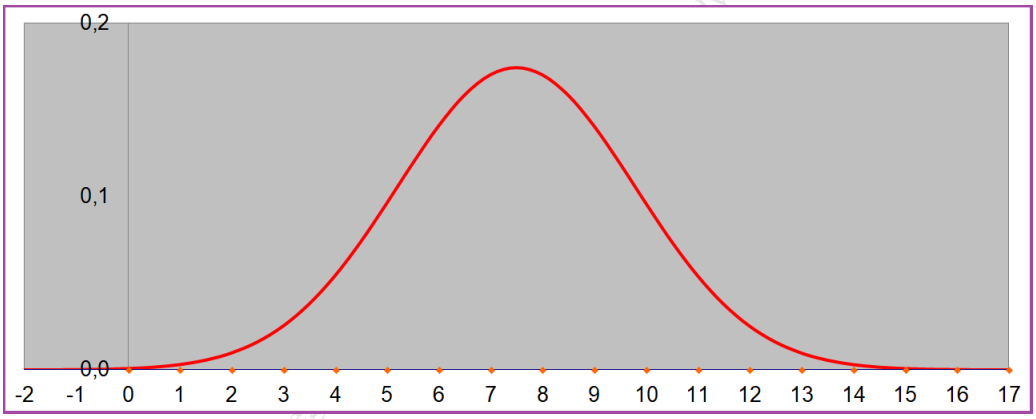
Az alábbi ábrán ezt a diszkrét eloszlást úgy ábrázoljuk, hogy az eloszlásban szereplő valószínűségeket területekkel adjuk meg: minden lehetséges értékhez egy olyan téglalapot rajzoltunk, melynek alapja egységnyi hosszúságú intervallum, és a magassága egyenlő a megfelelő valószínűséggel. Mivel az alap egységnyi hosszúságú, ezért a téglalap területe is egyenlő a megfelelő valószínűséggel.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész – Dimenziós folytonos valószínűségi változók



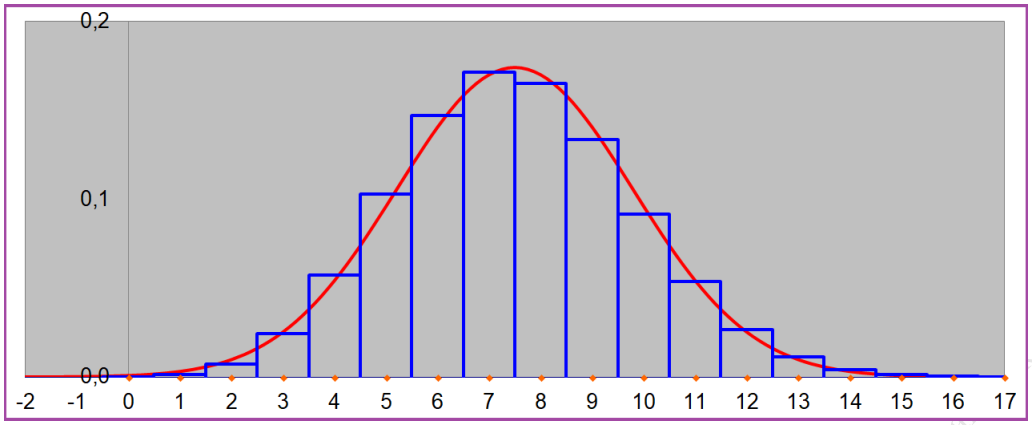
86. ábra. *Binomiális eloszlás*

Tekintsük most azt a normális eloszlást, melynek várható értéke és szórása megegyezik a binomiális eloszlás várható értékével és szórásával. A sűrűségfüggvény grafikonja így fest:



87. ábra. *Normális eloszlás*

Ha a két grafikont egy ábrán ábrázoljuk, szembetűnik, hogy binomiális eloszlás és a normális eloszlás gyönyörűen illeszkednek egymáshoz:

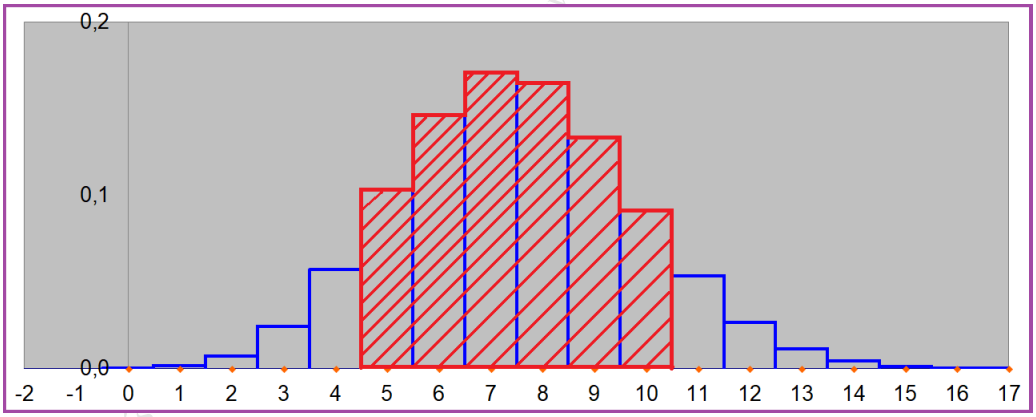


88. ábra. *Binomiális eloszlás és normális eloszlás közös ábrán*

Tekintsük példaként az $[\,5\,,\ 10\,]$ diszkrét intervallumot, azaz az $\{\,5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmazt! A binomiális eloszlás szerint ennek a valószínűsége (három tizedesjegy pontossággal):

$$0.103\ +\ 0.147\ +\ 0.171\ +\ 0.165\ +\ 0.134\ +\ 0.092\ =\ 0.812$$

Fontos, hogy a Kedves Olvasó megnézze, meggondolja, hogy ez a valószínűség mely téglalapok területeinek összegeként adódott. Az alábbi ábra bizonyára segít ebben:



89. ábra. *Valószínűség kiszámítása binomiális eloszlással*

Kézenfekvő, hogy ezt a területet – a binomiális eloszlás és a normális eloszlás közelsége miatt – közelíthetjük azzal a területtel, ami a normális eloszlás grafikonja alatt és a $[\,4.5\,,\ 10.5\,]$ intervallum felett találunk, és az alábbi ábrán szemléltetünk:

90. ábra. *Valószínűség kiszámítása normális eloszlással*

Ez a terület a $[\ 4.5\ ,\ 10.5\ ]$ intervallumnak a normális eloszlás szerinti valószínűségével egyenlő, amit az F eloszlásfüggvényből különbségként kapjuk:

$$F(\ 10.5\ )\ -\ F(\ 4.5\ )\ =$$

$$=\ \Phi\left(\ \frac{10.5-7.5}{2.291}\ \right)\ -\ \Phi\left(\ \frac{4.5-7.5}{2.291}\ \right)\ =$$

$$=\ \Phi(\ 1.318\ )\ -\ \Phi(\ -1.309\ )\ =$$

$$=\ 0.906\ -\ 0.095\ =$$

$$=\ 0.811$$

Figyelem! Nem elírás, hogy a normális eloszlás esetében a $[\ 4.5\ ,\ 10.5]$ intervallumot vettük a $\{\ 5,6,7,8,9,10\}$ halmaz helyett.

Vegyük észre, hogy a binomiális eloszlással kapott 0.812 érték és a binomiális eloszlással kapott 0.811 érték közel van egymáshoz!

7.1.2. A de Moivre – Laplace tétel

A de Moivre – Laplace tétel heurisztikus megfogalmazása. *Egy binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással, ha a binomiális eloszlás n paramétere aránylag nagy, és a p paramétere se a 0 -hoz se az 1 -hez nincs túl közel. A normális eloszlás várható értékét és szórását a binomiális eloszlás várható értékével és szórásával egyezőnek kell felvenni, vagyis a várható érték és a szórás:*

$$np \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{np(1-p)}$$

Ha n értéke legalább 25 , és p értéke 0.1 és 0.9 közé esik, akkor már jó a közelítés.

A gyakoriság közelítő eloszlása. *Ezért, ha egy esemény valószínűsége p , és az eseményre n kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény ν -vel jelölt gyakoriságának eloszlását (ami – mint tudjuk – binomiális eloszlás) normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:*

$$np \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{np(1-p)}$$

A valószínűségek számolásakor az intervallum megválasztására is figyelmet kell fordítani. Az $\{A; A+1, \dots B\}$ halmaz *binomiális eloszlás* szerinti valószínűsége:

$$\sum_{k=A}^{B} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A felírt valószínűségnek a *normális eloszlás*sal való közelítésekor az $[\ A-0.5\ ;\ B+0.5\ ]$ intervallumot kell venni:

$$F(\ B\ +\ 0.5\ )\ -\ F(\ A\ -\ 0.5\ )\ =$$

$$=\ \Phi\left(\ \frac{(B\ +\ 0.5)\ -\ n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\ \right)\ -\ \Phi\left(\ \frac{(A\ -\ 0.5)\ -\ n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\ \right)$$

7.1.3. A de Moivre – Laplace tétel, mint a centrális határeloszlás tétel speciális esete

Amikor – néhány oldallal ezelőtt – elképzeltük, hogy egy esős vasárnap délután egy 25 tagú társaság tagjai közül hányan mennek moziba, akkor csupán ezt az X valószínűségi változót vizsgáltuk. Ez a valószínűségi változó – az ottani feltételek mellett – binomiális eloszlást követ $n = 25$ és $p = 0.3$ paraméterekkel.

Most további valószínűségi változókat vezetünk be:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság legöregebb tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság legöregebb tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság második legöregebb tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság második legöregebb tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$X_{25} = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság } 25\text{-ik legöregebb (=legfiatalabb) tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság } 25\text{-ik legöregebb (=legfiatalabb) tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

Az X valószínűségi változó nyilván egyenlő ennek a független $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_{25},$ indikátor valószínűségi változóknak az összegével. Mivel itt a 25 már "sok"-nak tekintehtő, ezért a centáris határeloszlás tétel miatt X *eloszlása normális eloszlással közelíthető*.

Néhány bekezdéssel feljebb leszögeztük, hogy X *binomiális eloszlást követ*. Most azt kaptuk, hogy X eloszlása normális eloszlással közelíthető. Tehát kiadódik a de Moivre – Laplace tétel állítása: (a megfelelő feltételek teljesülése esetén) ***a binomiális eloszlás normális eloszlással közelíthető***.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

7.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

7.2.1. A relatív gyakoriság közelítő eloszlása

Mivel egy esemény relatív gyakorisága nem más mint a ν gyakoriság osztva a kísérletek n számával , a fentieknek nyilvánvaló következménye:

Ha egy esemény valószínűsége p , és az eseményre n kísérletet végzünk, akkor az esemény $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakorságának az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:

$$p \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Az alábbi következmény triviális:

A relatív gyakoriság és a valószínűség különbségének közelítő eloszlása. *Az esemény $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakorisága és az esemény p valószínűsége különbségének, vagyis az $\frac{\nu}{n} - p$ valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:*

$$0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

7.2.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény valószínűségét jelöljük p -vel. Tegyük fel, hogy adott egy ε -nal jelölt pontosság érték is. Ha az eseményre több kísérletet végzünk, és tekintjük az esemény ν -vel jelölt gyakoriságát, akkor a $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakoriságnak a p valószínűségtől való $\left| \frac{\nu}{n} - p \right|$ eltérése (a különbségük abszolút értéke) kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát a következő kérdés nagyon is értelmes.

Kérdés: Milyen biztonsággal (valószínűséggel) teljesül az, hogy a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való

$$\left| \frac{\nu}{n} - p \right|$$

eltérése kisebb ε -nál?

Válasz: A fentiek fényében a választ nem nehéz megadni, mert annak a valószínűségét, hogy az $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakoriság a p valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{\nu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \leq \frac{\nu}{n} - p \leq \varepsilon \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) = 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - 1$$

Jegier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Az alábbi táblázatan numerikusan érzékeltetjük, hogy a $p = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$ valószínűségek relatív gyakoriságokkal való közelítésekor a

$$2\ \Phi\left(\ \frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}\ \right)\ -\ 1$$

kifejezéssel megadott **biztonság (valószínűség) hogyan függ a kívánt ε pontosságtól és a kísérletek n számától**. A bal oldali táblázatban $p = 0.5$, a jobboldali táblázatban $p = 0.3$ avagy $p = 0.7$.

	0.10	**0.05**	**0.01**
50	0.84	0.52	0.11
100	0.95	0.68	0.16
500	1.00	0.97	0.35
1 000		1.00	0.47
5 000			0.84
10 000			0.95
50 000			1.00
kísérletek száma (n)			

0.10	**0.05**	**0.01**	**pontosság** (ε)
0.88	0.56	0.12	
0.97	0.72	0.17	
1.00	0.99	0.37	
	1.00	0.51	
		0.88	
		0.97	
		1.00	

Vegyük észre a táblázatban, hogy a biztonság értéke $p = 0.3$ és $p = 0.7$ esetén mindenhol nagyobb mint $p = 0.5$ esetén.

Szász András — Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

7.2.3. Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy . . . ?

Már a könyv elején – a tapasztalatra hivatkozva – leszögeztük, hogy egy eseménnyel kapcsolatban sok kísérlet végezve a relatív gyakoriság közelíti az esemény valószínűségét.

Természetesen felmerül az emberben a kérdés: mennyire sok ez a sok? Pontosabban feltéve a kérdést: adott pontosság és megbízhatóság eléréséhez hány kísérletet kell elvégezni? Ezekre a kérdésekre kapjuk meg a választ az alábbiakban.

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény (általunk nem ismert!) valószínűségét jelöljük p -vel. Legyen még adott egy q (1- hez közeli) valószínűség érték.

Kérdés: Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy q -nál nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság és a p valószínűség eltérése kisebb ε -nál?

A kérdés más formában: Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy adott esemény ismeretlen valószínűségét a relatív gyakoriság legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelítse, vagyis

$$\mathrm{P}\left(\ \left|\ \frac{\nu}{n}\ -\ p\ \right|\ \leq\ \varepsilon\ \right)\ \geq\ q$$

Válasz: A kérdéses valószínűséget a fentiekben meghatároztuk a Φ függvény segítségével, ezért az alább egyenlőtlenséget kell most n -re megoldani:

$$2\ \Phi\left(\ \frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}\ \right)\ -\ 1\ \geq\ q$$

Egyszerű átrendezéssel és a Φ függvény inverze segítségével kapjuk, hogy

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}\right) \geq \frac{1+q}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{p(1-p)}\,\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\varepsilon}$$

$$n \geq p(1-p)\,\frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

Mivel a jobboldalon szereplő $p(1-p)$ tényező legfeljebb $\frac{1}{4}$ lehet, az

$$n \geq \frac{1}{4}\,\frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség élesebb a korábbinál.

Tehát *az*

$$n \geq \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{4\,\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén az $\frac{\nu}{n}$ *relatív gyakoriság a* p *valószínűséget* ε *-nál kisebb hibával közelíti legalább* q *biztonság mellett, azaz*

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right) \geq q$$

A képletre támaszkodva egy táblázatot készítettünk, mely azt mutaja, hogy a táblázat bal oldalán megadott pontosság (ε) és a táblázat tetején megadott biztonság (q) teljesítéséhez hány kísérlet elvégzése elegendő:

$\varepsilon \setminus q$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.10	68	72	77	83	89	97	106	118	136	166
0.09	84	89	95	102	110	119	131	146	168	205
0.08	106	113	120	129	139	151	165	184	212	260
0.07	139	147	157	168	181	196	216	241	277	339
0.06	188	200	213	228	246	267	293	328	376	461
0.05	271	288	307	329	354	385	422	471	542	664
0.04	423	450	479	513	553	601	660	736	846	1 037
0.03	752	799	852	912	983	1 068	1 172	1 309	1 504	1 844
0.02	1 691	1 797	1 916	2 052	2 211	2 401	2 637	2 944	3 383	4 147
0.01	6 764	7 186	7 663	8 208	8 844	9 604	10 545	11 774	13 530	16 588

Érdemes a táblázat sorait és oszlopait kicsit tanulmányozni.

- Ha akármelyik soron vévigmegyünk, észrevehetjük, hogy a biztonság jelentősen nő (közeledik 1 -hez), miközben a kísérletszám aránylag keveset nő: az utolsó elem kb. csak két és félszerese az elsőnek.

Valószínűségszámítás _ 3. rész: Egyváltozós folytonos valószínűségi változók

- Ha pedig akármelyik oszlopon megyünk végig, láthatjuk, hogy a pontosság javításához (ε csökkentéséhez) a kísérletszám jelentős növelésére van szükség: az utolsó elem kb. százszorosa az elsőnek.

Példa: A krumplis tészta népszerűsége Magyarországon. Ha valaki arra kíváncsi, hogy a magyar felnőttek hányad része szereti a krumplis tésztát, akkor elvileg megkérdezhetné az összes felnőttet, és a válaszok alapján a kérdezett arányt pontosan ki tudná számolni. Ez eléggé költséges és hosszú munka lenne! De ha megelégszünk azzal, hogy az igazi arányt 0.05 pontossággal közelítsük 0.95 biztonság mellett, akkor – a táblázatból látjuk – ehhez elég

$$385 \text{ embert}$$

megkérdezni, és a válaszokból a krumlis tésztát kedvelők relatív gyakoriságát kiszámolni.

7.3. Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással

A centrális határeloszlás tétel szerint, ha elég sok – mondjuk n – független valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg eloszlása jó közelítéssel valamilyen normális eloszlás. Az előző fejezetben tanultak szerint az összeg várható értéke egyenlő a tagok μ_i várható értékeinek a

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n$$

összegével, szórása pedig a szórások négyzet-összegéből vont négyzetgyökével:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}$$

Ha a tagok egyforma eloszlást követnek, és így várható értékeik és szórásaik egyformák (ezeket a közös értékeket jelölje most μ , illetve σ), akkor az összeg eloszlását közelítő normális eloszlás paraméterei:

$$n \cdot \mu$$

illetve

$$\sqrt{n} \cdot \sigma$$

7.4. Várható érték közelítése átlaggal

7.4.1. Az átlag közelítő eloszlása

Korábban már megbeszéltük, hogy egy X valószínűségi változóra végzett $X_1, X_2, \ldots X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n}$$

átlaga – sok kísérlet esetén – általában közel van a valószínűségi változó várható értékéhez. (Kevés kísérlet esetén ez nem így van, gyakran adódhatnak jelentős eltérések is.) A következő állítás pontosabbá teszi azt, hogy ez a "közelség" mit jelent.

Szántai Tamás – Valószínűségszámítás – Egyszerű statisztika – Egyváltozós folytonos valószínűségi változók

Ha egy X valószínűségi változó várható értéke μ, szórása σ, és a valószínűségi változóra n kísérletet végzünk, melyek eredményeit $X_1, X_2, \cdot, X_n$ jelöli, akkor a kísérleti eredmények

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdot + X_n}{n}$$

átlagának az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei

$$\mu \qquad \text{és} \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Az alábbi következmény triviális:

A relatív gyakoriság és a valószínűség különbségének közelítő eloszlása. *Az $\frac{X_1+X_2+\cdot+X_n}{n}$ átlag és a μ várható érték eltérésének, vagyis az*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdot + X_n}{n} - \mu$$

valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei

$$0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

7.4.2. Várható érték közelítése átlaggal

Tegyük fel, hogy adott egy ε -nal jelölt pontosság érték. Az átlagnak a várható értéktől való eltérése kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát a következő kérdés nagyon is értelmes.

Kérdés: Milyen biztonsággal (valószínűséggel) teljesül az, hogy az átlagnak a várható értéktől való eltérése kisebb ε -nál?

Válasz: Annak a valószínűségét, hogy az átlag a várható értéket ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \right| \leq \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \leq \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \leq \varepsilon \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = 2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) - 1$$

7.4.3. Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy . . . ?

Kérdés: Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy egy X valószínűségi változó várható értékét a kísérleti eredményekből adódó átlag egy adott ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

Válasz: Ha az X valószínűségi változó várható értéke μ és szórása σ, továbbá $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jelöli az X -re végzett kísérleti eredményeket, akkor a kísérleti eredmények átlagának a μ -től való eltérése

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

Tudjuk, hogy ennek a különbségnek a várható értéke 0 , szórása pedig $\sigma/\sqrt{n}$. Azt is tudjuk, hogy – elég nagy n esetén ez a különbség is (közelítőleg) normális eloszlásúnak vehető. Ezért annak a valószínűsége, hogy ez a különbség $-\varepsilon$ és ε közé esik, közelítőleg így fejezhető ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{n} - \mu \right| \leq \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \leq \frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{n} - \mu \leq \varepsilon \right) =$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1$$

Ebből adódik: *Ha*

$$2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1 \geq q$$

azaz

$$\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)$$

vagyis

$$\sqrt{n} \geq \sigma\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]}{\varepsilon}$$

azaz

$$n \geq \sigma^2\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

fennáll, akkor az átlag legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket.

1. Megjegyzés: Ha az X valószínűségi változó normális eloszlást követ, akkor a kísérleti eredmények átlaga normális eloszlást követ. Ebben az esetben nem kell a centrális határeloszlás tételre sem hivatkozni a fenti számolásban, és a kísérletek számának sem kell nagynak lenni, a kísérletek száma akármilyen kicsi is lehet.

2. Megjegyzés: A korábban levezetett

$$n \geq p(1-p)\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képlet speciális esete a most levezetett

$$n \geq \sigma^2\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

általánosabb képletnek, hiszen egy esemény relatív gyakorisága nem más, mint az eseményre végzett kísérletek kapcsolódó indikátor változók átlaga, és – mint tudjuk – egy p valószínűségű esemény indikátor változójának a szórása $\sqrt{p(1-p)}$, szórásnégyzete (varianciája) $p(1-p)$.

Példa: Hány kilós az "egy kilós" kenyér?
Pontosabban: Mennyi az ÖSSZES "egy kilós" kenyér tömegének az ÁTLAGA?
Senki sem gondolja, hogy minden "egy kilós" kenyér tömege pontosan 1 kg. De vajon az összes ilyen kenyér tömegének mennyi az átlaga?

Ha az összes "egy kilós" kenyeret megmérnénk, pontosan válaszolhatnánk a kérdésre. Ámde az összes kenyeret megmérni gyakorlatilag lehetetlen. Természetes ötletnek tűnik, hogy véletlenszerűen választunk valahány kenyeret, azaz veszünk egy *mintát*, a mintába kerülő kenyereknek a tömegét átlagoljuk, és ezzel az átlaggal közelítjük az összes kenyér tömegének az átlagát.

Mivel a minta véletlentől függ, a mintából számított átlag általában eltér az összes kenyér tömegének az átlagától. Nyilván azt szeretnénk, hogy az eltérés ne legyen túl nagy. Mondjuk, szeretnénk azt elérni, hogy a minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) kisebb legyen.

Vetési Péter – Valószínűségszámítás – Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Ámde erre nincs garancia. A sors hozhatja úgy is, hogy a véletlenszerűen választott minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) nagyobbnak adódik.

Ezért meg kell elégednünk azzal, ha csak annyit garantálunk, hogy a minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése – mondjuk – (legalább) 0.95 valószínűséggel (0.95 biztonsággal) adódik 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) kisebbnek, és – sajnos – (legfeljebb) 0.05 valószínűséggel az eltérés 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) nagyobb is lehet.

Kérdés: Ehhez hány kenyeret kell lemérnünk?

Válasz: Ha ismerjük a kenyerek tömegének a σ szórását, vagy a szórásnak egy felső becslését, akkor a tanultak alapján válaszolni tudunk a kérdésre. Tegyük fel, hogy 0.9 kg-nál kisebb vagy 1.1 kg-nál nagyobb tömegű "egy kilós" kenyér sosem bukkan fel a boltokban, ezért a szórás legfeljebb 0.1 kg. A szükséges kísérletek számát megadó

$$\sigma^2 \ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képletbe behelyettesítve a $q = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $\sigma = 0.1$ értékeket, a képletből 96 -ot kapunk, ami azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy

96 véletlenszerűen választott kenyér

tömegének az átlaga az összes kenyér tömegének az átlagát 0.02 kg -nál kisebb hibával közelíti, legalább 0.95 .

Megjegyzések:

- Ha a pontosságot növeljük, akkor a szükséges kísérletszám nő: ha a 0.02 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük (a 0.95 -ös biztonsági szint megtartása mellett), akkor – a fenti képlet szerint – 385 mérésre van szükség, ami kb. 4 -szer több a 96 -nál.
- Ha biztonságot növeljük, akkor is nő a szükséges kísérletszám, de sokkal kisebb mértékben: ha 0.95 helyett 0.99 biztonsággal akarunk közelíteni (a 0.02 kg-os hibahatár megtartása mellett), akkor ehhez csak 166 mérésre van szükség, ami – arányaikat tekintve – a 96 -nál nem sokkal több.
- Ha a pontosságot is és a biztonságot is növeljük, akkor a szükséges kísérletszám erősebben nő: ha a 0.02 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük, és a 0.95 helyett a 0.99 biztonságra törekszünk, akkor ehhez 663 mérésre van szükség.

Kicsit más formában megismételjük a kapott eredményeket:

- Ha 96 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 2 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 385 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 1 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 166 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.99 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 2 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 663 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.99 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 1 dkg-nál kisebb hibával közelíti.

Vetier András – Valószínűségszámítás – Egyenletes eloszlás folytonos valószínűségi változók

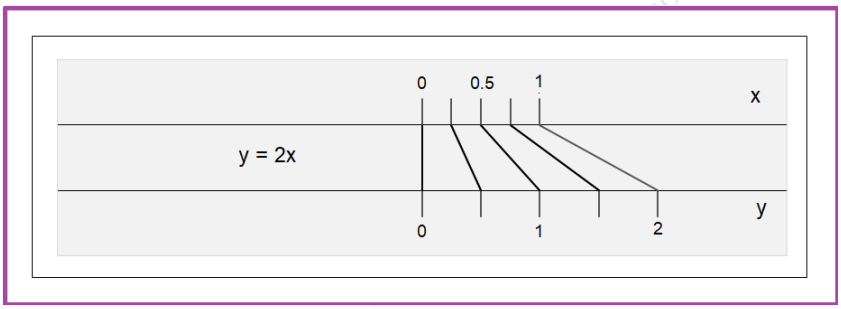
8. Eloszlások transzformációi

Az eloszlások transzformációival kapcsolatos tudnivalókat természetesen matematikai képletek segítségével is le fogjuk írni. Előbb azonban megpróbáljuk azzal segíteni az Olvasót, hogy a dolgok szemléletes jelentését ábrák segítségével előre bemutatjuk.

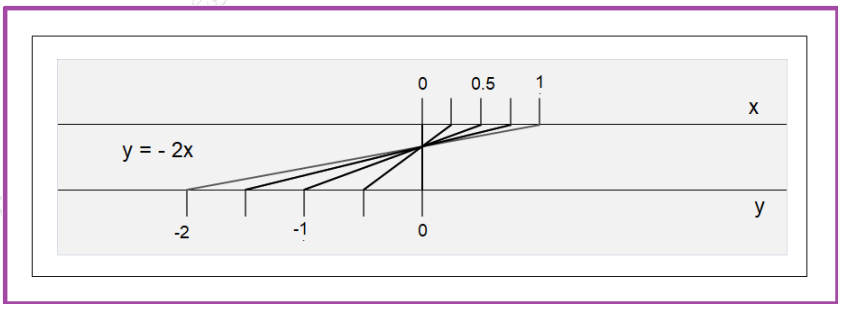
8.1. Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel

8.1.1. Szemléltetés vezérvonalakkal

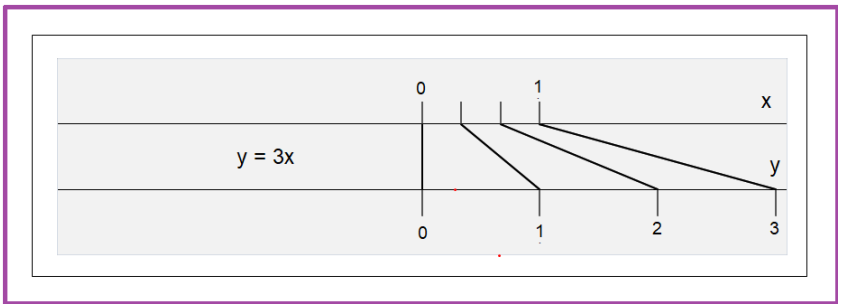
Korábbi tanulmányai során a Kedves Olvasó bizonyára tanulta, hogy egy transzformáció (egy függvény) egy hozzárendelési szabály jelent. A hozzárendelési szabályt mi most összekötő vonalakkal, ú.n. **vezérvonalak**kal ábrázoljuk néhány egyszerű példa segítségével.



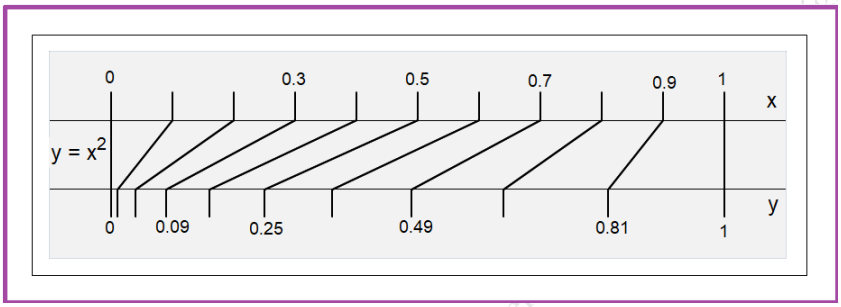
91. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



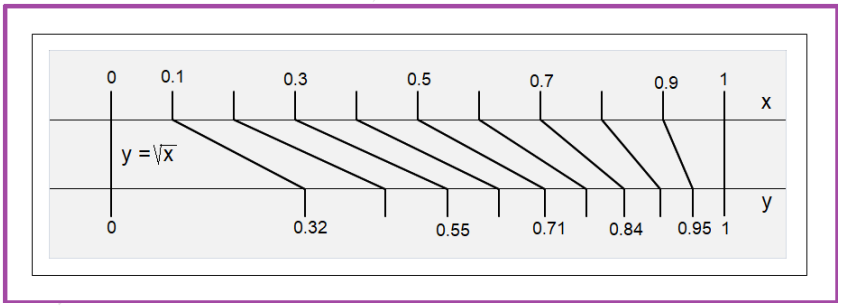
92. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = -2x$ *lineáris függvénnyel*



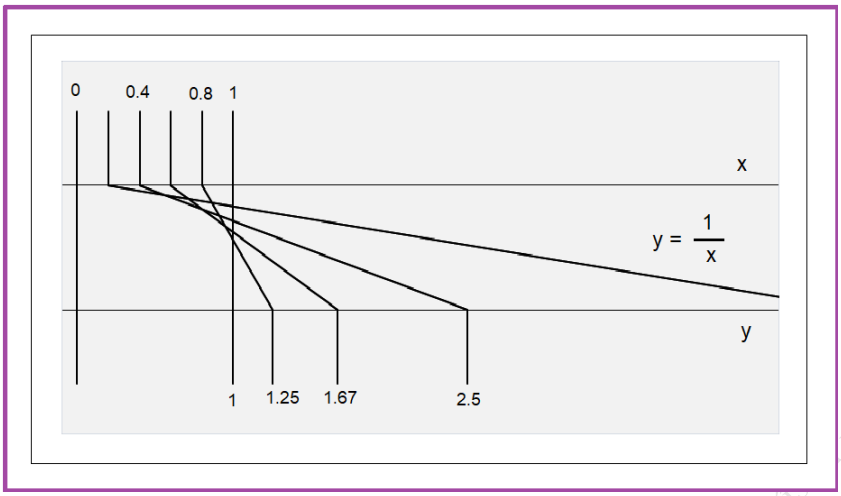
93. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = 3x$ *lineáris függvénnyel*



94. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a négyzetre emelés függvénnyel*



95. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a négyzetgyök függvénnyel*

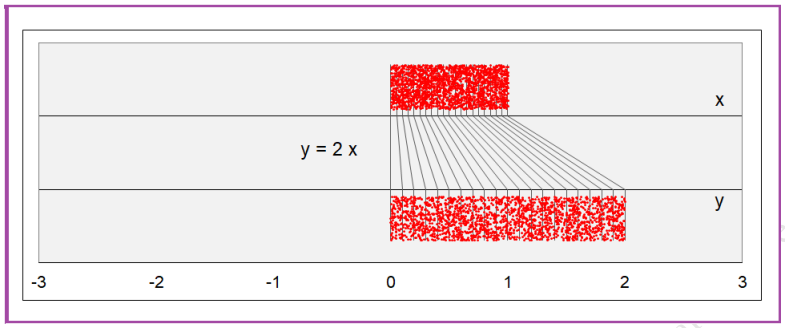


96. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a reciprok függvénnyel*

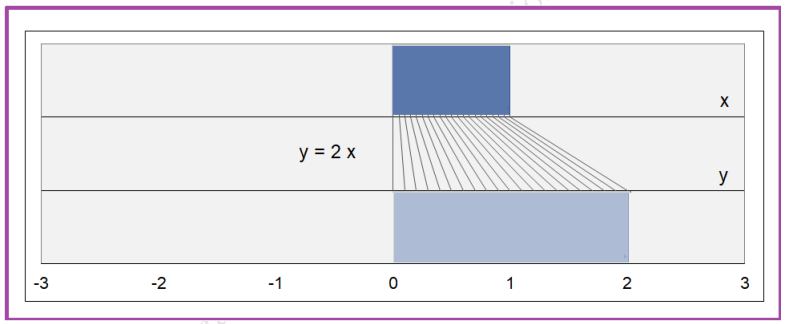
Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

8.1.2. Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi

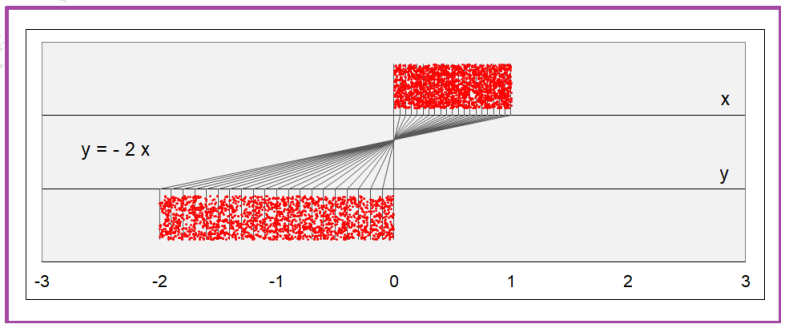
Ha egy lineáris transzformációt mint nyújtást (vagy zsugorítást) képzelünk el, akkor egy ilyen nyújtás során egy egyenletes pontfelhő is és egy egyenletes festék eloszlás is kinyúlik (zsugorodik), és egy ritkább (vagy sűrűbb) egyenletes pontfelhő, illetve egyenletes festék eloszlás lesz belőle. Ilyen ábrákat láthatunk itt:



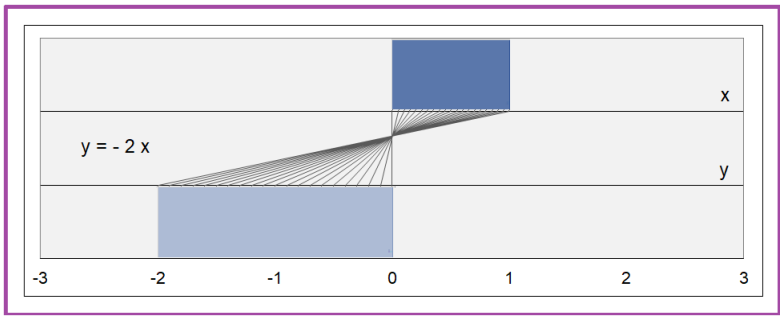
97. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



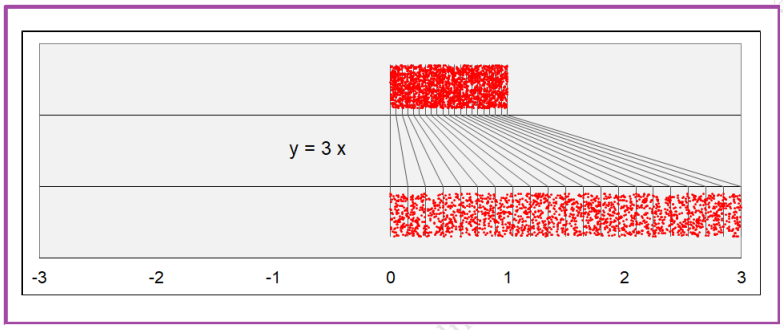
98. ábra. *A* $[0;1]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



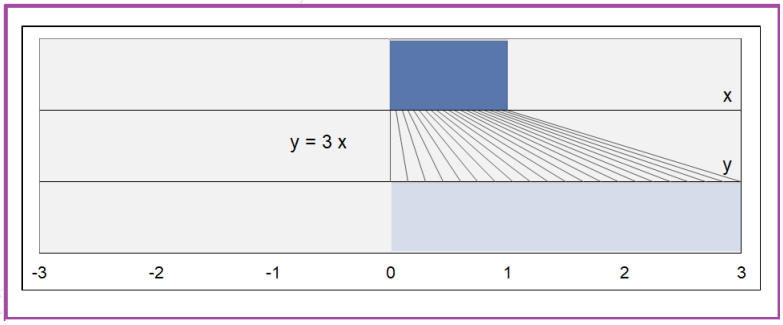
99. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y = -2x$ *lineáris függvénnyel*



100. ábra. *A* $[0;1]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y = -2x$ *lineáris függvénnyel*



101. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y = 3x$ *lineáris függvénnyel*

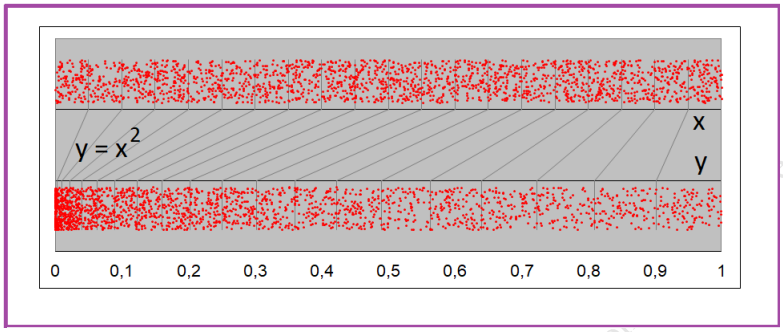


102. ábra. *A* $[0;1]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y = 3x$ *lineáris függvénnyel*

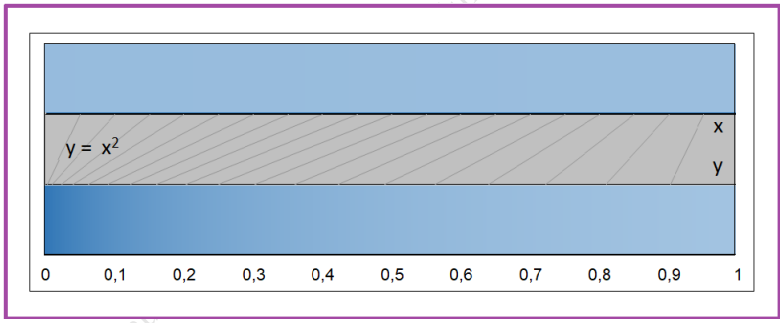
8.1.3. Egyenletes eloszlás monoton transzformációi

Ha egy monoton, nem lineáris transzformációt mint valamilyen deformációt képzelünk el, akkor egy ilyen deformáció során egy egyenletes pontfelhőből is és egy egyenletes festék eloszlásból is és nem egyenletes pontfelhő, illetve nem egyenletes festék eloszlás lesz. Ilyen ábrákat láthatunk itt:

Transzformáció a négyzetre emelés függvénnyel:

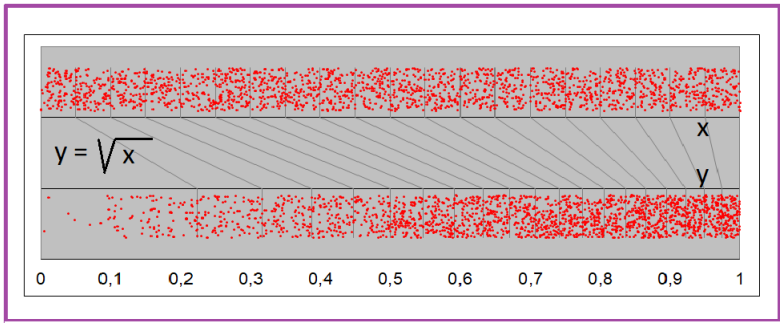


103. ábra. *Egyenletes eloszlású **pontfelhő** transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

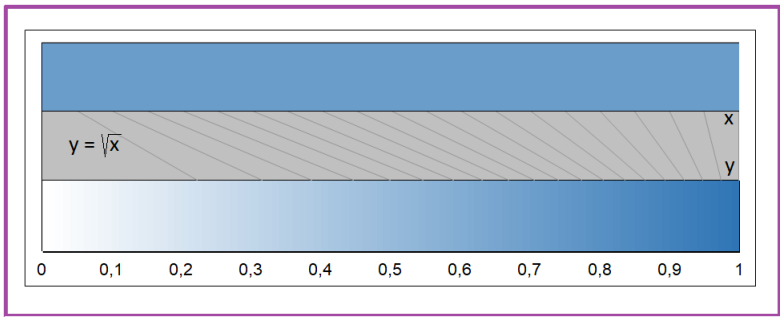


104. ábra. *Egyenletes **eloszlás** transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

Transzformáció a négyzetgyök függvénnyel:

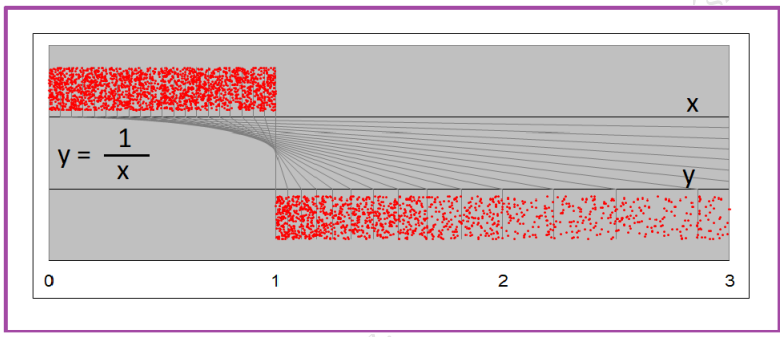


105. ábra. *Egyenletes eloszlású **pontfelhő** transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

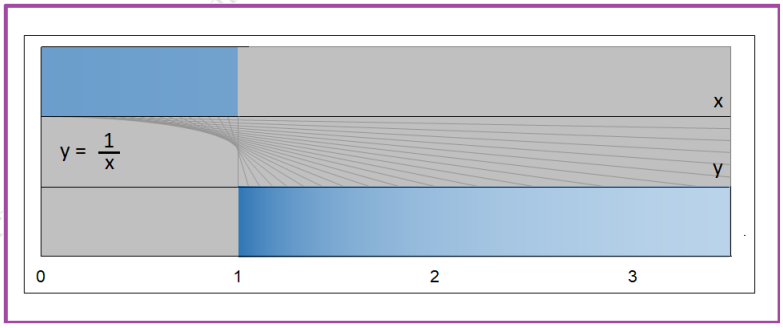


106. ábra. *Egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

Transzformáció a reciprok függvénnyel:



107. ábra. *Egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja a reciprok függvénnyel*



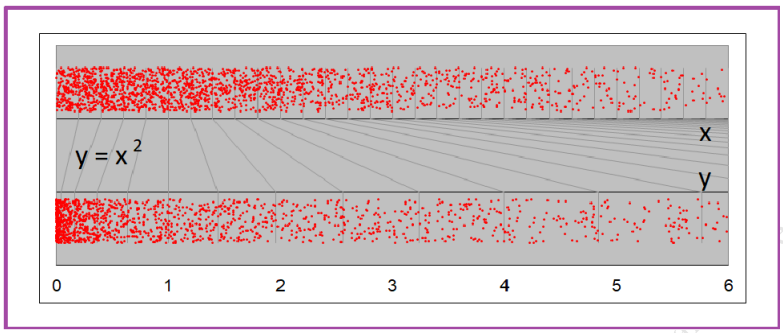
108. ábra. *Egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja a reciprok függvénnyel*

Vetier András – Statisztika – Egyetemi jegyzet – Az ismétlés és a szóródás mértékszámai – Az ismétlés és a szóródás mértékszámai – Szóródás – Szóródás – Szóródás

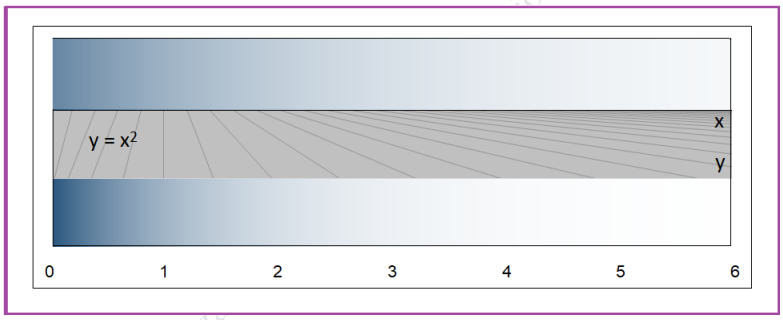
8.1.4. Exponenciális eloszlás transzformációi

Most pedig nem egyenlees eloszlású pontfelhőt, illetve festék eloszlást transzformálunk:

Transzformáció a négyzetre emelés függvénnyel:

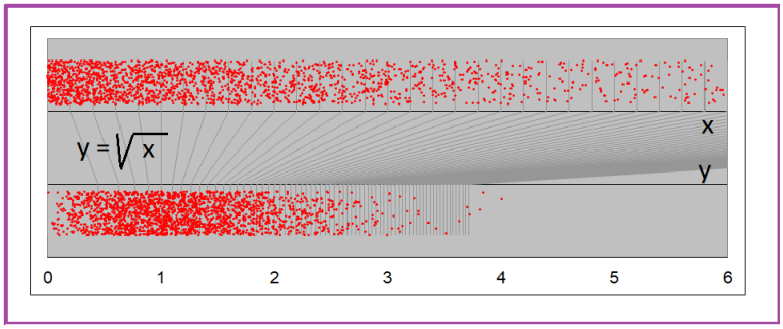


109. ábra. *Exponenciális eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

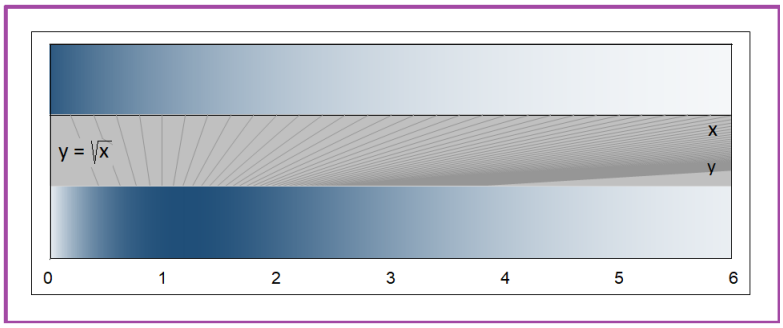


110. ábra. *Exponenciális eloszlás transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

Transzformáció a négyzetgyök függvénnyel:



111. ábra. *Exponenciális eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*



112. ábra. *Exponenciális eloszlás transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

8.2. Lineáris transzformációk leírása képletekkel

Megjegyzés: A 8.1 alfejezetben ábrákkal szemléltettük a eloszlások transzformációit. A 8.2 és 8.3 alfejezetekben a transzformációkat képletekkel írjuk le. A képletek tartalmának ábrákon való megjelenítése ezekben az alfejezetekben az Olvasó feladata.

A hőmérséklet egy adott helyen különböző időpillanatokban más és más lehet, ezért egy adott helyen a hőmérsékletet folytonos valószínűségi változónak tekinthetjük. A hőmérsékletet mérhetjük Celsius fokokban is és Fahrenheit fokokban is. Ami a Celsius skálán x fok, az a Fahrenheit y fok. x és y között a következő lineáris összefüggés áll fenn:

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

Ezért a Celsius fokokban mért X és a Fahrenheit fokokban Y véletlen értékek között is fennáll, hogy

$$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

Sok más esetben is előfordul, hogy két valószínűségi változó között egy lineáris kapcsolat áll fenn. Fontos, hogy ilyen esetekre megtaláljuk a kapcsolatot a valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényei között. Erről lesz szó ebben a fejezetben.

Ha a és b konstansokat jelölnek, akkor az $y = a\,x + b\,s$ képlet egy lineáris transzformációt jelent:

- Ha $a > 0$, akkor a számegyenes pontjait először a-szoros nyújtásnak vetjük alá, majd a nyújtással kapott pontokat ezután még b-vel eltoljuk. Ilyenkor a transzformáció egy növekedő függvényt jelent.
- Ha $a < 0$, akkor a nyújtást megelőzi egy tükrözés az origóra, majd ezt követi egy nyújtás $|a|$-szoros mértékben, és ezután jön az eltolás b-vel. Ilyenkor a transzformáció egy csökkenő függvényt jelent.
- Ha $a = 0$, akkor a számegyenes összes pontja a b pontba képződik. Ilyenkor a lineáris transzformációt **elfajuló**nak nevezzük.

A transzformáció inverzét nyilván az $x = \frac{y-b}{a}$ képlet adja meg.

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Ha az X valószínűségi változó értékeit és egy nem elfajuló (tehát $a \neq 0$) lineáris transzformációnak vetjük alá, azaz X helyett tekintjük az $Y = a\,X + b$ értéket, akkor egy új Y valószínűségi változóhoz jutunk. Fontos tudnunk, hogy milyen kapcsolat áll fenn X és Y eloszlás-, illetve sűrűségfüggvényei között.

Vattay András – Valószínűségszámítás – Egyváltozós folytonos valószínűségi változók

A kiindulásul vett X valószínűségi változó "régi" eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$-szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$-szel. A transzformációval kapott $Y = a\,X + b$ valószínűségi változó "új" eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$-nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$-nal.

8.2.1. Növekedő eset $(\,a > 0\,)$

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y = a\,x + b \qquad \text{illetve} \qquad x = \frac{y-b}{a}$$

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) = F(\,x\,) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) = f(\,x\,)\cdot\frac{1}{a} \qquad \text{illetve} \qquad g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = a\,x + b$, akkor az

$$Y < y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X < x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\,Y < y\,) = \mathrm{P}(\,X < x\,)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) = F(\,x\,)$$

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) = (\;G(y)\;)' = \left(F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)' = f\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = f(\,x\,)\cdot\frac{1}{a}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is.

Legyenek az

$$[\,x\,;\,x + \Delta x\,]\;, \qquad [\,y\,;\,y + \Delta y\,]$$

intervallumok a transzformációnál egymásnak megfelelő intervallumok, azaz

$$a\,x + b = y\;, \qquad a\,(\,x + \Delta x\,) + b = y + \Delta y$$

Veszter András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Vegyük észre, hogy

$$a\,\Delta x \;=\; \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; \frac{1}{a}$$

is igaz. Az transzformáció szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x \;<\; X \;<\; x+\Delta x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y \;) \;=\; \mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x \;)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y \;)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x \;)}{\Delta y} \;\approx$$

Most felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x \;) \;\approx\; f(x)\cdot\Delta x$$

ezt kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{f(x)\cdot\Delta x}{\Delta y} \;=\; f(x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\left(\,\frac{y-b}{a}\,\right)\;\cdot\;\frac{1}{a}$$

8.2.2. Csökkenő eset $(\; a \;<\; 0\;)$

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y \;=\; a\,x \;+\; b$, illetve $x \;=\; \frac{y-b}{a}$.

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\,(\,x\,) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) \;=\; 1 \;-\; F\left(\,\frac{y-b}{a}\,\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; -\,f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

illetve

$$g(y) \;=\; -\,f\left(\,\frac{y-b}{a}\,\right)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\left(\,\frac{y-b}{a}\,\right)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = \; a\,x \;+\; b$, akkor az

$$Y \;<\; y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X \;>\; x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\; Y \;<\; y\;) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;>\; x\;)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\,(\,x\,)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) \;=\; G'(y) \;=\; \left(\;1 \;-\; F\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)\right)' \;=\; -\,f\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)\cdot\frac{1}{a} \;=\; f\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)\cdot\frac{1}{|a|}$$

Mivel $\frac{y-a}{b} = x$, az is kiadódik, hogy:

$$g(y) \;=\; -\,f\,(\,x\,)\cdot\frac{1}{a} \;=\; f\,(\,x\,)\cdot\frac{1}{|a|}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. A levezetésnél oda kell figyelni arra tényre, hogy most a negatív. Legyenek az x és y pontok egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y \;=\; a\,x \;+\; b$$

Mivel a negatív, az $y \;+\; \Delta y$ pontnak megfelelő pont az x pont baloldalán van, jelöljük $x \;-\; \Delta x$ -szel:

$$y \;+\; \Delta y \;=\; a\,(\,x \;-\; \Delta x) \;+\; b$$

Tehát most az

$$[\,x \;-\; \Delta x\,;\,x\,]\;,\qquad [\,y\,;\,y \;+\; \Delta y\,]$$

intervallumok felelnek meg a transzformációnál egymásnak. Vegyük észre, hogy most

$$-\,a\,\Delta x \;=\; \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; -\,\frac{1}{a}$$

A transzformáció szigorúan monoton csökkedő tulajdonsága miatt az

$$y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(\,y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y\,) \;=\; \mathrm{P}(\,x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x\,)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\,y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y\,)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{P}(\,x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x\,)}{\Delta y}$$

Most felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(\,x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x\,) \;\approx\; f(x)\cdot\Delta x$$

ezt kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{f(x)\cdot\Delta x}{\Delta y} \;=\; f(x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; f\,(\,x\,)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) \;=\; f\,(\,x\,)\cdot\left(\frac{1}{|a|}\right) \;=$$

$$=\; -\,f\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)\cdot\frac{1}{a} \;=\; f\left(\;\frac{y-b}{a}\;\right)\cdot\frac{1}{|a|}$$

Vietier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egyszerű folytonos valószínűségi változók

8.2.3. A két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen a

$$g(y) \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

$$g(y) \;=\; f\left(\,\frac{y-b}{a}\,\right)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

képletek pozitív és negatív a esetén is helyesek.

8.3. Monoton transzformációk leírása képletekkel

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Az eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$ -szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel. Legyen

$$y \;=\; t(x)$$

egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény, melynek

$$x \;=\; t^{-1}(y)$$

-nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha az X valószínűségi változót behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet logikus $t(\mathrm{X})$ -szel jelölni. Az Y, vagyis $t(\mathrm{X})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

8.3.1. Növekedő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y \;=\; t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) \;=\; F\,(\,x\,) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) \;=\; F\,\big(\,t^{-1}(y)\,\big)$$

Tehát *az új eloszlásfüggvény nem más, mint a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény.*

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{dx}{dy} \qquad \text{azaz} \qquad g(y) \;=\; f\,\big(\,t^{-1}(y)\,\big)\;\cdot\;\big(\,t^{-1}(y)\,\big)'$$

Tehát a *z új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény megszorozva a transzformációs függvény inverzének a deriváltjával.*

Levezetés. Az $y \;=\; t(x)$ függvény szigorú monoton növekedő mivolta miatt az $Y \;<\; y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X \;<\; x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(\,Y \;<\; y\,) \;=\; \mathrm{P}(\;t(X) \;<\; y\;)$. Ezt felhasználva:

$$G(y) \;=\; \mathrm{P}(\,Y \;<\; y\,) \;=\; \mathrm{P}(\;X \;<\; x\;) \;=\; F(\;x\;) \;=\; F\big(\;t^{-1}(y)\;\big)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) \;=\; f\,\big(\,t^{-1}(y)\,\big)\cdot\big(\;t^{-1}(y)\;\big)' \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{dx}{dy}$$

Jetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egyváltozós folytonos valószínűségi változók

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x \;=\; t^{-1}(y)$$

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(\; Y \in J \;) \;=\; \mathrm{P}(\; X \in I \;)$$

másrészt

$$\frac{I\ \textit{hossza}}{J\ \textit{hossza}} \;\approx\; \frac{dx}{dy} \;=\; \left(\; t^{-1}(y) \;\right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(\; X \in I \;) \;\approx\; f(x) \cdot I$ hossza, azt kapjuk, hogy

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\; Y \in J \;)}{J\ \textit{hossza}} \;=\; \frac{\mathrm{P}(\; X \in I \;)}{J\ \textit{hossza}} \;\approx\; \frac{f(x) \cdot I\ \textit{hossza}}{J\ \textit{hossza}} \;=\; f(x) \cdot \frac{I\ \textit{hossza}}{J\ \textit{hossza}} \approx$$

$$\approx\; f(x) \cdot \frac{dx}{dy} \;=\; f\left(\; t^{-1}(y) \;\right) \cdot \left(\; t^{-1}(y) \;\right)'$$

8.3.2. Csökkenő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y \;=\; t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F(\; x \;) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) \;=\; 1 \;-\; F\left(\; t^{-1}(y) \;\right)$$

Tehát *az új eloszlásfüggvény úgy áll elő a régi segítségével, hogy a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvényt* 1 *-ből kivonjuk.*

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; f(\; x \;) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad \text{azaz} \qquad g(y) \;=\; f\left(\; t^{-1}(y) \;\right) \;\cdot\; \left|\left(\; t^{-1}(y) \;\right)'\right|$$

Tehát *az új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény megszorozva a transzformációs függvény inverze a deriváltjának az abszolút értékével.*

Levezetés. Az $y \;=\; t(x)$ függvény szigorú monoton csökkenő mivolta miatt az $Y \;<\; y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X \;>\; x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(\; Y \;<\; y \;) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;>\; x \;)$. Ezt felhasználva:

$$G(y) \;=\; \mathrm{P}(\; Y \;<\; y \;) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;>\; x \;) \;=\; 1 - \mathrm{P}(\; X \;<\; x \;) \;=\; 1 - F(\; x \;) \;=\; 1 - F\left(\; t^{-1}(y) \;\right)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) \;=\; -f\left(\; t^{-1}(y) \;\right) \cdot \left(\; t^{-1}(y) \;\right)' \;=\; f\left(\; t^{-1}(y) \;\right) \cdot \left|\left(\; t^{-1}(y) \;\right)'\right| \;=\; f(\; x \;) \;\cdot\; \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x \;=\; t^{-1}(y)$$

Veszk András: Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(\ Y \in J\ )\ =\ \mathrm{P}(\ X \in I\ )$$

másrészt

$$\frac{dx}{dy}\ =\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\ \approx\ -\ \frac{I\ hossza}{J\ hossza}$$

A derivált azért negatív, mert a $t^{-1}(y)$ függvény monoton csökkenő. Tehát

$$\frac{I\ hossza}{J\ hossza}\ \approx\ -\ \frac{dx}{dy}\ =\ -\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(\ X \in I\ )\ \approx\ f(x) \cdot I\ hossza$, azt kapjuk, hogy

$$g(y)\ \approx\ \frac{\mathrm{P}(\ Y \in J\ )}{J\ hossza}\ =\ \frac{\mathrm{P}(\ X \in I\ )}{J\ hossza}\ \approx\ \frac{f(x) \cdot I\ hossza}{J\ hossza}\ =\ f(x) \cdot \frac{I\ hossza}{J\ hossza}\ \approx$$

$$\approx\ f(x) \cdot \left(-\ \frac{dx}{dy}\right)\ = f\left(\ t^{-1}(y)\ \right) \cdot \left(-\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right)\ =$$

$$=\ f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|\ =\ f\left(\ t^{-1}(y)\ \right) \cdot \left|\left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right|$$

Az abszolút érték jel azért tudta felváltani a mínusz jelet, mert a derivált értéke negatív.

8.3.3. A két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen az abszolút értékjellel írt

$$g(y)\ =\ f\ (\ x\ )\ \cdot\ \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$g(y)\ =\ f\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)\ \cdot\ \left|\left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right|$$

képletek növekedő és csökkenő esetben is érvényesek.

8.4. Lognormális eloszlások

Ha a (μ, σ) paraméterű normális eloszlást az $y\ =\ \mathrm{e}^x$ transzformációnak vetjük alá, akkor a (μ, σ) paraméterű **lognormális eloszlás**hoz jutunk.

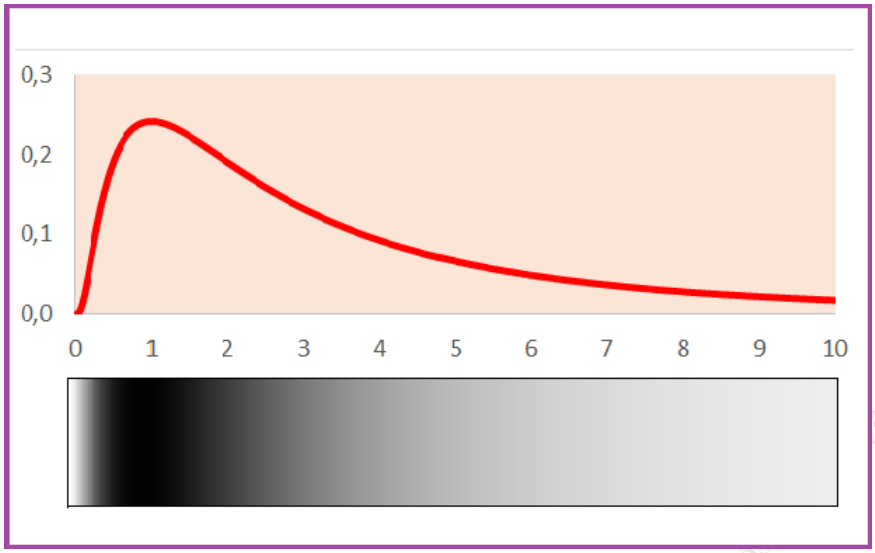
Eloszlásfüggvény:

$$F(x)\ =\ \Phi\left(\ \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\ \right)$$

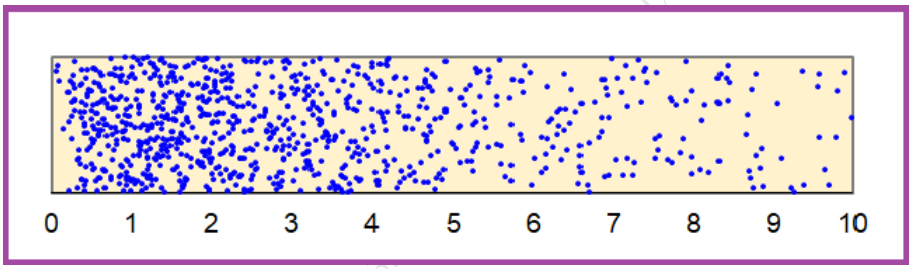
Sűrűségfüggvény:

$$f(x)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}\ \sigma x}\ \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ \left(\ \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\ \right)^2}$$

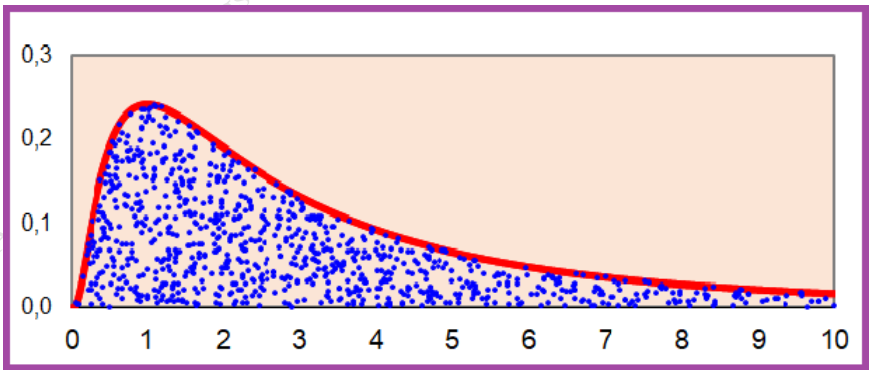
Vetier András – Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók



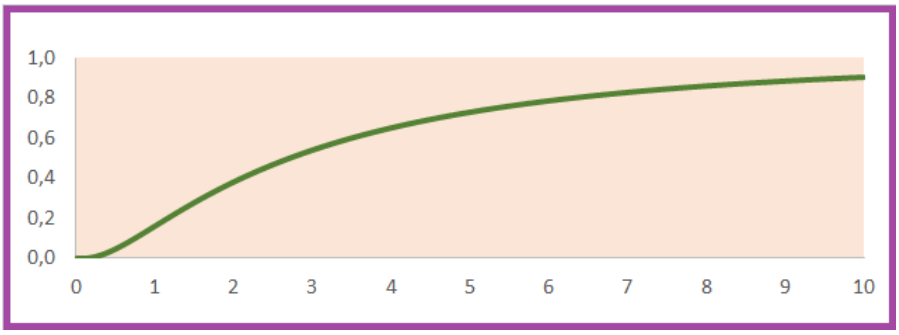
113. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1;\ \sigma = 1$)*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



114. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1;\ \sigma = 1$)*: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



115. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1;\ \sigma = 1$)*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



116. ábra. *Lognormális eloszlás* $(\mu = 1;\ \sigma = 1)$*: eloszlásfüggvény*

Összefüggések a paraméterek, a várható érték és a szórás között *(Extra tananyag):* Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

integrál kiszámolásával igazolható, hogy a (μ, σ) paraméterű lognormális eloszlást várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ \mathrm{e}^{x}\ )^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

integrál kiszámolásával meghatározhatjuk a második momentumot:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$$

Ennek segítségével megkapjuk a varianciát:

$$\mathrm{VAR}(\ X\ ) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \left(\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

Gyökvonással a szórás is adódik:

$$\mathrm{SD}(\ X\ ) = \sqrt{\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)}$$

Ha a várható értékre és a szórásra kapott formulákra most úgy tekintünk, mint μ -re és σ -ra vonatkozó egyenletrendszerre, akkor megkapjuk μ -t és σ -t a várható értékkel és a szórással kifejezve:

$$\mu = \ln(\ \mathrm{E}(\ X\ )\ ) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{\mathrm{SD}(\ X\ )}{\mathrm{E}(\ X\ )}\right)^2\right)$$

$$\sigma = \ln\left(1 + \left(\frac{\mathrm{SD}(\ X\ )}{\mathrm{E}(\ X\ )}\right)^2\right)$$

Ezeket a formulákat olyankor használhatjuk, ha egy X valószínűségi változóról tudjuk, hogy lognormális eloszlást követ, és az eloszlás paraméátereire van szükségünk. Ha valamilyen forrásból tudjuk a várható értéket és a szórást, akkor e formulák megadják a paramétereket.

Lognormális eloszlások alkalmazása:

Ha egy normális eloszlású valószínűségi változót az exponenciális függvénybe helyettesítünk, akkor lognormális eloszlású valószínűségi változóhoz jutunk. Másképpen mondva: *egy valószínűségi változó akkor követ lognormális eloszlást, ha a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlást követ.*

Emlékeztetünk rá, hogy

Vetier András – Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, 0 *-hoz közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó összegeként-ként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásának vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel, illetve

2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó össegeként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásának vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Mivel a logaritmus függvény szorzatot összegbe visz, az exponenciális függvény pedig összeget szorzatba visz, világos, hogy

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, 1 *-hez közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásának vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel; illetve

2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásának vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Tehát lognormális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy sok 1 -hez közeli értékeket felvevő vagy kis szórású, független tényező szorzataként áll elő.

Az Excelben a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényét az

$$\texttt{LOGNORM.DIST(}\, x\,;\mu\,;\sigma\,;\texttt{FALSE}\,\texttt{)}$$

képlet adja, az eloszlásfüggvényt pedig

$$\texttt{LOGNORM.DIST(}\, x\,;\mu\,;\sigma\,;\texttt{TRUE}\,\texttt{)}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)*

Az alábbi feladat kissé erőltetett, de – amiról szól – könnyen elképzelhető és elmagyarázható, és – szimulációval – a kísérlet könnyen meg is valósítható.

1. Feladat: Valaki – játékos vidám jó kedvében – feldob egy dobókockát. Ezután

- ha hatos jön ki, akkor generál egy valós 0 és 7 közötti, egyenletes eloszlást követő véletlen számot a `7*RAND()`, magyarul `7*VÉL()` Excel utasítással,
- ha nem hatos jön ki, akkor a `RANDBETWEEN(1;5)`, magyarul `VÉLKÖZÖTT(1;5)` Excel utasítással generál egy egész számot 1 és 5 között egyenletes eloszlás szerint.

Legyen X a generált szám. Milyen eloszlást követ X ?

Megoldás: Nem szorul különösebb magyarázatra, hogy X eloszlása egy folytonos és egy diszkrét eloszlásból keveréssel adódik:

- a folytonos eloszlás az egyenletes eloszlás a $(0;7)$ intervallumon, melynél a sűrűségfüggvény értéke $1/7$ -del egyenlő a $(0;7)$ intervallumban,
- a diszkrét eloszlás az egyenletes eloszlás az $1,2,3,4,5$ számok halmazán, melynél mind az öt pontban a súlyfüggvény értéke $1/5$ -del egyenlő.

A keverésnél

- a folytonos rész $1/6$ súlyt kap, hiszen a hatos $1/6$ valószínűséggel jön ki,
- a diszkrét rész $5/6$ súlyt kap, hiszen a nem-hatos valószínűsége $5/6$.

Ha az eloszlását szétkent egységnyi festékkel szemléltetjük, akkor ez az eloszlás így képzelhető el:

- először $1/6$ festékmennyiséget szétkenünk a $(0;7)$ intervallumon egyenletesen, vagyis úgy, hogy a festéksűrűség $(0;7)$ intervallumban mindenhol $1/6 \cdot 1/7 \;=\; 1/42$ legyen:

$$f(x) \;=\; 1/42 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 7)$$

- ezek után az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére ráhelyezzük a maradék $5/6$ festékmennyiség $1/5$ részét, vagyis az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére $5/6 \cdot 1/5 \;=\; 1/6$ nagyságú tömegpont kerül

$$p(x) \;=\; 1/6 \qquad (x = 1,2,3,4,5)$$

Hogy néz ki ennek az eloszlásnak az eloszlásfüggvénye? Legyen az Olvasó feladata a grafikon gondos elkészítése!

Vetier András – Valószínűségszámítás 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)*

Ez a fejezet egyáltalán nem része a tananyagnak. Amit itt lehet megérteni, annak nincs haszna a mindennapi gyakorlatban. Csak azok olvassák el, akik a matematika alkalmazhatósága mellett értékelik a matematika logikai tisztaságát is.

Tekintsük a balról zárt, jobbról nyitott $[0;1)$ intervallumot.

10.1. Trükkös eltolás

Az intervallum pontjaival kapcsolatban bevezetünk egy trükkös eltolást. Ha x egy eleme a $[0;1)$ intervallumnak, és r egy 1 -nél kisebb pozitív szám, akkor $x+r$ -t joggal nevezhetjük az x pont r -rel való eltoljának. $x+r$ nyilván kisebb 2 -nél.

Két eset lehet. Az egyik az, hogy $x+r$ még bele esik a $[0;1)$ intervallumba, a másik, hogy $x+r$ nagyobb 1 -nél. Ez utóbbi esetben viszont $x+r-1$ eleme a $[0;1)$ intervallumnak. Az $x+r-1$ érték azt mutatja, hogy $x+r$ mennyivel nagyobb 1 -nél. Az első esetben az $x+r$ számot, a második esetben az $x+r-1$ számot az x szám r -rel való **trükkös eltolt**jának nevezzük.

10.2. Barátok és osztályok

Azt mondjuk, hogy két 0 és 1 közötti szám **barát**, ha az egyik a másiknak valamilyen racionális számmal való trükkös eltoltja. A barátság relációját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy két szám egymás barátja, ha egymástól való távolságauk racionális szám. Nyilvánvaló, hogy a jóbarátság ekvivalencia reláció, ami a $[0;1)$ intervallumot diszjunkt **osztályok**ra bontja. Minden osztályban megszámlálhatóan végtelen sok elem van. Az osztályok száma koninuum.

10.3. Főnökök

Képzeljük el, hogy minden osztályban választanek egy jól definiált **főnök**öt. Azzal, hogy ezt hogyan teszik, mi nem foglalkozunk, legyen ez az osztály belső titka. Ezáltal kontinuum sok főnök lesz. A főnökök halmazát jelöljük F -fel.

Legyen r egy racionális szám. Ha minden főnököt az r számmal trükkösen eltolunk, akkor egy újabb kontinuum számosságú halmazhoz jutunk, amit F_r -rel jelölünk. Mivel a hosszúság invariáns az eltolással kapcsolatban, és az F_r halmaz eltolással származik F -ből, fennáll, hogy

$$F_r \text{ hossza} \quad = \quad F \text{ hossza}$$

Tehát minden 0 és 1 között r racionális szám esetén az F_r halmaznak ugyanannyi a hossza, mint az F halmaznak.

Vetítésgeometria – valószínűségszámítás – egydimenziós folytonos valószínűségi változók

10.4. Ellentmondásra jutunk

Világos, hogy ha az összes 0 és 1 közötti racionális számmal kapcsolatban tekintjük az F_r halmazokat, akkor ezek diszjunkt halmazok, és egyesítésük a $[0;1)$ intervallum. Ezért

$$[0;1) \text{ hossza} \quad = \sum_{r \text{ racionális szám } 0 \text{ és } 1 \text{ között}} F_r \text{ hossza}$$

Itt a bal oldalon 1 áll, a jobb oldalon pedig egy olyan szumma, ami megszámlálhatóan végtelen sok tagból áll, és minden tag egyforma.

Megszámlalhatóan végtelen sok egyforma tag összege nem lehet 1 -gyel egyenlő, hiszen megszámlalhatóan végtelen sok 0 összege is 0 , és megszámlalhatóan végtelen sokszor véve egy pozitív mennyiséget, az összeg végtelen. Ezért ellentmondásra jutottunk. Az ellentmondás abból származik, hogy az F halmaz hosszáról volt bátorságunk beszélni. Pórul jártunk, mert ellentmondásra jutottunk.

Ha el akarjuk kerülni az ellentmondást, akkor nem szabad azt képzelni, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza, és emellett még az eltolással kapcsolatos invarianciát is fenntartjuk.

Mivel az eltolással kapcsolatos invariancia gondolatmneteinkben nélkülözhetetlen, lemondunk arról, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza. Hasonlóképpen, egy olyan valószínűségszámítási probléma esetén, amikor az eseménytér számossága nagyobb, mint megszálálhatóan végtelen, nem lehet minden részhalmaznak van jól definiált valószínűsége.

A további részletekbe itt most nem megyünk bele, csak megjegyezzük, hogy

- az intervallumok valószínűségeit mindig egyértelműen lehet definiálni, és
- ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaznak lehet definiálni a valószínűségét, akkor ezek
  - komplementerének
  - úniójának
  - metszetének

  szintén lehet definiálni a valószínűségét.

Mivel a gyakorlatban felmerülő részhalmazokhoz az intervallumobkól kiindulva a felsorolt halmazműveletekkel jutunk, a gyakorlati alkalmazásokan felbukanó halmazoknak mindig lehet a valósznínűségéről beszélni. Ahhoz, hogy olyan halmazzal legyen valakinek dolga, aminek nincs valószínűsége, olyan jellegű absztrakt dolgokkal kell foglalkoznia, mint ahogy a főnökök halmazát fentebb értelmeztük.

Vetier András: Valószínűségszámítás – 3. rész: Prydmenziós valószínűségi mezők

11. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)*

11.1. A probléma megfogalmazása

Egy átlászó dobozba egymás után teszünk piros és fehér golyókat. A színt véletlenszerűen választjuk. A golyó színe minden alkalommal – az előzőektől függetlenül – 0.6 valószínűséggel piros, 0.4 valószínűséggel fehér. És ezt a folyamatot – a golyók rakosgatását – soha sem hagyjuk abba. Bár az életünk véges, és a gyakorlatban nem tudjuk megtenni, most mégis úgy képzeljük, hogy egy-egy kísérlet egy-egy végtelen hosszú sorozatot ad nekünk. A színsorozat első néhány – mondjuk tíz – tagját le tudjuk írni, például adódhat ez:

```
PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Minden lépés után látjuk a doboz tartalmát:

```
PIROS

PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS,

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Ha minden lépés után tekintjük a pirosak arányát a dobozan, akkor egy tíz hosszúságú számsorozatot kapunk:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{6},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{5}{10}$$

Mivel a színek sorozatát a véletlen alakítja, az arányok sorozata is véletlentől függ. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor az arányok sorozata is végtelen hosszú lesz. Ez a végtelen sorozat – véletlentől függően –lehet konvergens is, lehet divergens is. Ha netán konvergens, akkor a határértéke elvileg akármi lehet. Lehet például 0.6 , és lehet bármi más is.

Az alábbiakban azt az eseményt fogjuk vizsgálni, hogy

a pirosak arányainak a sorozata konvergál-e a 0.6 értékhez (vagy nem)

Vetier András – Valószínűségszámítás – 5. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

11.2. A valószínűség meghatározása

Ebben az alfejeztben megmutatjuk, hogy

annak a valószínűsége, hogy
a pirosak arányainak a sorozata konvergál a 0.6 értékhez,
1-gyel egyenlő

A valószínűség meghatározása céljából valószínűségi változóknak egy végtelen sorozatát vezetjük be:

- az X_1 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha az első szín piros, 0 , ha fehér
- az X_2 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha a második szín piros, 0 , ha fehér
- az X_3 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha a harmadik szín piros, 0 , ha fehér
- és így tovább ...

Ha a színsorozat első tíz eleme a fentebb példaként vett

`PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR`

színsorozat, akkor a most definiált valószínűségi változó sorozat első tíz eleme az alábbi:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0$$

Ha a színsorozat másképpen alakul, akkor az

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5, \quad X_6, \quad X_7, \quad X_8, \quad X_9, \quad X_{10}$$

értékek mások lesznek. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor végtelen sok X_i véletlen értéket kapunk.

Ezekkel az X_i valószínűségi változókkal a pirosak aránya egyszerűen kifejezhető. Az N -ik lépés után a pirosak aránya nyilván az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

átlag adja meg. Tehát igazolandó, hogy 1 a valószínűsége annak, hogy $N \to \infty$ esetén

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \to 0.6$$

A határérték relációt átírhatjuk így:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \to 0$$

ami nyilván ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \right)^4 \to 0$$

Ennek a trükknek, hogy negyedik hatványra emelünk, lejjebb fogjuk látni a hasznát. Ismeretes, hogy annak igazolásához, hogy egy pozitív tagokból álló sorozat 0 -hoz tart, elegendő azt belátni, hogy a tagokból alkotott végtelen sor konvergens. Ezért elég azt belátni, hogy

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \right)^4 < \infty$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 2. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

Mivel a most felírt végtelen sor értéke véletlentől függ, az összeg egy Z valószínűségi változót definiál:

$$Z \;=\; \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \;X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4$$

Mivel minden tag értéke nagyobb vagy egyenlő 0 -nál, a Z valószínűségi változónak az értéke is biztos, hogy nagyobb vagy egyenlő 0 -nál. Viszont amikor a véletlen úgy hozza, a sor divergálhat a végtelenhez. Ilyenkor a Z valószínűségi változó értékét értelemszerűen végtelennek tekintjük.

Ha egy nemnegatív valószínűségi változó pozitív valószínűséggel végtelen értékű, akkor várható értéke nyilván végtelen. Ezért ahhoz, hogy egy nemnegatív valószínűségi változóra belássuk, hogy 1 valószínűséggel véges értékű, elég azt belátni, hogy a várható értéke véges. Ezért most meg fogjuk mutatni, hogy Z várható értéke véges:

$$\mathrm{E}(\,Z\,) \;=\; \mathrm{E}\left(\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \;X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \infty$$

Itt a várható érték képzést és a szummázást fel lehet cserélni, ezért azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \;X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \infty$$

11.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása

A sor konvergenciájához elég azt belátni, hogy minden N -re teljesül az

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \;X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \frac{4}{N^2}$$

egyenlőtlenség. Ennek a becslésnek az igazolása céljából a zárójelben álló kifejezést átírjuk így:

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \;(X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \right)$$

A hatványozást pedig külön végezzük el a számlálóban és a nevezőben:

$$\mathrm{E}\left(\frac{(\;\;(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \;(X_N - 0.6)\;\;)^4}{N^4} \right)$$

Gondoljuk most meg, hogy amikor a számlálóban álló

$$(\;\;(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \;(X_N - 0.6)\;\;)^4$$

negyedik hatványt kifejtjük, milyen jellegű tagok keletkeznek!

Leszen olyan tagok, melyekben valamelyik

$$(X_i - 0.6)$$

kifejezés az első hatvánnyal szerepel, további tényezőkkel megszorozva. Ez a tényező független a többi tényezőtől, ezért a várható érték tényezőnként vehető. Mivel

$$\mathrm{E}(X_i - 0.6) \;=\; 0$$

Szeletier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

ezeknek a tagoknak a várható értéke 0, így ezek a tagok a várható érték számításakor eldobhatóak.

Maradnak az olyan tagok, melyekben minden $(X_i - 0.6)$ tényező legalább második hatványon szerepel. Ilyen tag kétféle van:

$$(X_i - 0.6)^4$$

alakú, illeve

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

alakú, ahol $i \neq j$. Mivel $(X_i - 0.6)$ abszolút értéke 1 -nél kisebb, az ilyen tagok abszolút értéke 1 -nél, kisebb, ezért a várható értékeik is kisebbek 1 -nél.

Most megszámoljuk, hogy hány ilyen tag adódik. Az

$$(X_i - 0.6)^4$$

jellegű tagok száma nyilván N . Az

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

jellegű tagok száma, ahol $i \neq j$, egyenlő $\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2}$ -vel, hiszen az i, j indexpár választása $\binom{N}{2}$ lehetőséget ad, és adott i, j indexpár esetén a negyedik hatvány kifejtésénél, ami egy négy tényezős szorzat kifejtését jelenti, a négy tényező $\binom{4}{2}$ lehetőséget ad az i, j indexpár választására. Vegyük észre, hogy

$$\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2} \;=\; \binom{N}{2} \cdot 6 \;=\; 3N(N-1) \;<\; 3N^2$$

Mindebből kiadódik, hogy

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \;(X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \right) \;<\; \frac{N + 3N^2}{N^4} \;<\; \frac{4 \cdot N^2}{N^4} \;<\; \frac{4}{N^2}$$

11.3. Az általános eset megfogalmazása

Természetesen a 0.6 valószínűségérték tetszőleges p -re cserélhető:

Ha a minden lépésnél
– az előzőektől függetlenül –
p **valószínűséggel jön piros,**
$1 - p$ **valószínűséggel fehér,**
akkor
annak a valószínűsége, hogy a pirosak arányainak a sorozata konvergál a p **értékhez,** 1 **-gyel egyenlő .**

11.4. Miért hívjuk az erős törvényt *erős*nek?

Valószínűségszámítás tanulmányaink kezdetén általában – tapasztalatinkra hivatkozva leszögezzük –, hogy nagy számú független kísérlet esetén az esemény relatív gyakorisága közel van az esemény valószínűségéhez. Annak ellenére, hogy az ott használt kifejezések, mint "nagy számú kísérlet", "közel van" a hétköznapi élet szintjén többnyire elfogadhatóak, most mégis örülni lehet annak, hogy ezeket a kifejezéseket ki tudtuk cserélni a konvergencia fogalmára, hiszen levezettük, hogy **egy esemény relatív gyakoriságainak sorozata 1 valószínűséggel konvergál az esemény valószínűségéhez**. Ennek a matematikai állításnak a neve: **nagy számok erős törvénye a relatív gyakoriságokra**. Ez "erős" jelzővel itt arra utalunk, hogy a konvergencia tényét 1 valószínűséggel állítjuk – más, itt nem részletezendő "gyengébb" konvergencia foglamakkal szemben.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 3. rész: Egyszerű szenziós folyamatos valószínűségi változók

Valószínűségszámítás
4. RÉSZ
Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2019. november 22.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Tartalomjegyzék

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók **5**
1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség . . . 5
1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékkel . . . 6
1.3. Feltételes valószínűség . . . 7
1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül . . . 8
1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra . . . 8
1.6. Általános szorzási szabály . . . 8
1.7. Eloszlásfüggvény . . . 10

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás **11**
2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon . . . 11

3. Béta eloszlások kétdimenzióban **12**
3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között . . . 12
3.1.1. Három ember esete . . . 12
3.1.2. Tíz ember esete . . . 15
3.1.3. Általános eset . . . 16
3.2. Ábrák . . . 17
3.3. Feladatok megoldásokkal . . . 25
3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon . . . 27
3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek *(Extra tananyag)* . . . 27

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke **29**
4.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . 29
4.2. Folytonos eset . . . 29
4.3. Szorzat várható értéke . . . 30

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára **31**
5.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . 31
5.2. Folytonos eset . . . 32

6. Vetület- és feltételes eloszlások **34**
6.1. Vetület eloszlások . . . 34
6.2. Feltételes sűrűségfüggvények . . . 35
6.3. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere . . . 38
6.4. Sűrűségfüggvények keverése . . . 39
6.5. Feltételes eloszlásfüggvény . . . 39
6.6. Feltételes valószínűség . . . 40
6.7. Feltételes medián . . . 41
6.8. Feltételes várható érték . . . 41
6.9. Feltételes variancia . . . 42
6.10. Feltételes szórás . . . 43
6.11. Egy számolós minta példa: Y = RND_1, X = Y · RND_2 . . . 43
6.12. Folytonos szimuláció kétdimenzióban . . . 45

7. Transzformáció síkról síkra **49**
7.1. Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével . . . 49
7.1.1. A transzformáció definíciója . . . 49
7.1.2. A transzformáció inverzének képlet-párja . . . 49
7.1.3. Az egységnégyzet képe egy "vitorla" alakú halmaz . . . 49
7.1.4. A transzformáció hatásának szemléltetése . . . 50
7.1.5. A "börtön rács" "díszes rács"-ba transzformálódik, a négyzetből pedig "vitorla" lesz, . . . 54
7.1.6. Pontfelhők transzformációja . . . 56
7.1.7. Eloszlások transzformációja . . . 57
7.2. Jacobi mátrix . . . 58
7.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat . . . 59

8. Lineáris transzformáció síkról síkra **60**
8.1. Mátrixszal való szorzás . . . 60
8.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás . . . 60

9. Transzformáció síkról egyenesre **61**
9.1. Példák ábrákkal szemléltetve . . . 62
9.1.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel . . . 62
9.1.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel . . . 63
9.1.3. Transzformáció a $z = x / y$ hányados függvénnyel . . . 64
9.2. Általános transzformációs képlet . . . 65
9.3. Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban . . . 65
9.3.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel . . . 66
9.3.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel . . . 68
9.3.3. Transzformáció a $z = x / y$ hányados függvénnyel . . . 70
9.4. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve . . . 72
9.4.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben . . . 73
9.4.2. Az $f(x, y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben . . . 74
9.4.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben . . . 75
9.5. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet . . . 77
9.6. Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban . . . 79
9.6.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben . . . 79
9.6.2. Az $f(x, y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben . . . 79
9.6.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben . . . 79
9.7. Konvolúció . . . 80

Petrovics Mihály: Valószínűség – 4. rész. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel **81**
10.1. Regresszió egydimenzióban . . . 81
10.1.1. A medián minimál tulajdonsága . . . 81
10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása . . . 82
10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága . . . 82
10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása . . . 84
10.2. Regresszió kétdimenzióban . . . 84
10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása . . . 84
10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása . . . 85
10.3. Egy számolós minta példa . . . 86

11. Normális eloszlások a síkon **89**
11.1. Standard normális eloszlás a síkon . . . 89
11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval . . . 90
11.3. Normális eloszlás μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , r paraméterekkel . . . 93
11.4. Vetület eloszlások . . . 100
11.5. Feltételes sűrűségfüggvény . . . 101
11.6. Feltételes medián és várható érték . . . 102
11.7. Feltételes szórás . . . 102
11.8. Példa: testmagasság és testsúly . . . 103
11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk . . . 106

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. február 5.

Vetier András

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Két valószínűségi változót véve – legyenek ezek X és Y – összerakhatjuk őket egyetlen (X, Y) véletlen számpárrá, véletlen ponttá. Ily módon egy kétdimenziós valószínűségi változót kapunk. Példák:

1. Amikor az ejtőernyős célba ugrik, igyekszik a célpontot eltalálni, de ez nem sikerül pontosan. Általában a célpont közelében ér talajt. Ez a pont véletlentől (is) függ. A pont, illetve annak koordinátái egy (X, Y) kétdmineziós folytonos valószínűségi változót adnak.

2. Ha véletlenszerűen választunk egy magyar férfit, akkor az

$$X = \text{ testmagassága centiméterekben mérve}$$

$$Y = \text{ testúlya (pontosabban: testtömege) kilogramokban mérve}$$

   jelölésekkel élve (X, Y) kétdmineziós folytonos valószínűségi változó.

3. Generáljunk három 0 és 1 közötti véletlen számot, és legyenek

$$X = \text{ a legkisebb}$$

$$Y = \text{ a legnagyobb}$$

   Ekkor (X, Y) kétdmineziós folytonos valószínűségi változó.

1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség

Folytonos kétdmineziós valószínűségi változókat általában a sűrűségfüggvényükkel jellemezzük. Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényt a síknak valamilyen A részhalmazán integrálva megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) véletlen pont az A halmazba esik:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left((X, Y) \in A \right) = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy$$

Ahhoz, hogy egy $f(x, y)$ függvény valamilyen kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lehessen két feltételnek kell teljesülni:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Ezek a feltételek minden kétdimenziós sűrűségfüggvényre teljesülnek, és ha egy kétváltozós függvény teljesíti ezeket a tulajdonságokat, akkor lehet olyan kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változót értelemezni, melynek sűrűségfüggvénye a szóbanforgó függvény.

A sürűségfüggvény értéke, mint arányossági tényező. Ha A egy kicsike halmaz (x, y) közelében, akkor

$$\mathrm{P}\left((X, Y) \in A \right) = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy \approx f(x, y) \times A \text{ területe}$$

és

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}\left((X, Y) \in A \right)}{A \text{ területe}}$$

Móri András – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény értéke nem képviseli valaminek a valószínűségét. Ha (x,y) egy adott pont a síkon, akkor $f(x,y)$ jelentése a következő: az (x,y) pont közelében akármilyen kicsi A halmaz esetén annak a valószínűsége, hogy (X,Y) az A halmazba esik, közelítőleg $f(x,y) \times A$ területe :

$$\mathrm{P}\,(\,(X,Y) \in A\ c\,) \;\approx\; f(x,y) \;\times\; A \text{ területe}$$

A sűrűségfüggvény értékének közelítése. Ha A egy kicsi téglalap az (x,y) pont közelében Δx , illetve Δy oldalhosszakkal, akkor

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\,(\,x < X < x + \Delta x \;\text{ és }\; y < Y < y + \Delta y\,)}{\Delta x\ \Delta y}$$

Ez a formula sok esetben hasznos eszköz a sűrűségfüggvény képletének meghatározásához.

1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékkel

A felületi sűrűség – speciálisan a síkon vett sűrűség – fogalma a fizikából jól ismert. Szemléltetés céljából szeretnénk támaszkodni erre a fogalomra.

Ha egy kétdimenziós sűrűségfüggvénnyel van dolgunk, akkor könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a síkon, aminek a síkon vett sűrűsége a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le. Ha valaki ezt mégsem tudja elképzelni, akkor olvassa lelkesen a következő "konstrukciót"!

Jön az úthenger! Képzeljük el az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény grafikonját, ami a 3-dimenziós térben egy felület. A felület alatti térrészben – képzeletben – egyenletesen helyezzünk el egységnyi össztömegű festéket! Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a térrész minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a térrész térfogata. És akkor most jöjjön az úthenger, és a térrészben elhelyezett festéket préselje függőleges irányú préseléssel a vízszintes síkra!

A síkon kapunk egy tömegeloszlást, ami festékből készült, és így a festék szín árnyalata is jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább az anyag (a festék). Ennél a konstrukciónál a sík (x,y) pontjában a tömegsűrűség éppen $f(x,y)$ -nek adódik.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme, tessék: egy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény grafikonja (felülete) alatti térrészben vett egyenletes eloszlás vetülete az (x,y) -síkra olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x,y)$.

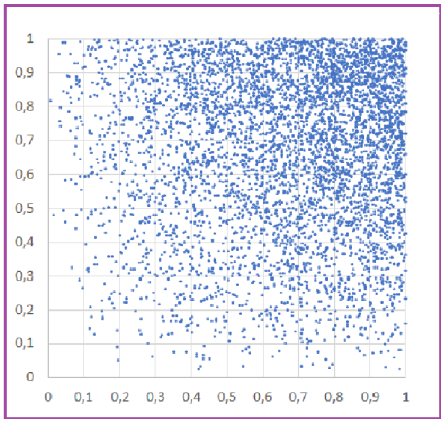
Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\,\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\,\right)$$

valószínűségi változót. Ennek sűrűségfüggvénye – mint azt néhány oldallal később belátjuk – a következő:

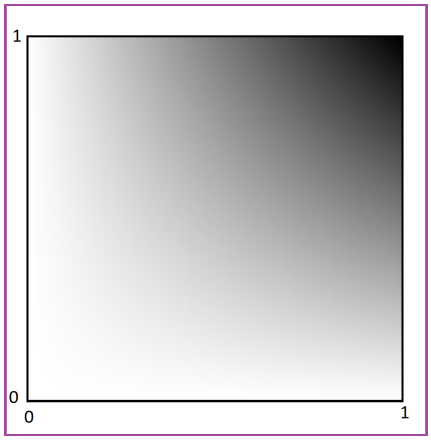
$$f(x,y) \;=\; 4xy \qquad (\,0 < x < 1\,, 0 < x < 1\,)$$

Íme a megfelelő ábrák:

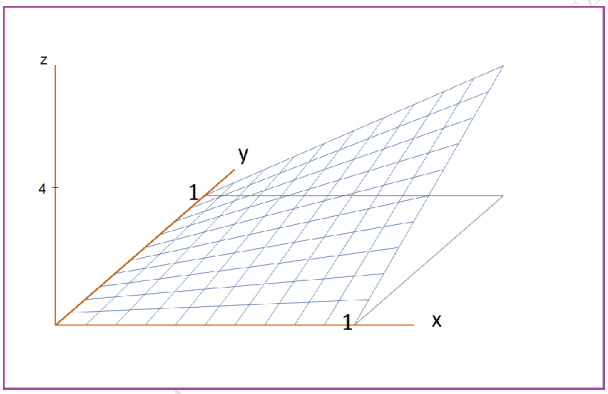


1. ábra. $\left(\,\sqrt{RND_1}\,,\sqrt{RND_2}\,\right)$ – *pontfelhő 5000 kísérletből*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Szétosztott folytonos valószínűségi változók (A rész)



2. ábra. $\left(\sqrt{RND_1}\,,\sqrt{RND_2}\right)$ *eloszlásának szemléltetése festékkel*



3. ábra. $\left(\sqrt{RND_1}\,,\sqrt{RND_2}\right)$ *sűrűségfüggvény szemléltetése felülettel*

A következő oldalak, fejezetek bőven szolgáltatnak további példákat, tessék előre lapozgatni!.

1.3. Feltételes valószínűség

Ha A és B a síknak részhalmazai, akkor $(X,Y) \in A$, illetve $(X,Y) \in B$ egy egy eseményt jelentenek. Az $(X,Y) \in A$ feltétel mellett az $(X,Y) \in B$ esemény valószínűségét $\mathrm{P}\left((X,Y) \in B | (X,Y) \in A\right)$ -vel, vagy rövidebben csak $\mathrm{P}(B|A)$ -val jelöljük. A számláló és a nevező is egy-egy integrállal írható fel:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\iint\limits_{A\cap B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}$$

Ha $B \subseteq A$, akkor $A \cap B = B$, ezért ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\iint\limits_{B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}$$

1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül

Legyen A a síknak egy részhalmaza, melynek pozitív a valószínűsége. Tegyük fel, hogy az $(X,Y) \in A$ esemény bekövetkezett. Ilyen feltétel mellett az (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nyilván

$$f(x,y \mid A) = \frac{f(x,y)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{f(x,y)}{\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{ha } (x,y) \in A$$

1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra

Ha X és Y függetlenek, és sűrűségvüggvényeik $f_1(x)$, illetve $f_2(y)$, akkor az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Vázlatos bizonyítás.

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta x\,\Delta y} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\left(y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta y} \approx f_1(x) \cdot f_2(y)$$

1. Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\,\right)$$

valószínűségi változót. Mivel RND_1 és RND_2 függetlenek, a kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a szorzási szabállyal számítható:

$$f(x,y) \;=\; f_1(x) \cdot f_2(y) \;=\; 2x \cdot 2y \;=\; 4xy \qquad (\,0 < x < 1\,, 0 < x < 1\,)$$

Néhány oldallal előbb felhaszáltuk ezt az eredményt.

2. Példa: Ha X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 4$ paraméterekkel, akkor (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x,y) \;=\; f_1(x) \cdot f_2(y) \;=\; 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot 4\,\mathrm{e}^{-4y} \;=\; 12\,\mathrm{e}^{-3x-4y} \qquad (x,y \geq 0)$$

1.6. Általános szorzási szabály

Ha X sűrűségfüggvénye $f_1(x)$, és Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $f_{2|1}(y|x)$, akkor (X,Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

Hasonlóan:

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y)$$

Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt bizonyítjuk:

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta x\,\Delta y} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\left(y < Y < y + \Delta y \mid x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta y} \approx$$

Vetics András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

$$\approx \frac{\mathrm{P}\,(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\,(y < Y < y + \Delta y \mid X \approx x)}{\Delta y} \approx$$
$$\approx f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

2. Példa: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1 = 3$ paraméterrel, és az $X = x$ feltétel mellett Y exponenciális eloszlást követ x paraméterrel, akkor

$$f_1(x) \;=\; 3\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad (x \geq 0)$$
$$f_{2|1}(y|x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-xy} \qquad (y \geq 0)$$

és így az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot x\,\mathrm{e}^{-xy} = 3x\,\mathrm{e}^{-3x-xy} = 3x\,\mathrm{e}^{-x(3+y)} \qquad (x, y \geq 0)$$

3. Példa ($Y = \mathbf{RND}_1,\ X = \mathbf{RND}_1 \cdot \mathbf{RND}_2$) **:** Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ból rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \mathrm{RND}_1, \qquad X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$$

Most pedig megadjuk, illetve kiszámoljuk (X, Y) , illetve X sűrűségfüggvényének a képletét:

Ha Y egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között, akkor

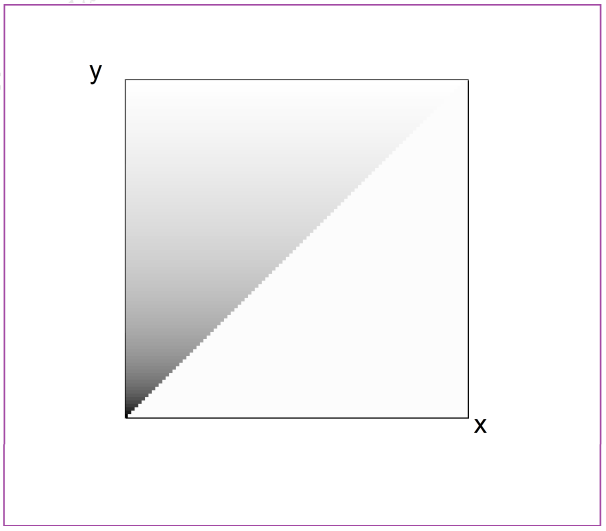
$$f_2(y) \;=\; 1 \qquad (0 < y < 1)$$

és Mivel az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y)$$

A szorzási szabály alapján az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 1\,\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y < 1)$$



4. ábra. (X, Y) *eloszlása festékkel szemléltetve, ahol* $Y = RND_1,\ X = RND_1 \cdot RND_2$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

1.7. Eloszlásfüggvény

Egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

képlettel definiáljuk. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dx \right) dy$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvényből deriválással kapjuk:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

Egy téglalap valószínűsége az eloszlásfüggvénynek a téglalap sarkain vett értékeiből kiszámolható:

$$\begin{gathered} P(x_1 < X < x_2 \quad \text{és} \quad y_1 < Y < y_2) = \\ = P(X < x_2 \quad \text{és} \quad Y < y_2) - P(X < x_1 \quad \text{és} \quad Y < y_2) - \\ -P(X < x_2 \quad \text{és} \quad Y < y_1) + P(X < x_1 \text{ és } Y < y_1) = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \end{gathered}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás

2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon

Legyen S egy véges területű halmaz a síkon. Tekinsük azt a kétváltozós függvényt, melynek értéke a halmaz területének reciprokával egyenlő a halmazba tartozó pontokban, egyéb pontokban pedig 0 :

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{S \text{ területe}} \quad \text{ha } (x,y) \in S \qquad\qquad f(x,y) \;=\; 0 \quad \text{egyébként}$$

Vegyük most S -nek egy A részhalmazát. Ha a $\mathrm{P}(A)$ valószínűség kiszámítása érdekében integráljuk az $f(x,y)$ függvényt az a halmazon, akkor az integrál értékéül a szóbanforgó konstans és a halmaz területének a szorzatát kapjuk:

$$\mathrm{P}(A) \;=\; \iint\limits_A f(x,y)\,dx\;dy \;=\; \iint\limits_A \frac{1}{S \text{ területe}}\;dx\;dy \;=\; \frac{A \text{ területe}}{S \text{ területe}}$$

Tehát az A halmaz valószínűsége egyenlő az A területe osztva az S területével. Ugyanahoz a képlethez jutottunk, mint az 1. rész 3. fejezetének 1. pontjában a "Folytonos egyenletes eloszlás" cím alatt.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

3. Béta eloszlások kétdimenzióban

Az alábbiakban több példán is bemutatjuk, hogy az

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\,(\; x < X < x + \Delta x \;\text{ és }\; y < Y < y + \Delta y \;)}{\Delta x\;\Delta y}$$

formula segítségével hogyan lehet a sűrűségfüggvény képletét meghatározni. A számolásoknak az eredményei is érdekesek, elgondolkodktatóak, ezért egy külön alfejezetben ábrákkal ilusztráljuk az eloszlásokat. De ami itt igazán fontos és megértendő, az *maga a módszer, amivel a sűrűségfüggvények képleteit meghatározzuk*. A kiadódó eloszlásokat **béta eloszlások**nak szokás nevezni ilyen-olyan paraméterekkel. Először egyszerűbb, később bonyolultabb példákat veszünk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – Segédanyag: Kétdimenziós diszkrétnek valószínűségi változók (A szórás)

3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között

3.1.1. Három ember esete

Három ember rendszeresen együtt ebédel egy vendéglőben. Tegyük fel, hogy mindegyikük – a többiektől függetlenül – dél és egy óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a vendéglőbe. Az érkezési időpontokkal kapcsolatban végzünk megfigyeléseket.

Könnyen szimulálhatjuk a problémát: generáljunk három random számot 0 és 1 között, melyeket RND_1, RND_2, RND_3 jelöl, és – mondjuk – úgy képzeljük, hogy

RND_1, a legfiatalabb ember érkezési időpontját,
RND_2, a kor szerinti középső ember érkezési időpontját,
RND_3, a jelenti a legöregebb ember érkezési időpontját.

1. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a második?

Legyen

$$\begin{aligned} X &= \text{az első érkezési időpont} \\ Y &= \text{a második érkezési időpont} \end{aligned}$$

Tehát nem az érdekel minket, hogy ki érkezik elsőnek, másodiknak (ez itt most nem egy érkezési verseny!), hanem az, hogy mikor ül le valaki a lefoglalt asztalhoz elsőnek, másodiknak.

A szimuláció lehetőségével élve azt is mondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} X &= \text{a három random szám közül a legkisebb} \\ Y &= \text{a három random szám közül a második legkisebb, azaz a nagyság szerinti középső} \end{aligned}$$

Javasoljuk, hogy az Olvasó csináljon szimulációt:

- Generáljon Excelben három véletlen számot a `VÉL()` utasítással.
- A `KICSI( tartomány ; 1 )`, `KICSI( tartomány ; 2 )` utasításokkal találja meg X és Y értékét.

- Készítsen ábrát az (X, Y) pontról. Az `F9` gomb ismételt nyomogatásával tapasztalja meg, hogy merre, hogyan szeret kóvályogni az (X, Y) pont.
- Végezzen (X, Y) -ra sok – kb. ezer – kísérletet, és azokat egy pontfelhővel ábrázolja. A pontfelhő "sűrűségéből" is láthatja, hogy az (X, Y) pont számára a sík mely része "népszerű".

Nyilvánvaló, hogy a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó lehetséges értékei azok az (x, y) pontok, melykre teljesülnek a $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek. Ezek a pontok a síkon egy háromszöget alkotnak.

Most levezetjük a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk

x	mellett egy kis	$[\, x,\ x + \Delta x \,]$	intervallumot és
y	mellett egy kis	$[\, y,\ y + \Delta y \,]$	intervallumot
úgy, hogy	teljesüljön az	$x + \Delta x < y$	egyenlőtlenség is.

(X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}\,(\, x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y \,)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{ és } \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a $\mathrm{RND}_1,\ \mathrm{RND}_2,\ \mathrm{RND}_3$ random számok közül

a legkisebb az	$[\, x,\ x + \Delta x \,)$	intervallumba esik, és
a középső az	$[\, y,\ y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – azt jelenti, hogy

a legkisebb az	$[\, x,\ x + \Delta x \,)$	intervallumba esik, és
a középső az	$[\, y,\ y + \Delta y \,)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\, Y,\ 1 \,]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	1	random szám esik az	$[\, x,\ x + \Delta x \,)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\, y,\ y + \Delta y \,)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\, y + \Delta y,\ 1 \,]$	intervallumba.

Az, hogy

melyik random szám esik az	$[\, x,\ x + \Delta x \,)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\, y,\ y + \Delta y \,)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\, y + \Delta y,\ 1 \,]$	intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6 -szor annyi, mint az

RND_1	beleesik az	$[\, x,\ x + \Delta x \,)$	intervallumba, és
RND_2	beleesik az	$[\, y,\ y + \Delta y \,)$	intervallumba, és
RND_3	beleesik az	$[\, y + \Delta y,\ 1 \,]$	intervallumba.

Vetter András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

esemény valószínűsége. Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y))$$

Ezért

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y)\ )}{\Delta x \cdot \Delta y} \;=\; 6 \cdot (1 - (y + \Delta y)\ ) \;\approx\; 6 \cdot (1 - y)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) \;=\; 6 \cdot (1 - y) \qquad\qquad (0 < x < y < 1)$$

2. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a harmadik?

Legyen most

$$\begin{aligned} X &= \text{ a három random szám közül a legkisebb} \\ Y &= \text{ a három random szám közül a legnagyobb} \end{aligned}$$

Most is levezetjük (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét.

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\,(\ x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y\ )}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \qquad \text{és} \qquad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a $\mathrm{RND}_1,\ \mathrm{RND}_2,\ \mathrm{RND}_3$ random számok közül

a legkisebb az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\ y,\ y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – most! – a következőket jelenti:

a legkisebb az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\ y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba esik, és
a középső	$[\ X,\ Y\ ]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	1	random szám esik az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\ y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\ x + \Delta x,\ y\ ]$	intervallumba.

Az, hogy

melyik random szám esik az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\ y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\ x + \Delta x,\ y\ ]$	intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6 -szor annyi, mint az

RND_1	beleesik az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
RND_2	beleesik az	$[\ y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
RND_3	beleesik az	$[\ x + \Delta x,\ y\ ]$	intervallumba.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

esemény valószínűsége. Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (\ y - (x + \Delta x)\ )$$

Ezért

$$f(x,y) \ \approx\ \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (\ y - (x + \Delta x)\ )}{\Delta x \cdot \Delta y} \ =\ 6 \cdot (y - (x + \Delta x)\ ) \ \approx\ 6 \cdot (y - x)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) \ =\ 6 \cdot (y - x) \qquad (0 < x < y < 1)$$

1. Mikor érkezik a második, mikor jön a harmadik?

Legyen most

$$\begin{aligned} X &= \text{a három random szám közül a középső} \\ Y &= \text{a három random szám közül a legnagyobb} \end{aligned}$$

Legyen az Olvasó feladata, megmuatni, hogy

$$f(x,y) \ =\ 6 \cdot x \qquad (0 < x < y < 1)$$

3.1.2. Tíz ember esete

Tegyük fel, hogy tíz ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X a 3 -ik, Y a 7 -ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk tíz random számot 0 és 1 között, és

$$\begin{aligned} X &= \text{a } \ 3 \text{ -ik legkisebb} \\ Y &= \text{a } \ 7 \text{ -ik legkisebb} \end{aligned}$$

Most levezetjük a kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x + \Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y + \Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X,Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y) \ \approx\ \frac{\mathrm{P}\,(x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{ és } \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

$$\begin{array}{lll} \text{a } \ 3 \text{ -ik legkisebb random szám az} & [\ x,\ x + \Delta x\ ) & \text{intervallumba esik, és} \\ \text{a } \ 7 \text{ -ik legkisebb random szám az} & [\ y,\ y + \Delta y) & \text{intervallumba esik,} \end{array}$$

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

Vetier Antal – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

legalább	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	2	random szám van a	$[\ 0,\ X\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ X,\ Y\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ Y,\ 1\ ]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	2	random szám van a	$[\ 0,\ x)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ x+\Delta x,\ y\ )$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ y+\Delta y,\ 1\ ]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva kapjuk, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{10!}{2!\ 1!\ 3!\ 1!\ 3!}\ \cdot\ (x)^{i-1}\ \cdot\ (\Delta x)^1\ \cdot\ (\ y-(x+\Delta x)\ )^3\ \cdot\ (\Delta y)^1\ \cdot\ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^3$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 3!}\ \cdot\ x^2\ \cdot\ \Delta x\ \cdot\ (\ y-(x+\Delta x)\ )^3\ \cdot\ \Delta y\ \cdot\ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^3$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal, majd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y)\ =\ \frac{10!}{2!\ 3!\ 3!}\ x^2\ (y-x)^3\ (1-y)^3 \qquad (0<x<y<1)$$

3.1.3. Általános eset

Tegyük fel, hogy n ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X az i -ik, Y a j -ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk n random számot 0 és 1 között, és

$$\begin{aligned} X &= \text{az} \quad i\text{-ik legkisebb} \\ Y &= \text{a} \quad j\text{-ik legkisebb} \end{aligned}$$

Most levezetjük a kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0<x<y<1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x+\Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y+\Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x+\Delta x<y$ egyenlőtlenség is. (X,Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y)\ \approx\ \frac{\mathrm{P}\,(x<X<x+\Delta x\ \text{ és }\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x<X<x+\Delta x \quad \text{ és } \quad y<Y<y+\Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

az i -ik legkisebb random szám az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a j -ik legkisebb random szám az	$[\ y,\ y+\Delta y)$	intervallumba esik,

Móricz András – Valószínűségszámítás 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

legalább	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\ 0,\ X\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\ X,\ Y\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\ Y,\ 1\ ]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\ 0,\ x)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\ x+\Delta x,\ y\ )$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\ y+\Delta y,\ 1\ ]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva kapjuk, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{n!}{(i-1)!\ 1!\ (j-i-1)!\ 1!\ (n-j)!}\ \cdot\ (x)^{i-1}\cdot(\Delta x)^1\cdot(q;y-(x+\Delta x)\ )^{j-i-1}\cdot(\Delta y)^1\ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^{n-j}\cdot$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}\ \cdot\ x^{i-1}\cdot\Delta x\cdot(\ y-(x+\Delta x)\ )^{j-i-1}\cdot\Delta y\ \ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^{n-j}$$

Osztva $\Delta x\cdot\Delta y$ -nal, majd $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y)\ =\ \frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}\ x^{i-1}\ (y-x)^{j-i-1}\ (1-y)^{n-j}\qquad (0<x<y<1)$$

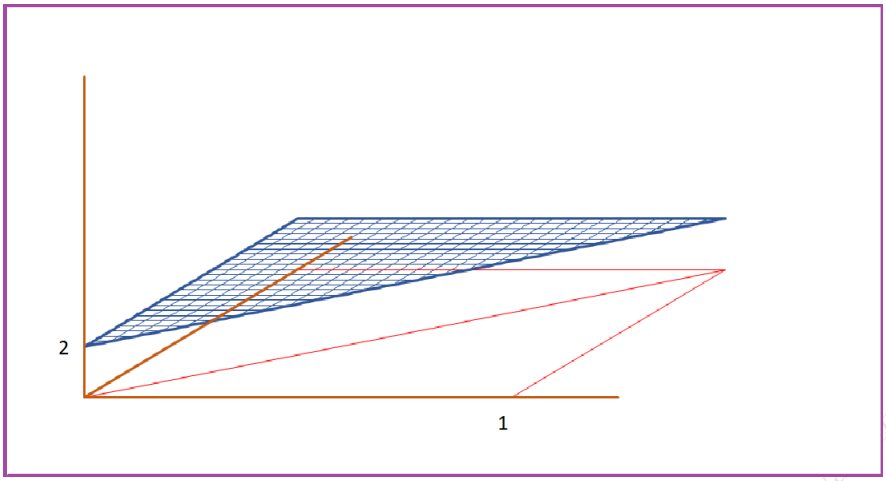
3.2. Ábrák

Két ember (két véletlen szám) esete:

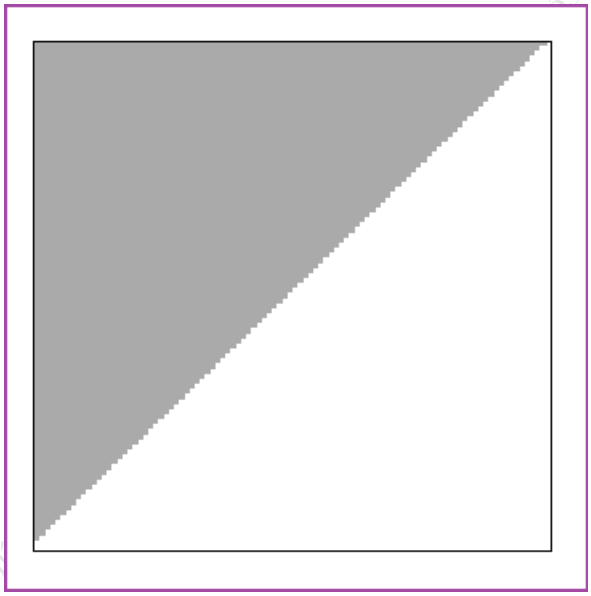
$X=$ **a kisebbik** $\quad Y=$ **a nagyobbik** $\quad n=2;,\ i=1;,\ j=2$; esetén ezt kapjuk:

$$f(x,y)=2\qquad \text{if}\ \ 0<x<y<1$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi eloszlások (A rész)



5. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$



6. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$

Három ember (három véletlen szám) esete:

1. $X =$ **a legkisebb** $Y =$ **a legnagyobb** $n = 3;,\ i = 1;,\ j = 3$ esetén ezt kapjuk:

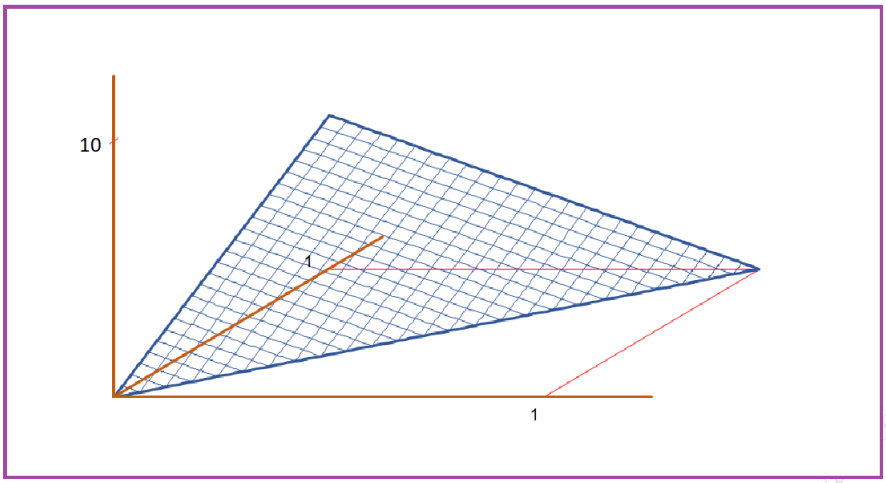
$$f(x, y) = 6(y - x) \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

2. $X =$ **a legkisebb** $Y =$ **a középső** $n = 3;,\ i = 1;,\ j = 2$ esetén ezt kapjuk:

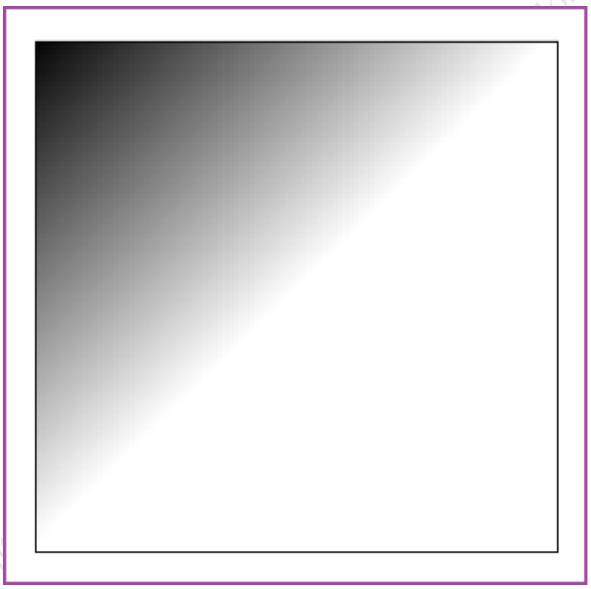
$$f(x, y) = 6(1 - y) \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

3. $X =$ **a középső** $Y =$ **a legnagyobb** $n = 3;,\ i = 2;,\ j = 3$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x, y) = 6x \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

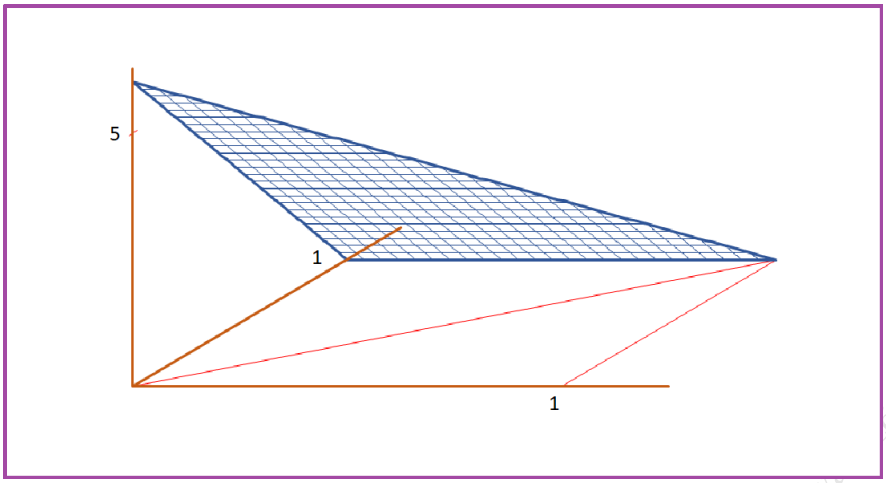


7. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$

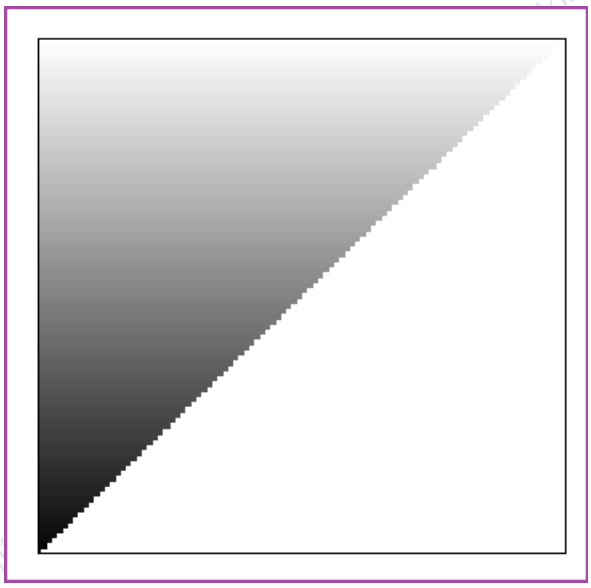


8. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$

Vetier András – Valószínűségszámítási vizsgálatok (A rész)

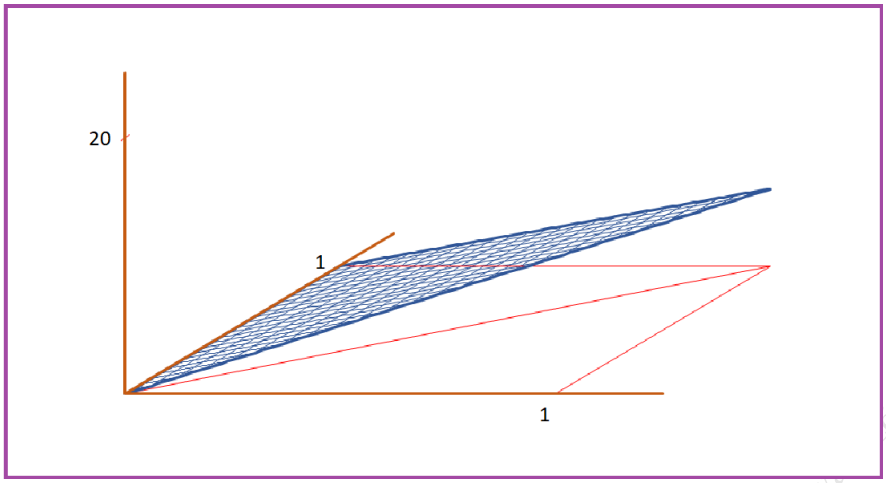


9. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$

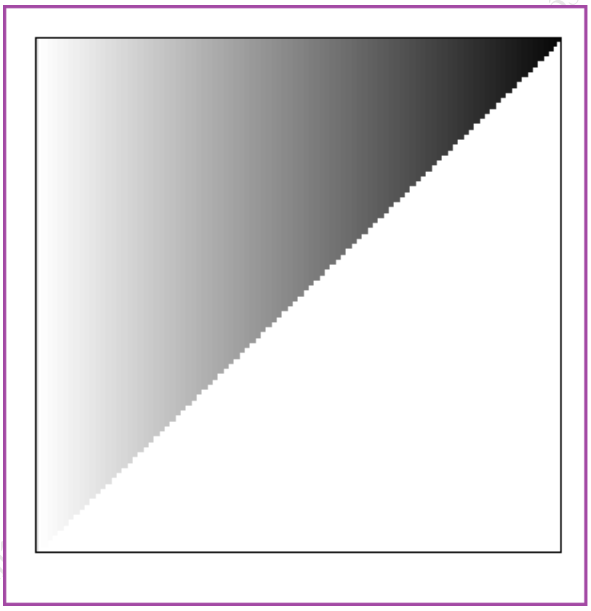


10. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$

Vetier András – Valószínűségi v... ok (A rész)



11. ábra. *2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 2$, $j = 3$



12. ábra. *2-dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3$, $i = 2$, $j = 3$

Négy ember (négy véletlen szám) esete:

1. $X =$ **a legkisebb** $Y =$ **a legnagyobb** $n = 4;,\ i = 1;,\ j = 4$ esetén ezt kapjuk:

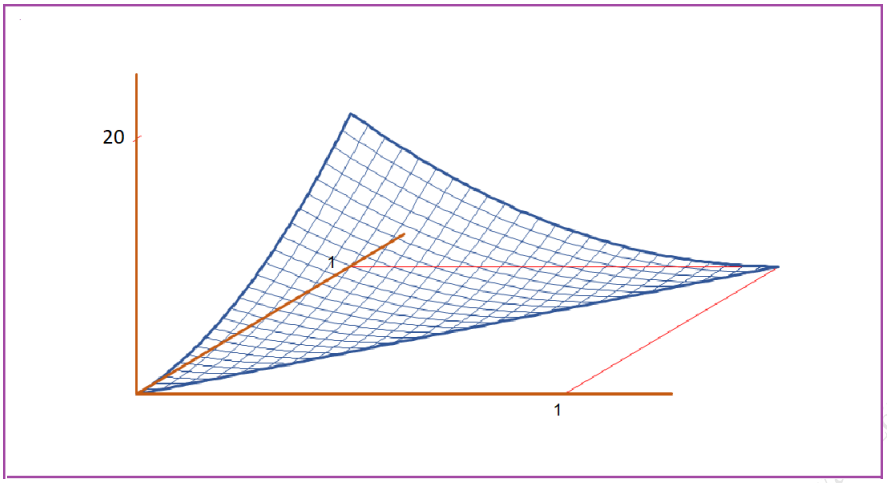
$$f(x, y) = 12\ \ (y - x)^2 \qquad \text{ha}\ \ 0 < x < y < 1$$

2. $X =$ **a legkisebb** $Y =$ **a középső** $n = 4;,\ i = 1;,\ j = 2$ esetén ezt kapjuk:

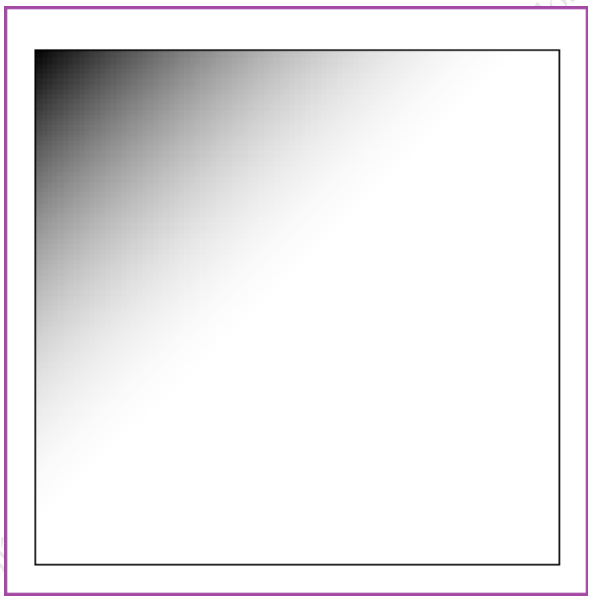
$$f(x, y) = 12(1 - y)^2 \qquad \text{ha}\ \ 0 < x < y < 1$$

3. $X =$ **a második legkisebb** $Y =$ **a harmadik legkisebb** $n = 4;,\ i = 2;,\ j = 3$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x, y) = 24x(1 - y) \qquad \text{ha}\ \ 0 < x < y < 1$$

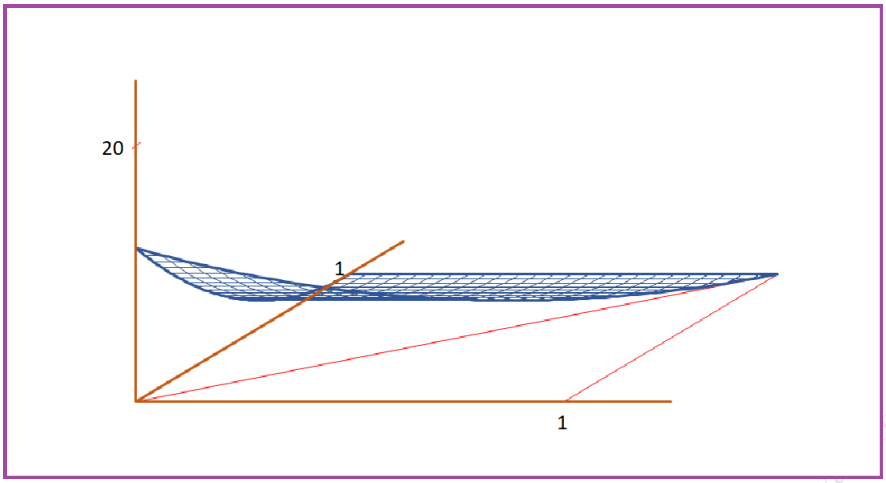


13. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4$, $i = 1$, $j = 4$

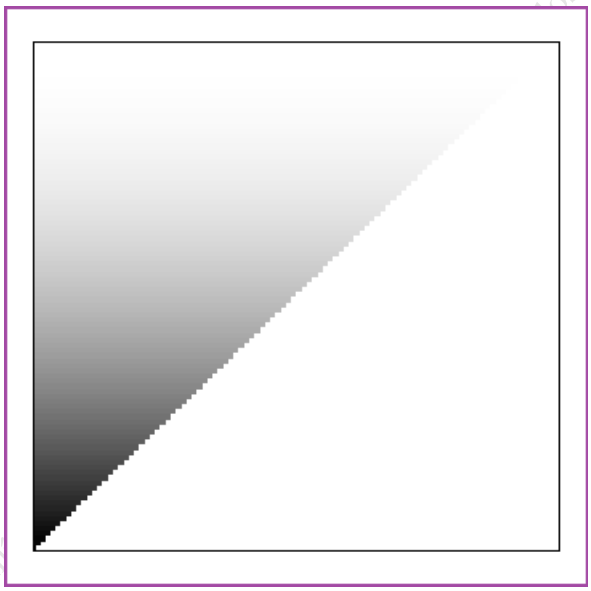


14. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4$, $i = 1$, $j = 4$

Vetier András – Valószínűségszámítási vizsgálatok (A rész)

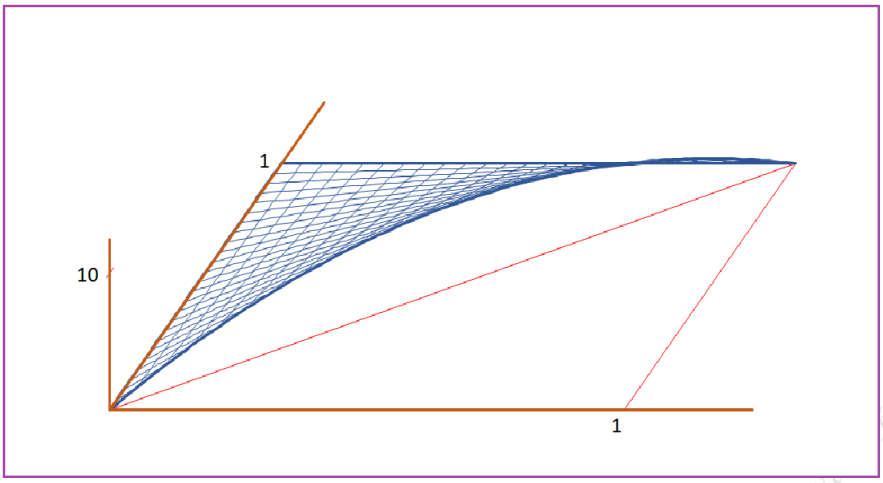


15. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$

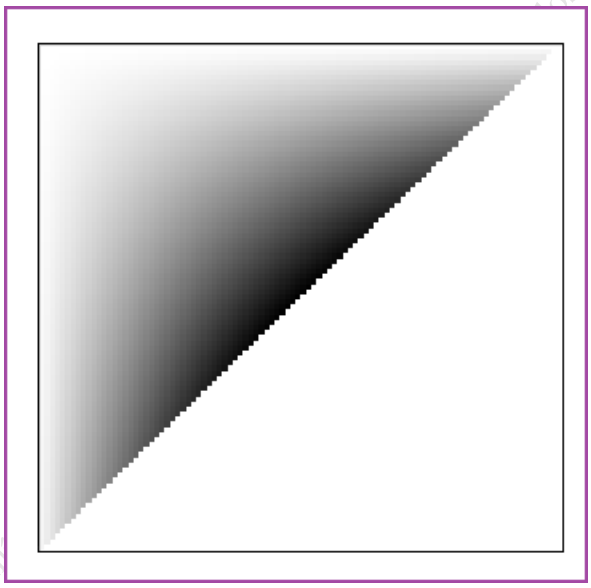


16. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$

Vetier András – Valószínűségszámítás és statisztika jegyzetek (A rész)



17. ábra. *2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4$, $i = 2$, $j = 3$

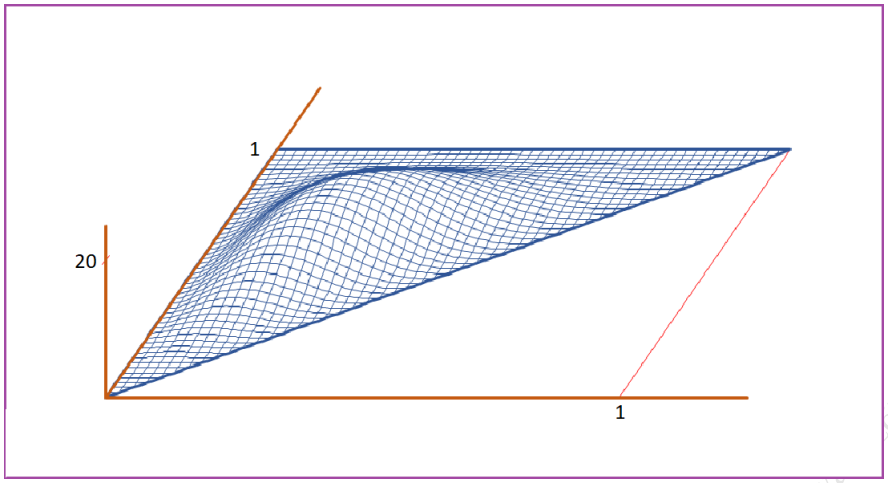


18. ábra. *2-dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4$, $i = 2$, $j = 3$

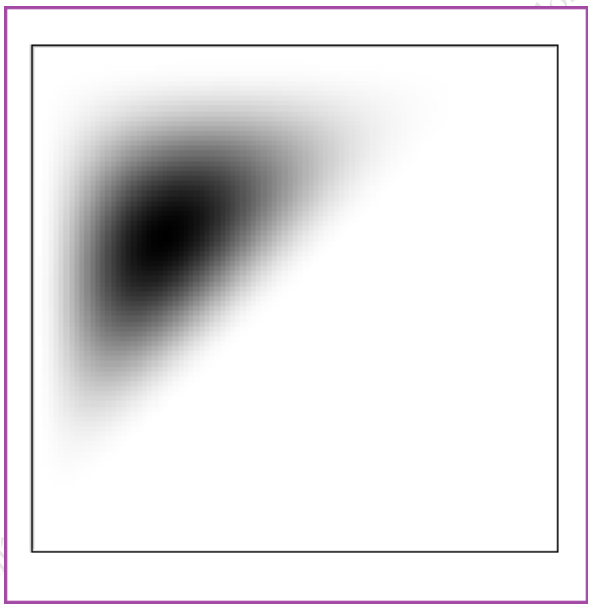
Tíz ember (tíz véletlen szám) esete:

$X =$ **a 3-ik legkisebb** $\quad Y =$ **a 7-ik legkisebb** $\quad n = 10;,\ i = 3;,\ j = 7$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x,y) = \frac{10!}{2!\ 3!\ 3!}\ x^2\ (y-x)^3\ (1-y)^3 \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



19. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 10$, $i = 3$, $j = 7$



20. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 10$, $i = 3$, $j = 7$

Vetier András – Valószínűségi v... ok (A rész)

3.3. Feladatok megoldásokkal

1. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik?

Megoldás: Bizonyára az Olvasó emlékszik az előző alpontban említett "Három véletlen szám esete" példára, amikor X jelölte a három véletlen szám közül a legkisebbet, Y a legnagyobbat, és (X, Y) sűrűségfüggvénye az

$$f(x, y) = 6(y - x) \qquad (0 \le x \le y \le 1)$$

függvény volt. Ha most tekinjük az

$$N = \{\ (x,y):\ \ 0 \le x \le 0.5 \quad 0.5 \le y \le 1\ \}$$

négyzetet, akkor a kérdéses valószínűség annyi, mint annak a valószínűsége, hogy az (X,Y) pont az N négyzetbe esik:

$$\mathrm{P}(\ (X,Y) \in N\ ) = \iint\limits_N 6(y-x)\,dx\,dy = \int\limits_{0.5}^{1} \left(\int\limits_0^{0.5} 6(y-x)\,dx \right)\,dy = \ldots = \frac{3}{4}$$

A képletben a három pont az jelenti, hogy az intergrál kiszámolása az Olvasó feladata.

2. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik feltéve, hogy érkezési időpontjaik között legfeljebb fél óra telik el?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y. Ekkor (X,Y) sűrűségfüggvénye – mint tudjuk:

$$f(x,y) = 6\,(y-x) \qquad (0 < x < y < 1)$$

A kérdezett feltételes valószínűség:

$$\mathrm{P}(\ X < 0.5 \text{ és } Y > 0.5 \mid Y - X < 0.5\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ X < 0.5 \text{ és } Y > 0.5 \text{ és } Y - X < 0.5\ )}{\mathrm{P}(\ Y - X < 0.5\ )} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5 \text{ és } 0.5 < Y < X + 0.5\ )}{1 - \mathrm{P}(\ Y - X > 0.5\ )}$$

A számláló:

$$\mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5 \text{ és } 0.5 < Y < X + 0.5\ ) = \int_0^{0.5} \left(\int_{0.5}^{x+0.5} 6\,(y-x)\,dy \right)\,dx = \ldots = 0.25$$

A nevező:

$$1 - \mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5 \text{ és } Y > X + 0.5\ ) = \int_0^{0.5} \left(\int_{x+0.5}^{1} 6\,(y-x)\,dy \right)\,dx = \ldots = 0.5$$

Így a kérdezett feltételes valószínűség $0.25/0.5 = 0.5$ -del egyenlő.

3. Feladat: Most tegyük fel, hogy nem három, hanem n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. **(a)** Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó és az első érkezési időpont között legalább z idő eltelik $(0 < z < 1)$? Az említett két időpont között eltelt időtartamnak mi **(b)** az eloszlásfüggvénye, **(c)** sűrűségfüggvénye?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y, az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X,Y) sűrűségfüggvénye az $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek által definiált tartományon a korábban levezetett

$$f(x,y) \ = \ \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}\ x^{i-1}\ (y-x)^{j-i-1}\ (1-y)^{n-j}$$

általános képletből az $i = 1$, $j = n$ helyettesítéssel adódik:

$$f(x,y) \ = \ \frac{n!}{(0)!\,(n-2)!\,(0)!}\ x^0\ (y-x)^{n-2}\ (1-y)^0$$

Az egyszerűsítések után ezt kapjuk:

$$f(x,y) \ = \ n\,(n-1)\,(y-x)^{n-2}$$

(a) A kérdezett valószínűség:

$$\mathrm{P}\,(Z > z) \;=\; \mathrm{P}\,(Y - X > z) \;=\; \mathrm{P}\,(X < Y - z) \;=$$

A kettős integrált – gyakorlásképpen – kétféleképpen is felírjuk kétszeres integrálként. Első esetben az x szerinti integrál áll kívül, az y szerinti belül:

$$= \int_0^{1-z} \left(\int_{x+z}^{1} n(n-1)\,(y-x)^{n-2}\,dy \right) dx \;=$$

Most pedig az y szerinti ingtegrál áll kívül, és az x szerinti belül:

$$= \int_z^{1} \left(\int_0^{y-z} n(n-1)\,(y-x)^{n-2}\,dx \right) dy \;=$$

Akár így, akár úgy, az eredmény ez lesz:

$$\ldots \;=\; 1 \,-\, n\,z^{n-1} + (n-1)\,z^n$$

(b) Az eloszlásfüggvény:

$$R(z) \;=\; 1 - \mathrm{P}\,(Z > z) \;=\; n\,z^{n-1} - (n-1)\,z^n$$

(c) A sűrűségfüggvény:

$$r(z) \;=\; \left(n\,z^{n-1} - (n-1)\,z^n\right)' \;=\; n(n-1)\,z^{n-2} - n(n-1)\,z^{n-1} \;=\; n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1})$$

3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon

Az előző gondolatmkenetet könnyű általánosítani arra az esetre, ha az emberek az A és a B időpontok között érkeznek (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül), azaz n független, egyenletes eloszlású véletlen számot tekintünk A és B között, és

$$X = \text{az } i\text{-ik legkisebb}$$

$$Y = \text{a } j\text{-ik legkisebb}$$

ahol $0 < i < j \leq n$. Ekkor minden $A < x < y < B$ esetén

$$f(x,y) = \frac{1}{(B-A)^2} \cdot \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \cdot \left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{y-x}{B-A}\right)^{j-i-1} \cdot \left(\frac{B-y}{B-A}\right)^{n-j}$$

3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy az emberek egyforma, de nem egyenletes eloszlás szerint érkeznek a vendéglőbe: mindenki – a többitől függetlenül – az $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint érkezik $(A < x < B)$. Legyen X az i -ik, Y a j -ik érkezési időpont.

Most levezetjük erre az általánosabb esetre is a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felveszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x+\Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y+\Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x+\Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\,(x < X < x+\Delta x \;\text{ és }\; y < Y < y+\Delta y)}{\Delta x \Delta x}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x+\Delta x \qquad \text{és} \qquad y < Y < y+\Delta y$$

esemény – ugyanúgy, mint korábban – azt jelenti, hogy

az i -ik legkisebb szám, amit X jelöl, az $[\,x,\; x+\Delta x\,)$ intervallumba esik,

és

a j -ik legkisebb szám, amit Y jelöl, az $[\,y,\; y+\Delta y\,)$, intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve a következőket jelenti:

legalább	1	random szám van az	$[\,x,\; x+\Delta x\,)$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\,y,\; y+\Delta y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(i-1)$	random szám az	$[\,0,\; X\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\,X,\; Y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\,Y,\; 1\,]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\,0,\; x\,)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\,x,\; x+\Delta x\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\,x+\Delta x,\; y\,)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\,y,\; y+\Delta y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\,y+\Delta y,\; 1\,]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva most azt kapjuk, hogy az

$$x < X < x+\Delta x \qquad \text{és} \qquad y < Y < y+\Delta y$$

esemény valószínűsége körülbelül egyenlő a

$$\frac{n!}{(i-1)!\;1!\;(j-i-1)!\;1!\;(n-j)!}$$

konstans és

$$(\,S(x)\,)^{i-1}\,(\,s(x)\,\Delta x\,)^{1}\,(\,S(y)-S(x+\Delta x)\,)^{j-i-1}\,(\,s(y)\,\Delta y\,)^{1}\,(\,1-S(y+\Delta y)\,)^{n-j}$$

kifejezés szorzatával. Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a teljes formula, vagyis maga szorzat így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}\;\;(\,S(x)\,)^{i-1}\;\;s(x)\,\Delta x\;\;(\,S(y)-S(x+\Delta x)\,)^{j-i-1}\;\;s(y)\,\Delta y\;\;(\,1-S(y+\Delta y)\,)^{n-j}$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$-nal osztva, majd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) \;=\; \frac{n!}{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}\;\;S(x)^{i-1}\;s(x)\;\;(\,S(y)-S(x)\,)^{j-i-1}\;\;s(y)\;\;(\,1-S(y)\,)^{n-j}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – Rész: Dimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke

4.1. Diszkrét eset (ismétlés)

A folytonos esetre vonatkozó gondolatok és formulák megértésének könnyítése céljából először a diszkrét esetre vonatkozó formulákat fogjuk most kimondani. Igaz, korábban (a könyv második részében) csak az *egydimenziós* diszkrét esetet tárgyaltuk, most pedig *kétdimenziós* formulákat fogalmazunk meg. A kétdimenziós formulák megértése – remélhetőleg – nem okoz nehézséget, hiszen diszkrét esetben az egy- és kétdimenzió technikái között gyakorlatilag nincs lényegi különbség.

Ha egy (X, Y) kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó mellett egy $z = t(x, y)$ transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X, Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\sum_{(x,y)} t(x, y)\ p(x, y)$$

számot a transzformációval nyert $t(X, Y)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük, és $\mathrm{E}\,(\,t(X, Y)\,)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{E}\,(\,t(X, Y)\,) = \sum_{(x,y)} t(x, y)\ p(x, y)$$

Ha egy diszkrét eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor a

$$\sum_{(x,y)} t(x, y)\ p(x, y)$$

számot a szóbanforgó eloszlásból **a** $z = t(x, y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható érték**ének nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó lehetséges z értékeit és az eloszlásának az $r(z)$ képletét, és a kapott eloszlás

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{z} z\ r(z)$$

várható értékét kiszámoljuk.

4.2. Folytonos eset

Ha egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó mellett egy $z = t(x, y)$ folytonos transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X, Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2} t(x, y)\ f(x, y)\ dx\, dy$$

számot **a** $t(X, Y)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük, és $\mathrm{E}\,(\,t(X, Y)\,)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{E}\,(\,t(X, Y)\,) = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} t(x, y)\ f(x, y)\ dx\, dy$$

Ha egy folytonos eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor az

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2} t(x, y)\ f(x, y)\ dx\, dy$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

számot a **a** $z = t(x, y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható értéké**nek nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlásának $r(z)$ sűrűségfüggvényét, és a kapott eloszlás

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, r(z)\, dz$$

várható értékét kiszámoljuk.

Feladat: Tegyük fel, hogy n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. Az utolsó és az első érkezése között eltelt időtartamnak mennyi a várható értéke?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y, az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye – mint korábban meghatároztuk:

$$f(x, y) = n\,(n-1)\,(y-x)^{n-2} \qquad (0 < x < y < 1)$$

Z sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk a korábbiakan:

$$r(z) \;=\; n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1}) \qquad (0 < z < 1)$$

Most háromféleképpen is felírjuk Z várható értékét:

1. $Z = Y - X$ várható értéke az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényből az $y - x$ függvénnyel így írható fel:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \iint_{\mathrm{R}^2} (y-x) \cdot f(x, y)\, dxdy \;=\; \iint_{0<x<y<1} (y-x) \;\cdot\; n\,(n-1)\,(y-x)^{n-2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y n\,(n-1)\,(y-x)^{n-1}\, dx \right) dy \;=\; \ldots \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

2. A várható érték a Z sűrűségfüggvényéből:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot r(z)\, dz \;=\; \int_0^1 z \cdot \big(n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1}) \big)\, dz \;=\; \ldots \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

3. A legegyszerűbb, ha a várható értéket a korábbról már ismert

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \frac{n}{n+1} \qquad \mathrm{E}(X) \;=\; \frac{1}{n+1}$$

tények alapján különbségként írjuk fel:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X) \;=\; \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

4.3. Szorzat várható értéke

Fontossága miatt külön megemlítjük az $X\,Y$ szorzat várható értékének a képletét.

Diszkrét esetben:

$$\mathrm{E}\,(X\,Y) = \sum_{(x,y)} x\,y \;\cdot\; p(x, y)$$

Folytonos esetben:

$$\mathrm{E}\,(X\,Y) = \iint_{\mathrm{R}^2} x\,y \;\cdot\; f(x, y)\, dx\, dy$$

Vatter András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Az átlag és a folytonos valószínűségi változók (A-szint)

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

5.1. Diszkrét eset (ismétlés)

Képzeljük el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelölje

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ \ldots,\ (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y))$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1),\ t(X_2, Y_2),\ \ldots,\ t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \mathrm{E}(\,t(X, Y)\,)$$

Vázlatos bizonyítás. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit most indexezve soroljuk fel:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots$$

Figyelem! Mint hasonló helyzetben korábban is megtettük már, itt is felhívjuk a figyelmet, hogy az

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ \ldots,\ (X_N, Y_N)$$

nagybetű-párok kísérleti eredményeket, tehát véletlen értékpárokat jelölnek. Az

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots$$

kisbetű-párok segítségével pedig a lehetséges értékeket soroljuk fel. Ha például az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó egy dobókocka-párral (egy piros és egy kék kockával) dobott véletlen számpárt jelöl, és – mondjuk – százszor dobunk, akkor a nagybetűvel jelölt

- X_1 jelenti az első dobás eredményét a piros kokával,
- Y_1 jelenti az első dobás eredményét a kék kokával,
- X_2 jelenti a második dobás eredményét a piros kokával,
- Y_2 jelenti a második dobás eredményét a kék kokával, és így tovább,
- X_{100} jelenti a századik dobás eredményét a piros kokával,
- Y_{100} jelenti a századik dobás eredményt a kék kokával.

A kisbetűvel jelölt

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \ \ldots\ \ (x_{35}, y_{35}), (x_{36}, y_{36})$$

értékek pedig az

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ \ \ldots\ \ (6, 5), (6, 6)$$

számpárokat jelentik.

A lehetséges értékpárok valószínűségeit is indexekkel látjuk el:

$$p_1,\ p_2, \ldots$$

Veszer András — valószínűségszámítás — 4. rész: kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Tehát minden i esetén p_i megadja az (x_i, y_i) számpár valószínűségét. Jelölje továbbá

$$N_1,\ N_2, \ldots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy az (x_i, y_i) számpár hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy – nagy N esetén – minden i -re az N_i/N relatív gyakoriság közel van a p_i valószínűséghez.

A

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N}$$

kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük a t függvény argumentumaként az (x_1, y_1) számpár N_1 -szer, az (x_2, y_2) számpár N_2 -ször, $\ldots$ fordul elő. Ezért a számláló értéke:

$$t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N) \ = \ N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots$$

Az átlagot jelentő tört értéke:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \ = \ \frac{N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots}{N} \ =$$

$$= \ \frac{N_1}{N} \cdot t(x_1, y_1) + \frac{N_2}{N} \cdot t(x_2, y_2) + \ldots \ \approx \ p_1 \cdot t(x_1, y_1) + p_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots \ = \ \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

5.2. Folytonos eset

Képzeljük el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelöljék

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ \ldots,\ (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y)$ folytonos függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1),\ t(X_2, Y_2),\ \ldots,\ t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \ \approx \ \iint\limits_{\mathrm{R}^2} t(x, y)\ f(x, y)\ dx\, dy \ = \ \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

Vázlatos bizonyítás. Osszuk fel az x -tengelyt Δx hosszúságú, az y -tengelyt Δy hosszúságú kis intervallumokra! Ezáltal az (x, y) -sík $\Delta x \cdot \Delta y$ területű kis téglalapokra tagolódik. A kis téglalapok csúcsain egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis téglalap bal alsó sarkához hozzárendeljük a téglalapnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az (x, y) csúcshoz tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x, y) \ = \ \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} f(x, y)\ dx\, dy$$

Az (X, Y) valószínűségi változó megfigyelt értékeit a téglalapok bal alsó csúcsaira "lekerekítve" egy (X^*, Y^*) diszrét valószínűségi változót kapunk: ha (X, Y) értéke abba a téglalapba esik, melynek bal alsó csúcsa az (x, y) pont, akkor (X^*, Y^*) értékét (x, y) -nak vesszük:

$$(X^*, Y^*) = (x, y) \qquad \text{ha} \qquad x \le X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y \le Y < y + \Delta y$$

Szántai András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

(X^*, Y^*) lehetséges értékei a csúcspontok. Minden egyes (x, y) csúcspont esetén az $(X^*, Y^*) = (x, y)$ esemény valószínűsége, vagyis (X^*, Y^*) súlyfüggvényének az (x, y) helyen vett értéke, a fenti $p(x, y)$ érték. Mivel Δx és Δy kicsi, $p(x, y)$ -ra igaz az alábbi közelítés:

$$p(x, y) \approx f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx$$

$$\approx \frac{t(X_1^*, Y_1^*) + t(X_2^*, Y_2^*) + \ldots + t(X_N^*, Y_N^*)}{N} \approx$$

$$\approx$$

$$\sum_{(x,y)} t(x, y)\, p(x, y) \approx$$

$$\approx$$

$$\sum_{(x,y)} t(x, y)\, f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y \approx$$

$$\approx$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} t(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

- Az első lépésben, amikor (X_i, Y_i) -t (X_i^*, Y_i^*) -vel helyettesítjük, akkor minden i esetén az $X_i - X_i^*$ legfeljebb Δx , vagyis kicsi, és az $Y_i - Y_i^*$ különbség legfeljebb Δy , vagyis szintén kicsi, így a $t(x, y)$ függvény folytonossága miatt a $t(X_i, Y_i) - t(X_i^*, Y_i^*)$ különbség is kicsi, ezért a két átlag különbsége is kicsi.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az (X^*, Y^*) diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyaráztuk, hogy a kísérleti eredmények függvényének az átlaga közelíti a felírt összeget.
- A harmadik lépésben a $p(x, y)$ -ra felírt közelítést alkalmazzuk.
- A negyedik lépésben a szummát a szummának megfelelő integrállal közelítjük.

Vetier András – Valószínűségszámítás – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6. Vetület- és feltételes eloszlások

6.1. Vetület eloszlások

Állítás: Ha a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor az X valószínűségi változó $f_1(x)$ sűrűségfüggvénye integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Hasonlóképpen az Y valószínűségi változó $f_2(x)$ sűrűségfüggvénye is integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Diszkrét esetben az ezekkel analóg szabályokat összegzési szabályoknak hívtuk. Most joggal nevezhetük ezeket a szabályokat **integrálási szabályok**nak.

Vázlatos bizonyítás. A vízszintes tengelyen felvett $[\, x, x + \Delta x \,]$ intervallum egy függőleges sávot definiál a síkon:

$$S_{[x,x+\Delta x]} = \{(x, y) : x \in [x, x + \Delta x]\}$$

és az $X \in [\, x, x + \Delta x \,]$ esemény ekvivalens az $(X, Y) \in S_{[x,x+\Delta x]}$ eseménnyel. E tény alapján:

$$f_1(x) \approx \frac{\mathrm{P}(\, X \in [x, x + \Delta x] \,)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{P}\big(\, (X, Y) \in S_{[x,x+\Delta x]} \,\big)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\iint\limits_{S_{[x,x+\Delta x]}} f(x, y)\, dx\, dy}{\Delta x} = \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \right) dx}{\Delta x} \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

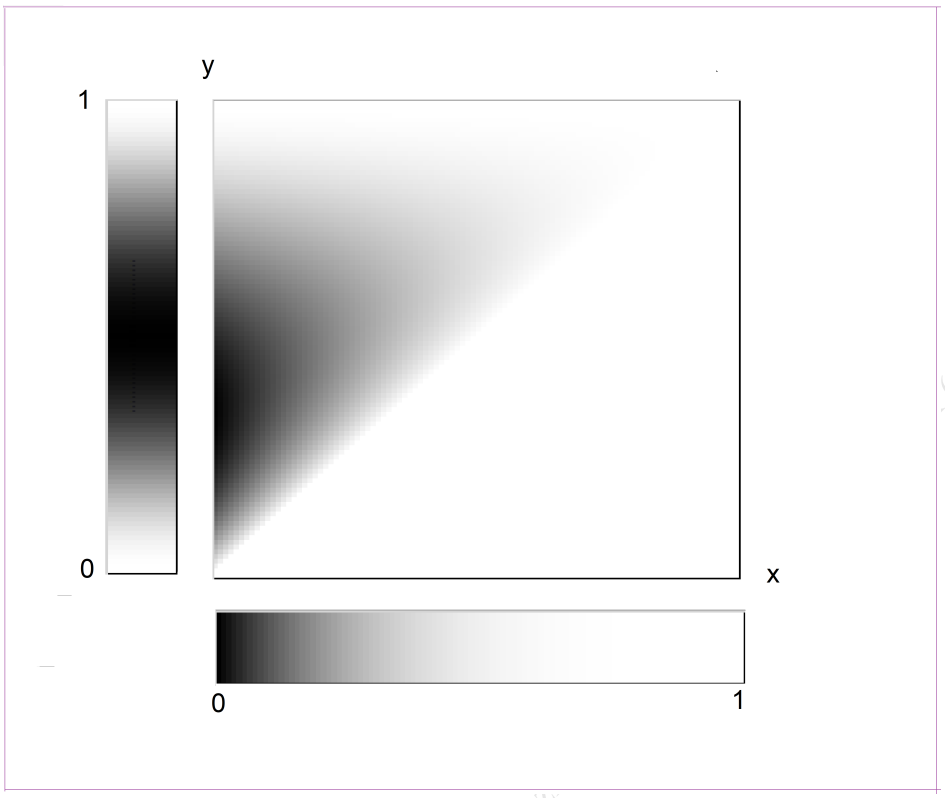
Ha a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor – mint korábban már láttuk, az X valószínűségi változó $f_1(x)$ sűrűségfüggvénye integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Hasonlóképpen az Y valószínűségi változó $f_2(y)$ sűrűségfüggvénye is integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)



21. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás és vetületei festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$

6.2. Feltételes sűrűségfüggvények

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy X értékét megtudjuk: $X = x$, de a másik koordinátát, Y-t nem tudjuk: Y -t továbbra is valószínűségi változónak kell tekintenünk. Felmerül a kérdés: milyen eloszlással modellezzük Y -t az $X = x$ feltétel mellett? Belátjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kaphatjuk meg:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Hasonlóképpen, az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

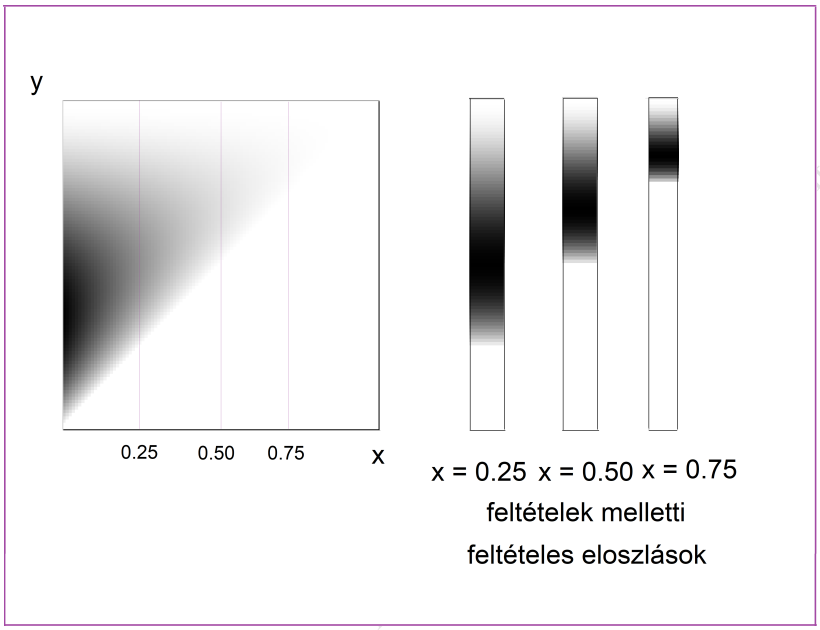
Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt vezetjük le:

$$f_{2|1}(y|x) \approx \frac{\mathrm{P}\,(\, y < y + \Delta y \;\mid\; X = x \,)}{\Delta y} \approx$$

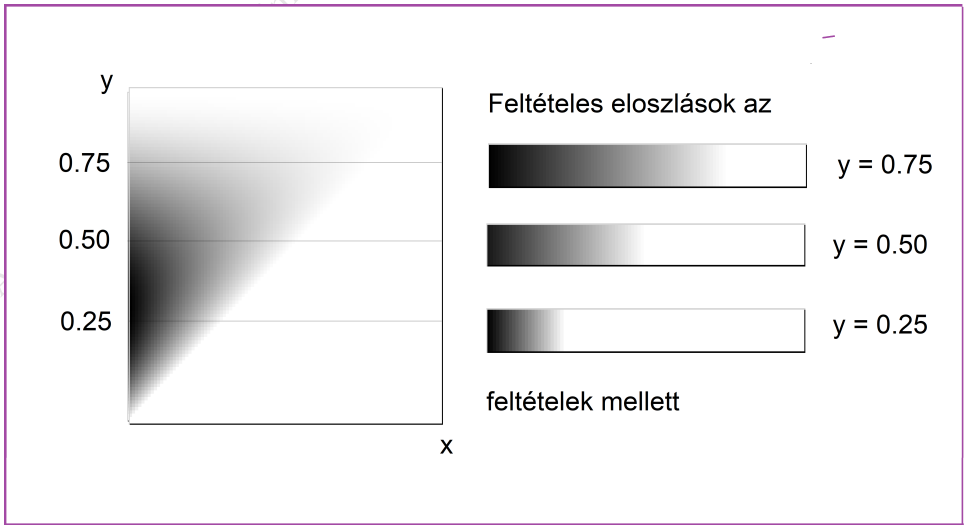
$$\approx \frac{\mathrm{P}\,(\, y < y + \Delta y \;\mid\; x < x + \Delta x \,)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{P}(\ x<x+\Delta x \quad \text{és} \quad y<y+\Delta y)}{\mathrm{P}(\ x<x+\Delta x\ )} \right)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{P}(\ x<x+\Delta x \quad \text{és} \quad y<y+\Delta y\ )}{\Delta x \ \ \Delta y} \right)}{\left(\frac{\mathrm{P}(\ x<x+\Delta x\ )}{\Delta x} \right)} \approx \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$



22. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás és az* $x = 0.25$, $x = 0.50$, $x = 0.75$ *feltételek melletti feltételes eloszlásai festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$



23. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás és az* $y = 0.25$, $y = 0.50$, $y = 0.75$ *feltételek melletti feltételes eloszlásai festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$

Példa ($X = \mathbf{RND}_1 \cdot \mathbf{RND}_2,\ Y = \mathbf{RND}_1$): Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y és között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ból rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \mathrm{RND}_1, \qquad X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$$

Korábban megadtuk, illetve kiszámoltuk (X, Y), illetve X sűrűségfüggvényének a képletét. Most meghatározzuk Y feltételes sűrűségfüggvényeit az $X = x$ feltételek mellett.

Ha Y egyenletes eloszlást követ 0 és 1 között, akkor

$$f_2(y) \ = \ 1 \qquad (0 < y < 1)$$

Ha az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlást követ 0 és y között, akkor

$$f_{1|2}(x|y) \ = \ \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y)$$

Mint korábban meghatároztuk – az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

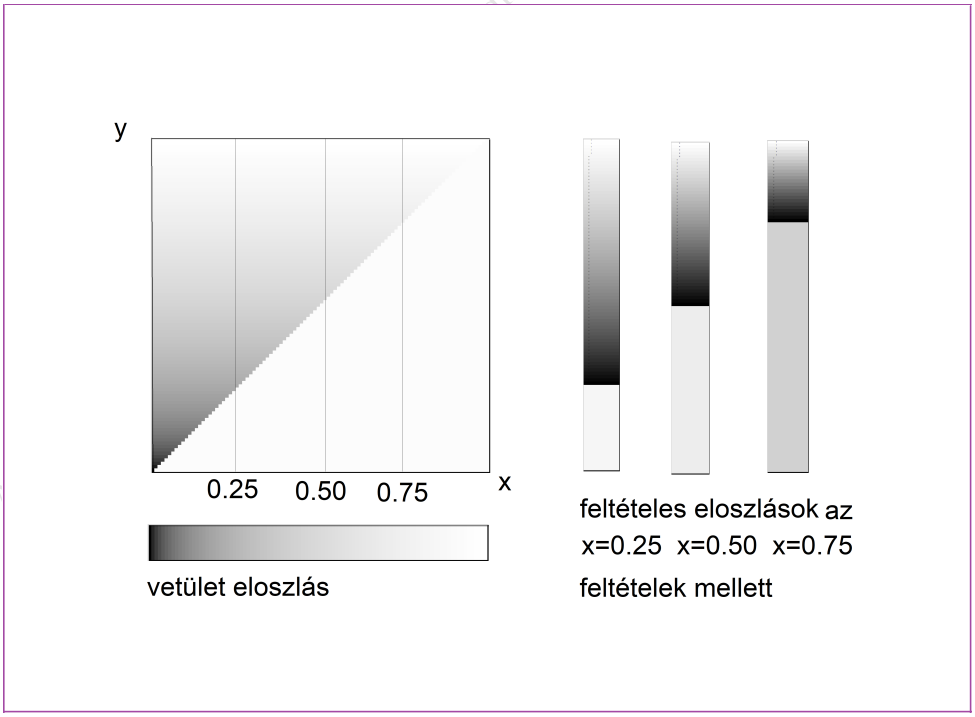
$$f(x, y) = \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y < 1)$$

X (feltétel nélküli) sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk:

$$f_1(x) = -\ln(x) \qquad (0 < x < 1)$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett a hányados szabállyal adódik:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \qquad (0 < x < y < 1)$$



24. ábra. (X, Y) *eloszlása,* X *eloszlása és* Y *feltételes eloszlásai az* $x = 0.25$*,* $x = 0.50$*,* $x = 0.75$ *feltételek mellett festékkel szemléltetve, ahol* $Y = RND_1,\ X = RND_1 \cdot RND_2$

Vetier A. – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6.3. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az (első fejezetben tárgyalt)

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabály és az (előző pontban levezetett)

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással. Hasonlósképpen az

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y)$$

szorzási szabály és az

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással.

Ha minden x mellett tekintjük a $f_{2|1}(y|x)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az Y valószínűségi változó X -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Ha minden y mellett tekintjük a $f_{1|2}(x|y)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az X valószínűségi változó Y -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Egy adott $f(x,y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényből, az

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

integrálási szabállyal meghatározhatjuk az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt, majd pedig a

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

hányados szabállyal az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvények rendszerét. Fordítva, az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényből és a feltételes sűrűségfüggvények $f_{2|1}(y|x)$ rendszeréből a

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabállyal a mgkaphatjuk az $f(x,y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényt. Ezért *az $f(x,y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a feltételes sűrűségfüggvények $f_{2|1}(y|x)$ rendszerét*. Hasonlóképpen kiadódik az is, hogy a *az $f(x,y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_2(y)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a feltételes sűrűségfüggvények $f_{1|2}(x|y)$ rendszerét*.

Valószínűségszámítás – A rész. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6.4. Sűrűségfüggvények keverése

A feltételes sűrűségfüggvényekkel kapcsolatos

$$f(x,y) = f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabály és a vetítésre vonatkozó

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

integrálási szabály kombinálásával adódik az alábbi formula:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\ f_{1|2}(x|y)\ dy$$

A koordináták szerepének felcserélése pedig a

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)\ dx$$

formulát adja.

Ezek a formulák a korábban tanult

$$p_1(x) = \sum_y p_2(y)\ p_{1|2}(x|y)$$

$$p_2(y) = \sum_x p_1(x)\ p_{2|1}(y|x)$$

diszkrét formulák folytonos megfelelői. Ezért ezekre az integrál-formulákra hivatkozhatunk úgy is mint a **teljes valószínűség formulái kétdimenziós folytonos valószínűségi változókra**. A jobboldali integrál-kifejezéseket egyfajta **keverés**nek is felfoghajuk: például az

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)\ dx$$

formula azt mutatja, hogy az $f_2(y)$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, hogy az $f_{2|1}(y|x)$ függvényértékeket az $f_1(x)$ súlyfüggvény szerint keverjük. Tehát

- **az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az Y feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az X sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.**

Hasonlóképpen

- **az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az Y sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.**

6.5. Feltételes eloszlásfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvény integráljaként a feltételes eloszlásfüggvényt kapjuk:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\ dy = P\left(Y < y \mid X = x\right)$$

illetve

$$F_{1|2}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{1|2}(x|y)\ dx = P\left(X < x \mid Y = y\right)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás II. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Megfordítva: a feltételes eloszlásfüggvény deriváltjaként a feltételes sűrűségfüggvényt kapjuk meg

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\partial F_{2|1}(y|x)}{\partial y}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{\partial F_{1|2}(x|y)}{\partial x}$$

A feltételes eloszlásfüggvény jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül az

  $F_{2|1}(y|x)$ **-ed része kisebb** y **-nál**

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül az

  $F_{1|2}(x|y)$ **-ed része kisebb** x **-nél**

6.6. Feltételes valószínűség

Az $y_1 < Y < y_2$ esemény valószínűsége az $X = x$ feltétel mellett a feltételes sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ ) = \int_{y_1}^{y_2} f_{2|1}(y|x)\ dy$$

Hasonlóan adódik az $x_1 < X < x_2$ esemény valószínűsége az $Y = y$ feltétel mellett:

$$\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ ) = \int_{x_1}^{x_2} f_{1|2}(x|y)\ dx$$

Ugyanezeket a feltételes valószínűségeket a feltételes eloszlásfüggvényből különbségként is megkaphatjuk:

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ ) = F_{2|1}(y_2|x) - F_{2|1}(y_1|x)$$

$$\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ ) = F_{1|2}(x_2|y) - F_{1|2}(x_1|y)$$

A feltételes valószínűség jelentése:

- Ha (y_1, y_2) egy tetszőleges intervallum az y tengelyen, (x_1, x_2) pedig egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

  $\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$ **-ed része esik az** (y_1, y_2) **intervallumba**

- Ha (x_1, x_2) egy tetszőleges intervallum az x tengelyen,, (y_1, y_2) pedig egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

  $\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ )$ **-ed része esik az** (x_1, x_2) **intervallumba**

Móri András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (vázlat)

Megjegyzés. A

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$$

feltételes valószínűségben a feltétel valószínűsége nulla

$$\mathrm{P}(X = x\ ) = 0$$

Ezért a feltételes valószínűség elemi

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

formuláját nem lehet alkalmazni a $\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$ valószínűség definiálására.

6.7. Feltételes medián

Az

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$$

egyenletet y-ra megoldva, azaz kifejezve az egyenletből y-t az x segítségével, megkapjuk Y mediánját az $X = x$ feltétel mellett.

Hasonlóképpen, az

$$F_{1|2}(x|y) = \frac{1}{2}$$

egyenletet x-re megoldva, azaz kifejezve az egyenletből x-et az y segítségével, megkapjuk X mediánját az $Y = y$ feltétel mellett.

A feltételes medián jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

  fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $X = x$ feltételhez tartozó medián

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

  fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $Y = y$ feltételhez tartozó medián

6.8. Feltételes várható érték

A feltételes várható érték nem más mint a feltételes eloszlás várható értéke:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{2|1}(y|x)\ dy$$

illetve

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_{1|2}(x|y)\ dx$$

A feltételes várható érték jelentése:

Vetró András – Valószínűségszámítás – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(Y|X = x) \quad \textbf{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(X|Y = y) \quad \textbf{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

6.9. Feltételes variancia

A feltételes variancia nem más mint a feltételes eloszlás varianciája:

$$\mathrm{VAR}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\ y \ - \ \mathrm{E}(Y|X = x)\ )^2 \ f_{2|1}(y|x)\ dy \ =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \ f_{2|1}(y|x)\ dy \right) \ - \ (\ \mathrm{E}(Y|X = x)\ )^2$$

illetve

$$\mathrm{VAR}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\ x \ - \ \mathrm{E}(X|Y = y)\ )^2 \ f_{1|2}(x|y)\ dx \ =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f_{1|2}(x|y)\ dx \right) \ - \ (\ \mathrm{E}(X|Y = y)\ )^2$$

A feltételes variancia jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(Y|X = x) \quad \textbf{feltételes varianciával egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(X|Y = y) \quad \textbf{feltételes varianciával egyenlő}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6.10. Feltételes szórás

A feltételes szórás nem más mint a feltételes eloszlás szórása, vagyis a feltételes variancia négyzetgyöke:

$$\mathrm{SD}(Y|X=x) = \sqrt{\mathrm{VAR}(Y|X=x)} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathrm{E}(Y|X=x))^2 \; f_{2|1}(y|x)\, dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \; f_{2|1}(y|x)\, dy - (\mathrm{E}(Y|X=x))^2}$$

illetve

$$\mathrm{SD}(X|Y=y) = \sqrt{\mathrm{VAR}(X|Y=y)} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X|Y=y))^2 \; f_{1|2}(x|y)\, dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f_{1|2}(x|y)\, dx - (\mathrm{E}(X|Y=y))^2}$$

A feltételes szórás jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a szórása körülbelül az

  $$\mathbf{SD}(Y|X=x) \quad \textbf{feltételes szórással egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a szórása körülbelül az

  $$\mathbf{SD}(X|Y=y) \quad \textbf{feltételes szórással egyenlő}$$

Megjegyzés: A feltételes várható érték fogalmát már a jegyzet első részében értelmeztük diszkrét eloszlásokra – integrálok helyett szummákkal. A feltételes variancia, feltételes szórás is nyilvánvalóan értelmezhető diszkrét eloszlásokra is: a fenti formulákban az integrálok a megfelelő formulákban értelemszerűn szummákkal cserélődnek fel.

6.11. Egy számolós minta példa: Y = $\mathbf{RND}_1$, X = Y $\cdot$ $\mathbf{RND}_2$

Feladat: Választunk egy Y számot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. Ha $Y = y$, akkor 0 és y között választunk egy X számot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint. És most meghatározzuk a feltétel nélküli- és feltételes sűrűség- és eloszlásfüggvényeket és a feltételes eloszlások jellemzőit!

Megoldás:

- Y sűrűségfüggvényét Y definíciója alapján felírhatjuk:

  $$f_2(y) = 1 \quad \text{ha} \qquad 0 < y < 1$$

Vekerdy András – Valószínűségszámítás – A. rész – Kétdimenziós valószínűségi változók (A rész)

- A most következő képletek $0 < y < 1$ mellett értendők.

  Az $Y = y$ feltétel mellett

  X feltételes sűrűségfüggvényét X definíciója alapján fel tudjuk írni:

$$f_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{1}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y$$

  X feltételes eloszlásfüggvénye nyilván:

$$F_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{x}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y$$

  X feltételes mediánja és feltételes várható értéke nyilván:

$$\frac{y}{2}$$

  a feltételes variancia, illetve szórás pedig:

$$\frac{y^2}{12} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{y}{\sqrt{12}}$$

- (X, Y) sűrűségfüggvényét a szorzási szabály alapján kapjuk meg:

$$f(x,y) \;=\; f_2(y)\; f_{1|2}(x|y) \;=\; 1\,\frac{1}{y} \;=\; \frac{1}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y < 1$$

- X sűrűségfüggvényét y szerinti integrálással kapjuk meg. $0 < x < 1$ esetén ez adódik :

$$f_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dy \;=\; \int_x^1 \frac{1}{y}\; dy \;=\; -\ln(x)$$

- A most következő képletek $0 < x < 1$ mellett értendők.

  Y-nak az $X = x$ feltétel melletti

  feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kapjuk:

$$f_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \;=\; \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \;=\; -\frac{1}{y\,\ln(x)} \qquad \text{ha} \quad x < y < 1$$

  A feltételes eloszlásfüggvényt integrálással kapjuk meg:

$$F_{2|1}(y|x) \;=\; \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\; dy \;=$$

$$= \int_x^y \left(-\frac{1}{y\,\ln(x)}\right)\; dy \;=\; \frac{1}{-\ln(x)} \int_x^y \frac{1}{y}\; dy \;=\; \frac{1}{-\ln(x)}\;\left(\ln(y) - \ln(x)\right) \;=$$

$$= \;1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \qquad \text{ha} \quad x < y < 1$$

  A feltételes medián az

$$F_{2|1}(y|x) \;=\; 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \;=\; \frac{1}{2}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

egyenlet y-re való megoldásából adódik:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(y)}{\ln(x)} &= \frac{1}{2} \\
\ln(y) &= \frac{1}{2}\ln(x) \\
\ln(y) &= \ln(\sqrt{x}) \\
y &= \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Tehát a feltételes medián $\sqrt{x}$.

A feltételes várható érték:

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{2|1}(y|x)\ dy\ =$$

$$= \int_x^1 y\ \left(-\frac{1}{y\ \ln(x)}\right)\ dy\ =\ \int_x^1 \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ dy\ =\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ (1-x)\ =$$

$$= \frac{x-1}{\ln(x)}$$

A feltételes második momentum:

$$\mathrm{E}(Y^2|X=x)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} y^2\ f_{2|1}(y|x)\ dy\ =$$

$$= \int_x^1 y^2\ \left(-\frac{1}{y\ \ln(x)}\right)\ dy\ =\ \int_x^1 y\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ dy\ =\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ \frac{1-x^2}{2}\ =$$

$$= \frac{x^2-1}{2\ln(x)}$$

A feltételes varianciát a

$$\mathrm{VAR}(Y|X=x)\ =\ \mathrm{E}(Y^2|X=x) - (\ \mathrm{E}(Y|X=x)\ )^2$$

képlet alapján fel lehet írni, amiből gyökvonással a feltételes szórás képletét is megkaphatjuk:

$$\mathrm{VAR}(Y|X=y)\ =\ \frac{x^2-1}{2\ln(x)} - \left(\ \frac{x-1}{\ln(x)}\ \right)^2$$

$$\mathrm{SD}(X|Y=x)\ =\ \sqrt{\frac{x^2-1}{2\ln(x)} - \left(\ \frac{x-1}{\ln(x)}\ \right)^2}$$

6.12. Folytonos szimuláció kétdimenzióban

Tegyük fel, hogy előírnak egy folytonos kétdimenziós eloszlást, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót, ami a megadott kétdimenziós eloszlást követi. A következőképpen lehet eljárni:

1. *Meghatározzuk az előírt eloszlás x -tengelyre vett vetületének sűrűségfüggvényét:*

$$f_1(x)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

Vajda István – Valószínűségszámítás – A rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

majd pedig az eloszlásfüggvényét:

$$F_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx$$

és ezután az

$$u \;=\; F_1(x)$$

egyenletből az eloszlásfüggény inverzét:

$$x \;=\; F_1^{-1}(u)$$

Tudjuk, hogy ha az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X \;=\; F_1^{-1}(\mathrm{RND}_1)$$

akkor olyan X valószínűségi változót kapunk, mely a kívánatos vetület eloszlást követi.

2. *Az előírt eloszlásból minden x értékre meghatározzuk az $X = x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényt:*

$$f_{2|1}(\,y \mid x\,) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

majd a feltételes eloszlás eloszlásfüggvényt:

$$F_{2|1}(\,y \mid x\,) \;=\; \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(\,y \mid x\,)\,dy$$

és ezután rögzített x mellett a

$$v \;=\; F_{2|1}(\,y \mid x\,)$$

egyenletből az eloszlásfüggény inverzét:

$$y \;=\; F_{2|1}^{-1}(\,v \mid x\,)$$

Ha ebben az inverzfüggvény képletben az x paraméter helyére a már definiált X -et, a v változó helyére egy újabb random számot helyettesítünk:

$$Y \;=\; F_{2|1}^{-1}(\,\mathrm{RND}_2 \mid X\,)$$

akkor olyan Y valószínűségi változót kapunk, melynek az $X = x$ feltételek melletti feltételes eloszlásai a kívánatos feltételes eloszlások.

3. A kapott (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó vetület eloszlása megegyezik a megadott eloszlás vetület eloszlásával, és a feltételes eloszlásai is megegyeznek a kívánatos eloszlás feltételes eloszlásaival. Ezért (X, Y) kétdimenziós eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

Megjegyzés: Természetesen a koordináták szerepcseréjével is működik a módszer. A

$$Y \;=\; F_2^{-1}(\,\mathrm{RND}_1\,)$$

$$X \;=\; F_{1|2}^{-1}(\,\mathrm{RND}_2 \mid Y\,)$$

definíciókkal is olyan (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót kapunk, melynek eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

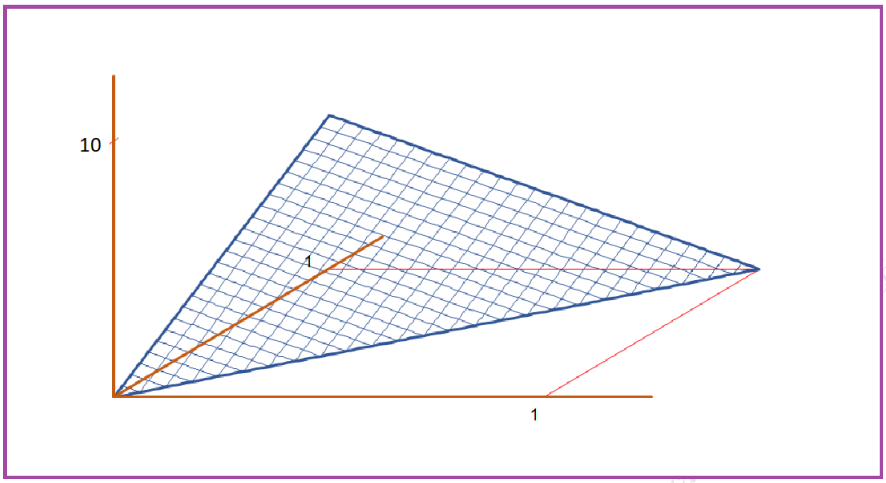
Példa: Korábban vizsgáltuk a

háromrandomszámközülalegkisebb háromrandomszámközülalegnagyobb

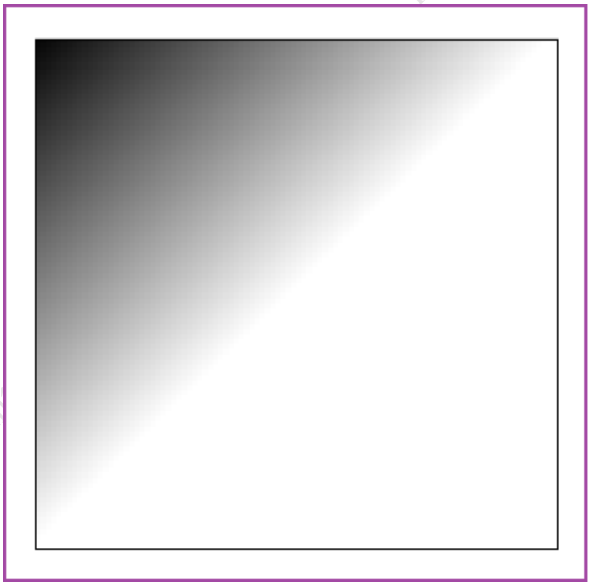
Vatter András – Valószínűségszámítás – A rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

valószínűségi változókból alkotott kétdimenziós valószínűségi változót: levezettük, hogy a kétdimenziós sűrűségfüggvény képlete:

$$f(x,y) \;=\; 6\cdot(y-x) \qquad (0<x<y<1)$$



25. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n=3$, $i=1$, $j=3$



26. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n=3$, $i=1$, $j=3$

Vetier András – Valószín folytonos va ok (A rész)

Nézzük most meg, hogy ehhez a sűrűségfüggvényhez hogyan állít elő a most tanult módszer egy ilyen eloszlást követő (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változót!

1. Meghatározzuk az előírt eloszlás x -tengelyre vett vetületének sűrűségfüggvényét:

$$f_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\;dy) \;=\; \int_x^1 6\cdot(y-x)\;dy \;=\; 3\cdot(1-x)^2 \qquad (0<x<y<1)$$

majd pedig az eloszlásfüggvényét:

$$F_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx \;=\; \int_0^x 3\cdot(1-x)^2\,dx \;=\; 1-(1-x)^3 \qquad (0<x<y<1)$$

és ezután az

$$u \;=\; 1-(1-x)^3$$

egyenletből az eloszlásfüggény inverzét:

$$x \;=\; 1-(1-u)^{\frac{1}{3}}$$

Tudjuk, hogy ha az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$x \;=\; 1-(1-\mathrm{RND}_1)^{\frac{1}{3}}$$

akkor olyan X valószínűségi változót kapunk, mely a kívánatos vetület eloszlást követi.

2. Az előírt eloszlásból minden x értékre meghatározzuk az $X=x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényt:

$$f_{2|1}(\,y\mid x\,) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \;=\; \frac{6\cdot(y-x)}{3\cdot(1-x)^2} \;=\; \frac{2\cdot(y-x)}{(1-x)^2} \qquad (0<x<y<1)$$

majd a feltételes eloszlás eloszlásfüggvényt:

$$F_{2|1}(\,y\mid x\,) \;=\; \int_x^y \frac{2\cdot(y-x)}{\cdot(1-x)^2}\,dy \;=\; \frac{(y-x)^2}{(1-x)^2} \qquad (0<x<y<1)$$

és ezután rögzített x mellett a

$$v \;=\; \frac{(y-x)^2}{(1-x)^2}$$

egyenletből az eloszlásfüggény inverzét:

$$y \;=\; x+\sqrt{v}\cdot(\,1\;-\;x\,)$$

Ha ebben az inverzfüggvény képletben az x paraméter helyére a már definiált X -et, a v változó helyére egy újabb random számot helyettesítünk:

$$Y \;=\; X+\sqrt{\mathrm{RND}_2}\cdot(\,1\;-\;X\,)$$

akkor olyan Y valószínűségi változót kapunk, melynek az $X=x$ feltételek melletti feltételes eloszlásai a kívánatos feltételes eloszlások.

3. A kapott (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó kétdimenziós eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

Megjegyzés: Megnyugtató élmény lehet az Olvasó számára, ha szimulációval ellenőrzi, hogy ha a módszerünkkel készült (X,Y)-ra generál egy pontfelhőt, és azt összeveti a

háromrandomszámközülalegkisebb háromrandomszámközülalegnagyobb

valószínűségi változókból alkotott kétdimenziós valószínűségi változó pontfelhőjével.

Veszprémi András – Valószínűségszámítás – A rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

7. Transzformáció síkról síkra

Az alábbiakban az eloszlásoknak a síkról síkra való transzformációját egy konkrét példán keresztül mutatjuk be. A sűrűségfüggvény transzformálódásáról szóló általános képletet, amiért mindezt csináljuk, a példa után mondjuk ki. A képletet – a Jacobi determináns jelentésének ismeretét feltételezve – igazoljuk.

7.1. Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével

7.1.1. A transzformáció definíciója

Tekintsük azt a transzformációt, mely az (x, y) síkról az (u, v) síkra képez az

$$u = x \cdot y \qquad v = \frac{y}{x}$$

képlet-pár szerint. Mivel az elkövetkező oldalakon csak 0 és 1 közötti x és y értékekkel fogunk dolgozni, a transzformációt csak a

$$0 < x \leq 1 \qquad 0 < y \leq 1$$

négyzeten fogjuk tekinteni. A $0 < x$ és a $0 < y$ egyenlőtlenségek miatt a négyzet meg van fosztva a tengelyekre eső oldalaitól.

7.1.2. A transzformáció inverzének képlet-párja

Ha a transzformációt definiáló két egyenletből kifejezzük x -et és y -t az u és a v segítségével, akkor az inverz transzformáció képlet-párjához jutunk:

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \qquad y = \sqrt{u \cdot v}$$

7.1.3. Az egységnégyzet képe egy "vitorla" alakú halmaz

Az első kérdések egyike, ami ilyenkor felmerül: milyen halmazt kapunk az (u, v) síkon ha az értelmezési tartomány – ami itt az egységnégyzet – minden (x, y) pontját áttranszformáljuk?

A válasz egyszerű: Nyilván minden (u, v) képpont az első síknegyedbe esik, azaz $u > 0$ és $v > 0$. Továbbá

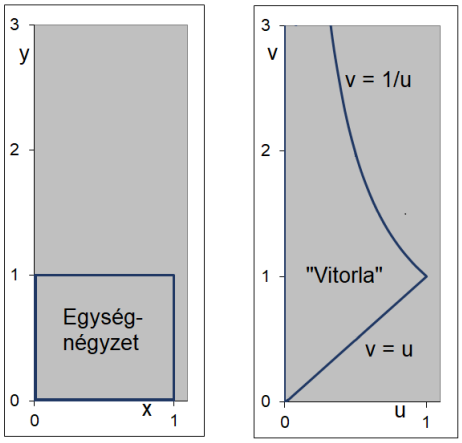
$$u = x \cdot y \leq 1 \qquad v = \frac{y}{x} = \frac{xy}{x^2} = \frac{u}{x^2} \geq u \qquad v = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y^2}{u} \leq \frac{1}{u}$$

Tehát a képpontok eleget tesznek az

$$0 < u \leq 1 \qquad u < v \leq \frac{1}{u}$$

Varga András – Valószínűségszámítás 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

egyenlőtlenségeknek, azaz egy "vitorla" alakú halmazba esnek. Nyilvánvaló, hogy ennek a halmaznak minden pontja valóban képpont.



27. ábra. *Az egységnégyzetből "vitorla" lett*

7.1.4. A transzformáció hatásának szemléltetése

A transzformáció hatását lépésről lépésre haladva fogjuk bemutatni.

- Először néhány konkrét pontot és szakaszt transzformálunk,
- utána azt érzékeltetjük, ahogy az (x, y) sík egységnégyzetében felvett "börtön rács"-ból az (u, v) síkon "díszes rács" lesz.
- Majd pontfelhőt transzformálunk,
- végül pedig festék eloszlást.
- A pontfelhők és festék eloszlások transzformációját először egyenletes eloszlásra vesszük,
- utána pedig nem-egyenletes eloszlásra.

1. Három pont egy függőleges szakaszon

Először három pontot veszünk fel az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű függőleges egyenesen. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. fejez: Kétdimenziós folytonos szinűségi változók (A rész)

$(\,x\,;\,y\,)$	$\to$	$(\,u\,;\,v\,)$	ahol $u = x \cdot y$	és	$v = \frac{y}{x}$
$(\,1/2\,;\,1/4\,)$	$\to$	$(\,1/8\,;\,1/2\,)$	mert $1/8 = 1/2 \cdot 1/4$	és	$1/2 = \frac{1/4}{1/2}$
$(\,1/2\,;\,1/2\,)$	$\to$	$(\,1/4\,;\,1\,)$	mert $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$	és	$1 = \frac{1/2}{1/2}$
$(\,1/2\,;\,3/4\,)$	$\to$	$(\,3/8\,;\,3/2\,)$	mert $3/8 = 1/2 \cdot 3/4$	és	$3/2 = \frac{3/4}{1/2}$

z: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

2. Függőleges szakasz

Ezek után

az $x = \dfrac{1}{2}$ egyenlettel és az $1/4 \le y \le 3/4$ egyenlőtlenségekkel

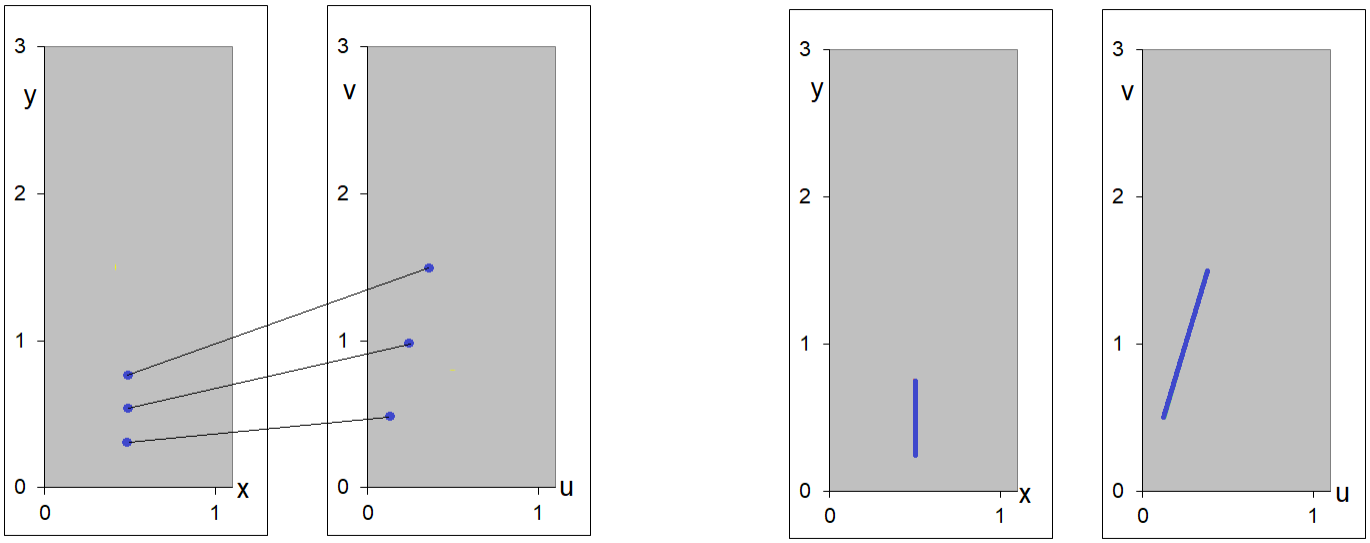
megadott függőlegeses szakasz transzformáltjának egyenletét határozzuk meg. A

$\sqrt{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{1}{2}$ egyenletből és az $1/4 \le \sqrt{u \cdot v} \le 3/4$ egyenlőtlenségekből

kapjuk a megoldást:

$$v = 4 \cdot u \qquad \frac{1}{8} \le u \le \frac{3}{8}$$

Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy szakasz, mely az origón átmenő 4 meredekségű egyenesen fekszik.



28. ábra. *Három pont egymás felett és transzformáltjaik – Függőleges szakasz és transzformáltja*

3. Három pont egy vízszintes szakaszon

Most az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű vízszintes egyenesen veszünk fel három pontot. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

$(x\,;\,y) \quad \to \quad (u\,;\,v)$	ahol $u = x \cdot y$ és $v = \frac{y}{x}$
$(1/4\,;\,1/2) \quad \to \quad (1/8\,;\,2)$	mert $1/8 = 1/2 \cdot 1/4$ és $2 = \frac{1/2}{1/4}$
$(1/2\,;\,1/2) \quad \to \quad (1/4\,;\,1)$	mert $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$ és $1 = \frac{1/2}{1/2}$
$(3/4\,;\,1/2) \quad \to \quad (3/8\,;\,2/3)$	mert $3/8 = 3/4 \cdot 1/2$ és $2/3 = \frac{1/2}{3/4}$

4. Vízszintes szakasz

Ezek után

az $\quad y = \dfrac{1}{2} \quad$ egyenlettel és az $\quad 1/4 \le x \le 3/4 \quad$ egyenlőtlenségekkel

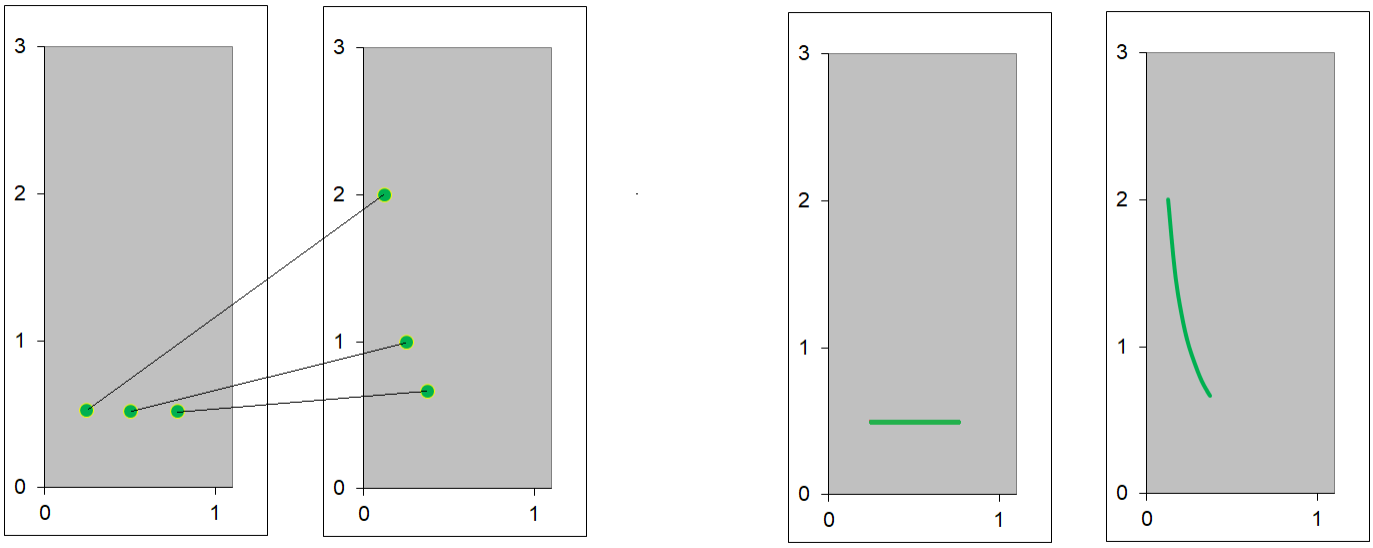
megadott vízszintes szakasz transzformáltjának egyenletét határozzuk meg. A

$\sqrt{u \cdot v} = \dfrac{1}{2} \quad$ egyenletből és az $\quad 1/4 \le \sqrt{\dfrac{u}{v}} \le 3/4 \quad$ egyenlőtlenségekből

kapjuk a megoldást:

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} \qquad \frac{1}{8} \le u \le \frac{3}{8}$$

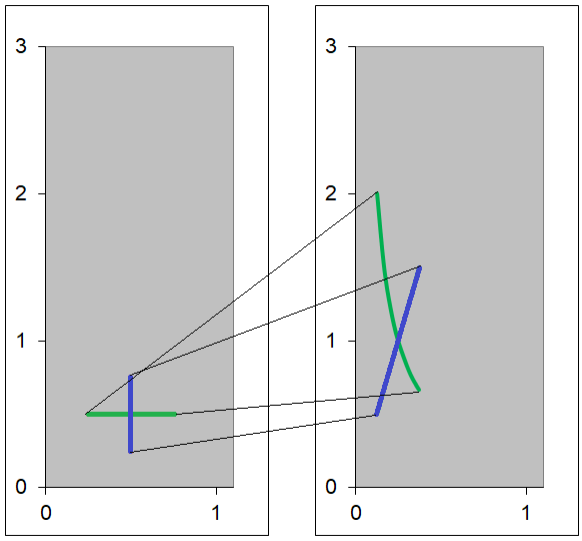
Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hiperbola-darab, mely a $v = 1/u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik.



29. ábra. *Három pont egymás mellett és transzformáltjaik – Vízszintes szakasz és transzformáltja*

5. "Plusz jel"

Ha a most vizsgált függőleges és vízszintes szakaszokból egy "plusz jel"-et rakunk össze, akkor láthatjuk, hogy a plusz jel transzformáltja egy erősen torzult plusz jel:



30. ábra. *"Plusz jel" és transzformáltja*

6. Vízszintes szakasz általánosan

Legyünk bátrabbak! Ha c tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor

$$\text{az} \quad y = c \quad \text{egyenlet és a} \quad 0 < x \leq 1 \quad \text{egyenlőtlenségek}$$

egy vízszintes szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét

$$\text{a} \quad \sqrt{u \cdot v} = c \quad \text{egyenletből és a} \quad 0 < \sqrt{\frac{u}{v}} \leq 1 \quad \text{egyenlőtlenségekből}$$

kapjuk. A megoldás:

$$v = c^2 \cdot \frac{1}{u} \qquad 0 < u \leq c$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hiperbola-darab, mely a $v = 1 / u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik. A hiperbola-darab bal széle felszalad a v tengelyt közelítve végtelen magasra, a jobboldali végpontja pedig a (c, c) pont

7. Függőleges szakasz általánosan

Hasonlóképpen, ha d tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor

$$\text{az} \quad x = d \quad \text{egyenlet és a} \quad 0 < y \leq 1 \quad \text{egyenlőtlenségek}$$

egy vízszintes szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét a

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = d \qquad\qquad 0 \le \sqrt{u \cdot v} \le 1$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

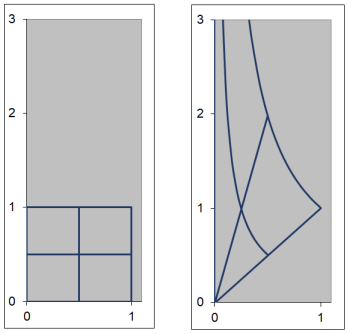
$$v = \frac{1}{d^2} \cdot u \qquad\qquad 0 \le u \le d$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) -síkon egy szakasz azon az egyenesen, mely átmegy az origón, és meredeksége az 1 -nél nagyobb $1/d^2$ érték. A szakasz baloldali végpontja az origó, a jobboldali végpontja pedig a standard hiperbolán lévő $(d\,,\,1/d)$ pont.

7.1.5. A "börtön rács" "díszes rács"-ba transzformálódik, a négyzetből pedig "vitorla" lesz,

Az előbb mondottakból remélhetőleg világos (lásd a következő ábrát!), hogy

- a függőleges és vízszintes szakaszokból álló "börtön rács" transzformáltja az ábrán látható "díszes rács",
- a négyzet transzformáltja pedig az a "vitorla" alakú alakzat, melyet az v-tengely, az u-tengely, a $v = u$ egyenletű egyenes és a $v = 1/u$ hiperbola határol.



31. ábra. *A "börtön rács"-ból "díszes rács" lett lett*

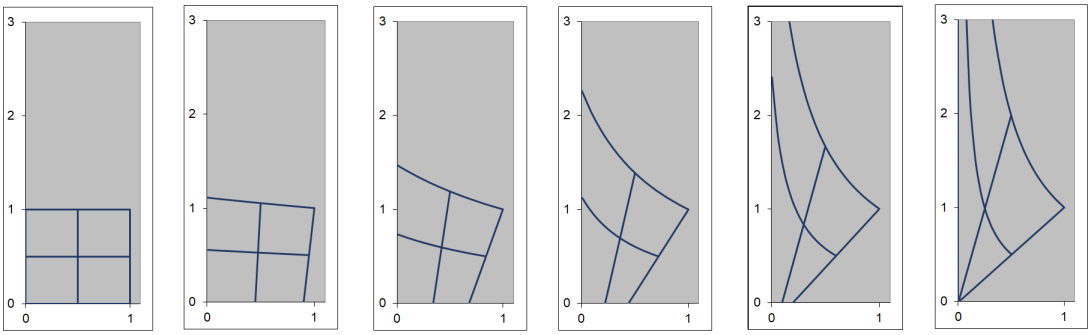
Abból a szempontból, ami számunkra az ilyen transzformciókkal kapcsolatben fontos, egyáltalán nincs szükség az alábbi ábrán látható kép-sorozatra. Mégis – a transzformáció fizikai megvalósításának az elképzelésében – segíthet a következő ábrán látható képek sorozata:

- Kiindulunk a négyzetből és benne felvett rácsból.
- A négyzet jobb alsó sarkát szép finoman húzzuk az origó felé, a bal felső sarkát pedig egyre vadabbul toljuk felfelé.
- A jobb alsó sarkot behúzzuk az origóba, a bal felső sarkot pedig toljuk, toljuk a függőleges tengelyen a végtelen felé.

- A leírt időben folyonos deformáció határértékeként kapjuk a legutolsó ábrát, ami megfelel a mi

$$u = x \cdot y \qquad v = \frac{y}{x}$$

transzformációnknak.



32. ábra. *A transzformáció megvalósítása öt lépésben*

1. Megjegyzés: Természetesen sok féle módon végre lehet hajtani olyan időben folytonos deformációt, ami a mi transzformációnkat valósítja meg. Nem titok, hogyan született az alábbi kép-sorozat. Íme a képlet:

$$u = x \cdot (\ (1 - t)\ + t \cdot y\ ) \qquad v = \frac{y}{(1 - t) + t \cdot x}$$

ahol a t paraméter az "idő" szerepét tölti be $(0 \leq t \leq 1)$. Tessék ellenőrizni, hogy $t = 0$ esetén a

$$u = x \qquad v = y$$

képlet-pár a "helyben maradás"-t jelenti, $t = 1$ esetén pedig a bennünket érdeklő

$$u = x \cdot y \qquad v = \frac{y}{x}$$

transzformációnkat adja. Az ábrán látható hat kép a $t = 0.00$, 0.10, 0.32, 0.56, 0.80, 1.00 értékekkel készült.

2. Megjegyzés: Adott, fix t értékek mellett szükségünk lesz a következő fejezetben az

$$u = x \cdot (\ (1 - t)\ + t \cdot y\ ) \qquad v = \frac{y}{(1 - t) + t \cdot x}$$

transzformáció inverzére, aminek képlet-párját úgy kapjuk meg, hogy a két egyenletből x -et és y -t kifejezzük u és v segítségével. A számolástól megkíméljük a Kedves Olvasót, íme az eredmény:

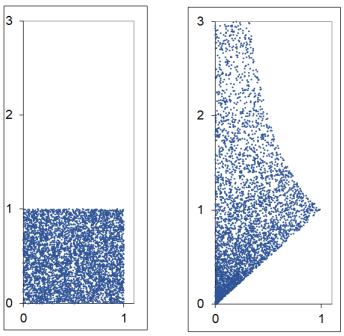
$$x = \frac{-(s/v + s \cdot t) + \sqrt{(s/v + s \cdot t)^2 + 4 \cdot t^2 \cdot u/v}}{2 \cdot t^2}$$

$$y = \frac{(s \cdot t \cdot v - s) + \sqrt{(s \cdot t \cdot v - s)^2 + 4 \cdot t \cdot (s^2 + t \cdot u) \cdot v}}{2 \cdot t}$$

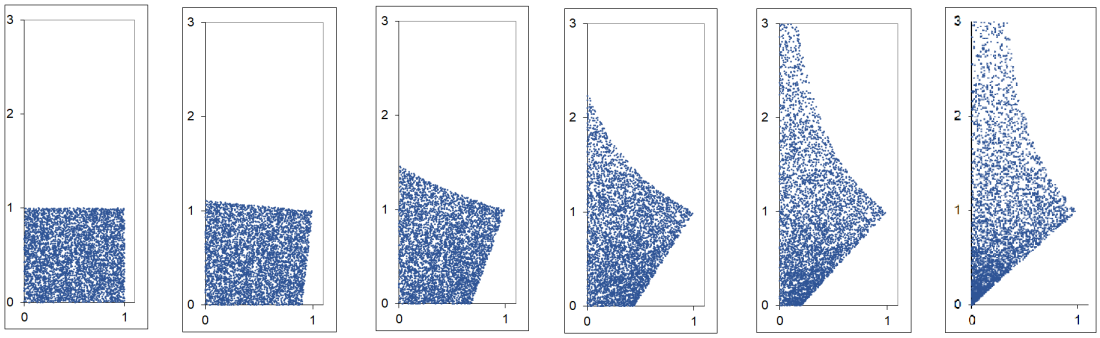
Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kezdőértékek és folytonos v.

7.1.6. Pontfelhők transzformációja

1. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja

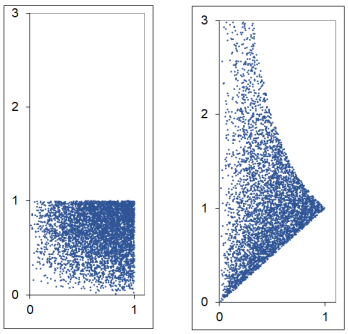


33. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja*



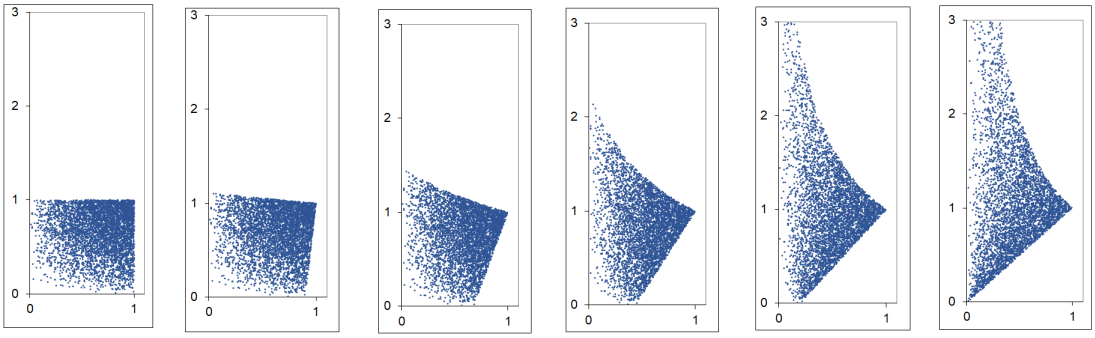
34. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja öt lépésben*

2. Nem-egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja



35. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja*

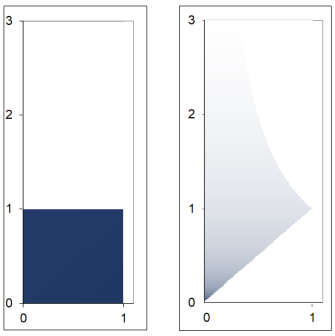
Vetier András – Valószínűségszámítás
nos valószínűségi változók (A rész)



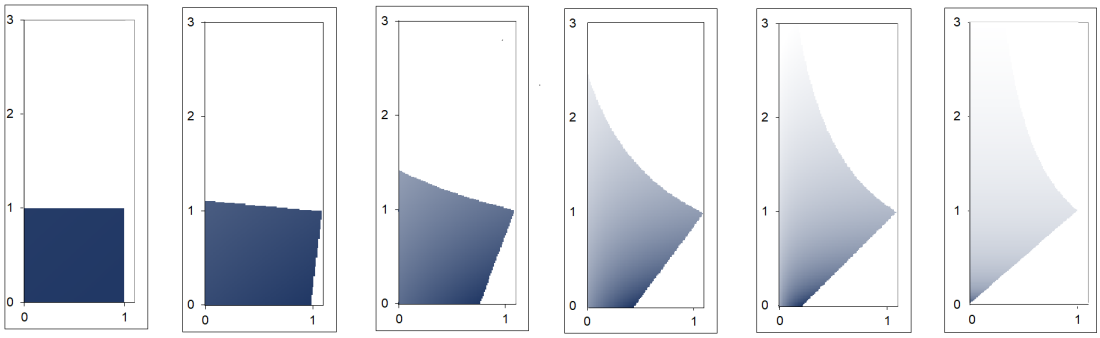
36. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja öt lépésben*

7.1.7. Eloszlások transzformációja

1. Egyenletes eloszlás transzformációja



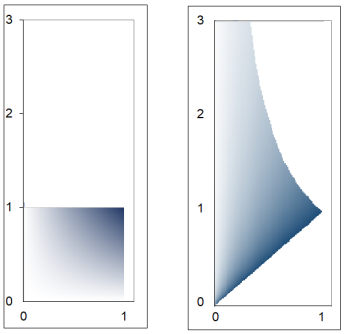
37. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*



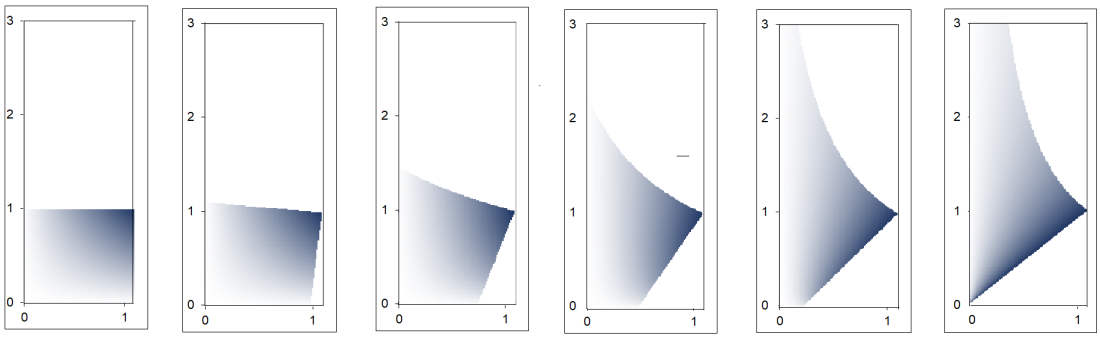
38. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja öt lépésben*

folytonos valószínűségi változók (
– Valószínűségszám –

2. Nem-egyenletes eloszlás transzformációja



39. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*



40. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja öt lépésben*

7.2. Jacobi mátrix

Tekintsünk egy kölcsönösen egyértelmű t transzformációt az (x,y) -síkról az (u,v) -síkra, mely az alábbi két kétváltozós koordiánata függvénnyel van megadva:

$$u = u(x,y)$$

$$v = v(x,y)$$

Az inverz transzformációt t^{-1} jelöli, ennek koordiánata függvényei:

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

Veto András – Valószínűségszámítás valószínűségi változók (A rész)

Az inverz transzformáció **Jacobi mátrix**a fontos szerepet játszik abban a formulában, melyet alább megadunk. Definíciója:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

7.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat

Ha az (x,y) -síkon tekintett $f(x,y)$ sűrűségfüggvényű eloszlást a t transzformációval az (u,v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

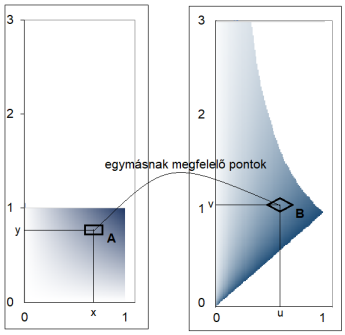
$$s(\ u\ ,\ v\ )\ =\ f\ (\ x(u,v)\ ,\ y(u,v)\ )\ \left|\ \det\left(\ \frac{\partial(\ x\ ,\ y\ )}{\partial(\ u\ ,\ v\ )}\ \right)\right|$$

Vázlatos bizonyítás. Tekintsünk egy (x,y) pontot az (x,y) -síkon, mely a t transzformációnál (u,v) pontnak felel meg az (u,v) -síkon. Vegyünk fel egy kis A halmazt az (x,y) pont körül, mely a t transzformációnál egy B halmaznak felel meg az (u,v) pont körül. Mint ismeretes

$$\frac{A\ \textit{ területe}}{B\ \textit{ területe}}\ \approx\ \left|\ \det\left(\ \frac{\partial(\ x\ ,\ y\ )}{\partial(\ u\ ,\ v\ )}\ \right)\right|$$

Ezt felhasználva

$$s(\ u\ ,\ v\ )\ \approx\ \frac{\mathrm{P}(\ (U,V)\in B\ )}{B\ \textit{ területe}}\ =\ \frac{\mathrm{P}(\ (X,Y)\in A\ )}{A\ \textit{ területe}}\ \cdot\ \frac{A\ \textit{ területe}}{B\ \textit{ területe}}\ \approx\ f(\ x\ ,\ y\ )\ \left|\ \det\left(\ \frac{\partial(\ x\ ,\ y\ )}{\partial(\ u\ ,\ v\ )}\ \right)\right|$$



41. ábra. *Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat levezetése*

Vetier András – Valószínűségszámítás 4. rész. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

8. Lineáris transzformáció síkról síkra

8.1. Mátrixszal való szorzás

Tekintsük a

$$u = a_{11}x + a_{12}y$$
$$v = a_{21}x + a_{22}y$$

képletekkel definiált, azaz – mátrixokkal felírva – a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jelöléseket, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$$

ahol $\mathbf{A}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ mátrix inverze.

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \ \left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$$

A képletben a $\left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$ szorzófaktor az inverzmátrix determinánsának abszolút értékét jelenti.

8.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás

Tekintsük most a

$$u = a_{11}x + a_{12}y + b_1$$
$$v = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

jelölést, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})$$

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})\ ) \ \left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – A rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

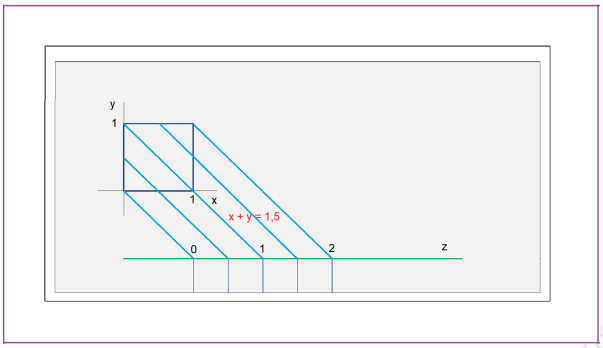
9. Transzformáció síkról egyenesre

A következő 4 oldalon példák vannak, melyeket egyelőre – a matematikai számolások mellőzésével – csak nézegetni kell. Ezekkel a példákkal az általános szabályt próbáljuk előkészíteni. A példákkal kapcsolatos számolások majd akkor jönnek, ha az általános szabályt már megbeszéltük.

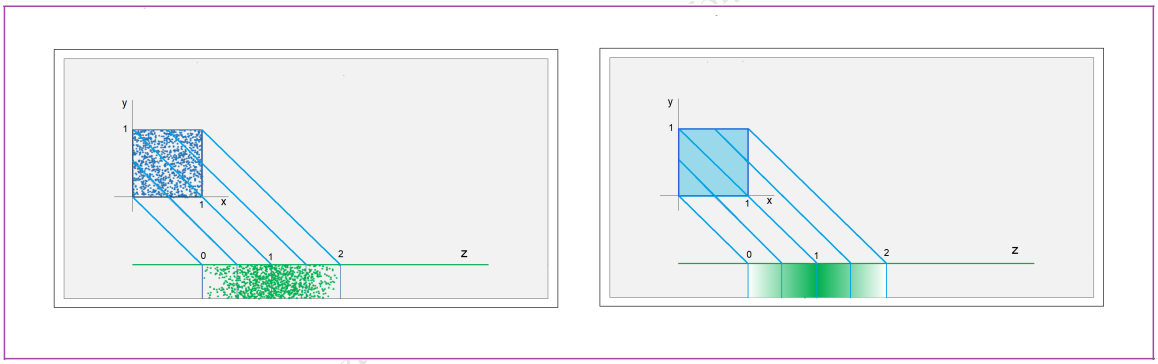
Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.1. Példák ábrákkal szemléltetve

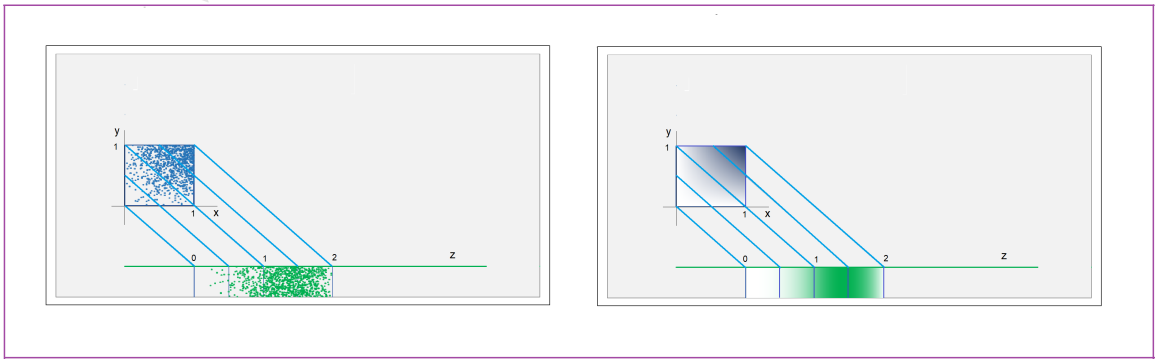
9.1.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel



42. ábra. *Transzformáció az egységnégyzetről a* $z = x + y$ *összeg függvénnyel*



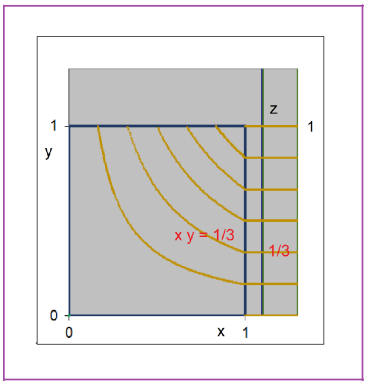
43. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*



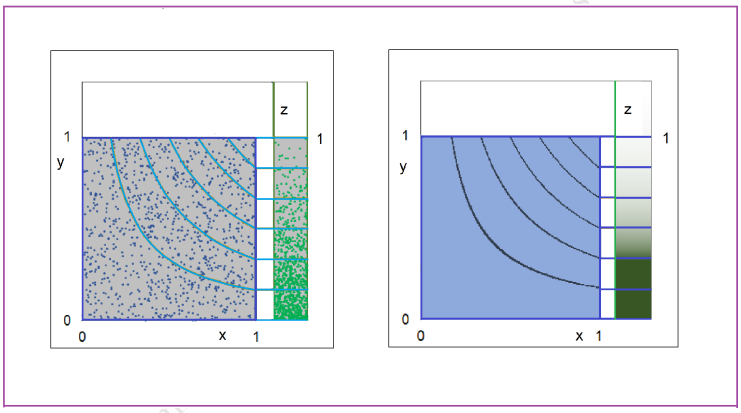
44. ábra. *Az* $f(x, y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

folytonos valószínűségi változók (A rész)
Valószínűségszámítás

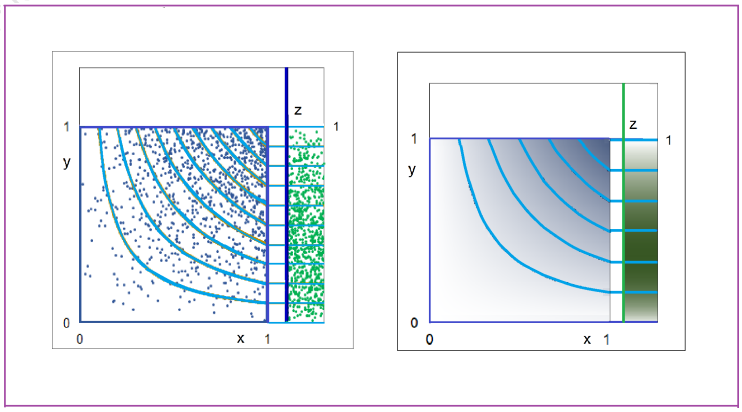
9.1.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel



45. ábra. *Transzformáció az egységnégyzetről a* $z = x \cdot y$ *szorzat függvénnyel*



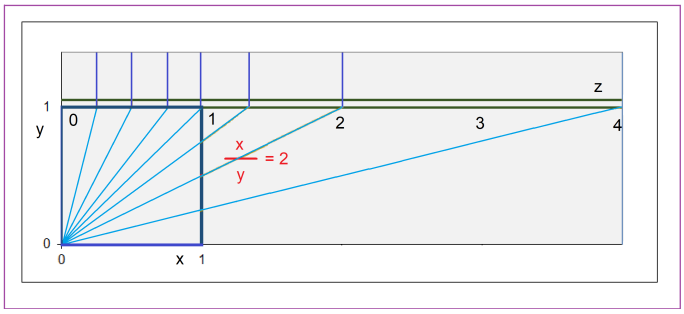
46. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja*



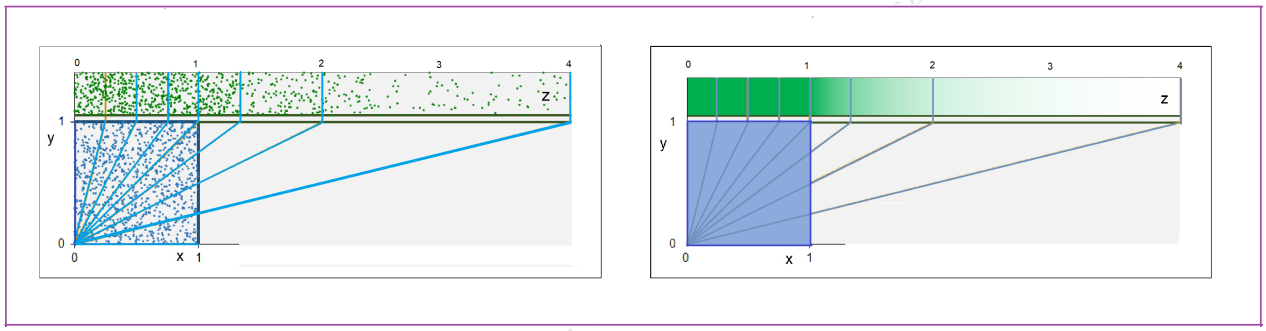
47. ábra. *Az* $f(x, y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

Vetier András – Valószínűségszámítás és valószínűségi változók (A rész)

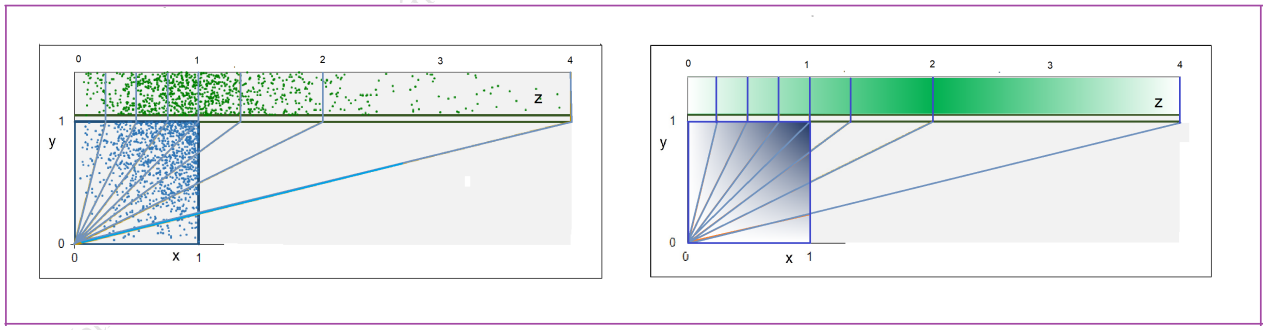
9.1.3. Transzformáció a $z = x/y$ hányados függvénnyel



48. ábra. *Transzformáció az egységnégyzetről a* $z = x/y$ *hányados függvénnyel*



49. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*



50. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

9.2. Általános transzformációs képlet

Tekintsünk egy (X, Y) folytonos kétdimenziós valószínűségi változót. Jelöljük a sűrűségfüggvényét $f(x, y)$ -nal. Legyen $z = t(x, y)$ egy folytonosan differenciálható egy-egyértelmű kétváltozós függvény, mely a síkról a számegyenesre képez: az (x, y) számpárhoz hozzárendeli azt a z számot, melyet a $z = t(x, y)$ képlet definiál. Ha az X és Y valószínűségi változók értékeit behelyettesítjük a $t(x, y)$ függvénybe, akkor egy új Z valószínűségi változót kapunk, melyet t(X,Y) -nal jelölünk. A Z , vagyis a t(X,Y) valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelöljük $R(z)$ -vel, sűrűségfüggvényét $r(z)$ -vel.

Állítás:

$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x, y)\, dx\, dy$$

ahol az A_z halmaz a $t(x, y) < z$ egyenlőtlenség megoldás halmazának az eseménytéren belüli része. Ezt a halmazt a $(-\infty, z)$ intervallum $z = t(x, y)$ transzformációval kapcsolatos **ősképé**nek, avagy a z szinthez tartozó **nívóhalmaz**-nak is szokták nevezni.

Bizonyítás. A $Z < z$ esemény ekvivalens az $(X, Y) \in A_z$ eseménnyel, így

$$R(z) = \mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(\,(X, Y) \in A_z) = \iint\limits_{A_z} f(x, y)\, dx\, dy$$

A kapott $R(z)$ függvényt z szerint deriválva a sűrűségfüggvényt kapjuk:

$$r(z) = R'(z)$$

9.3. Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban

Az alábbi példákkal néhány oldallal feljebb már találkoztunk. Ott – ábrák segítségével – csak bemutattuk a transzformációk hatását, a keletkező eloszlásokat festékkel szemléltettük. Ebben az alfejezetben kiszámoljuk a transzformácóval adódó új eloszlások eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Mindegyik példában a kiindulásul vett eseménytér az $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ egyenlőtlenségekkel definiált egységnégyzet. A feladatok párokat alkotnak, mert mindegyik transzformációval kapcsolatban először az egyenletes eloszlást, aztán pedig az $f(x, y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformáljuk.

A transzformációval adódó eloszlás $R(z)$ eloszlásfüggvényének kiszámolásához először az

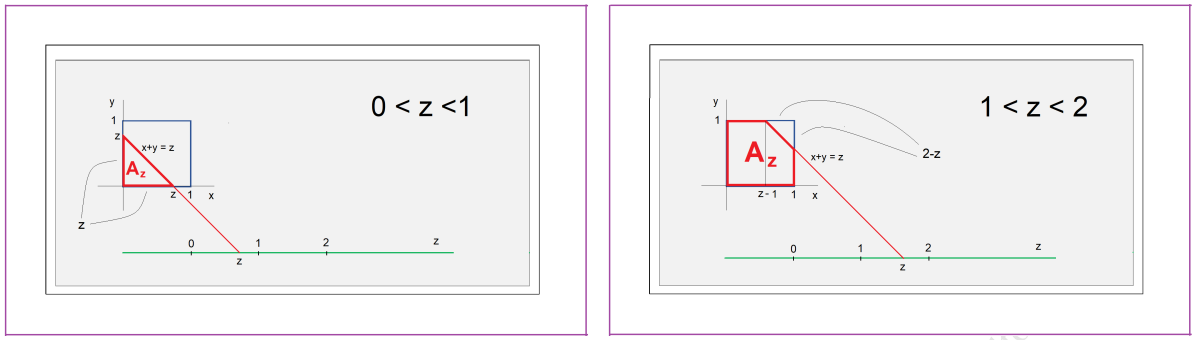
$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x, y)\, dx\, dy$$

képletben szereplő A_z nívóhalmazt kell meghatározni a szóbajövő z értékekre. Ehhez a $t(x, y) < z$ egyenlőtlenség megoldás halmazára van szükségünk. Ezért mindegyik transzformáció esetében ezzel kezdődik a számolás.

Amikor egyenletes eloszlást transzformálunk, akkor integrál helyett területek hányadosaként is megkaphatjuk az $R(z)$ valószínűséget.

Vetier Andráné – Valószínűségszámítás A. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok (A rész)

9.3.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel



51. ábra. *Nívóhalmazok meghatározása a $z = x + y$ transzformáció kapcsán*

Az $x + y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza az $x + y = z$ egyenletű egyenes alatti félsík. Ezért az A_z halmaz

$0 < z < 1$ esetén nem más, mint egy derékszögű háromszög az egységnégyzet bal alsó sarkában, melyet az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetünk:

$$0 < x < z\,, \qquad 0 < y < z - x$$

Ennek a derékszögű hármoszögnek a befogói z hosszúságúak.

$1 < z < 2$ esetén pedig az A_z halmaz egy ötszög, melynek az egysénégyzetre vonatkozó komplementere nem más, mint egy derékszögű háromszög a négyzet jobb felső sarkában. Ezt a háromszöget az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetjük:

$$z - 1 < x < 1\,, \qquad z - x < y < 1$$

Ennek a derékszögű háromszögnek a befogói $2 - z$ hosszúságúak.

1/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x + y$ összeg függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{bal alsó háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z^2/2}{1} = z^2/2$$

$1 < z < 2$ esetén

$$R(z) = 1 - \frac{\text{jobb felső sarki háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = 1 - \frac{(2-z)^2/2}{1} = 1 - (2-z)^2/2$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

$0 < z < 1$ esetén

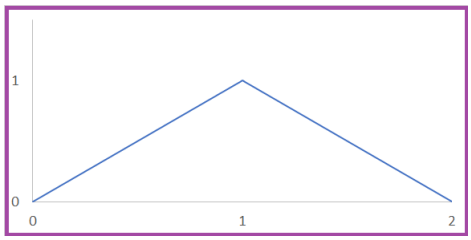
$$r(z) = z$$

$1 < z < 2$ esetén

$$r(z) = 2 - z$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:

Vetic András – Valószínűségszámítás – 4. rész: az átalakításos folyamatos valószínűségi vál



52. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

1/B. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x + y$ összeg függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^z \left(\int_0^{z-x} 4\,x\,y\,dy \right) dx = \frac{z^4}{6}$$

$1 < z < 2$ esetén

$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x,y)\,dx\,dy = 1 - \int_{z-1}^1 \left(\int_{z-x}^1 4\,x\,y\,dy \right) dx = 1 - \frac{8z}{3} + 2z^2 - \frac{z^4}{6}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

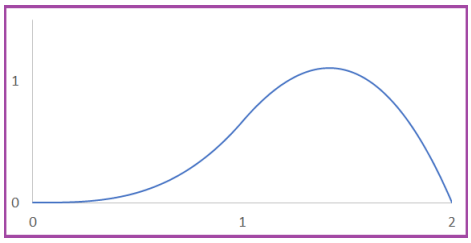
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = \frac{2z^3}{3}$$

$1 < z < 2$ esetén

$$r(z) = -\frac{8}{3} + 4z - \frac{2z^3}{3}$$

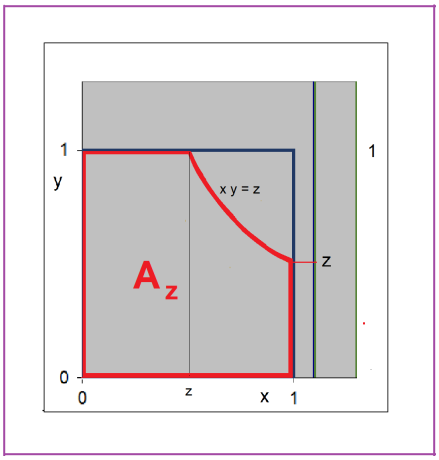
A sűrűségfüggvény grafikonja:



53. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.3.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel



54. ábra. *Nívóhalmazok meghatározása a $z = x \cdot y$ transzformáció kapcsán*

Az $x \cdot y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza az első síknegyedben az $x \cdot y$ egyenletű hiperbola alatti tartomány. Ezért az A_z halmaz nem más, mint ennek a tartománynak az egységnégyzetbe eső ötszög jellegű része, mely az

$$0 < x < z\,, \qquad 0 < y < 1$$

egyenlőtlenségekkel megadható téglalapból, és a

$$z < x < 1\,, \qquad 0 < y < \frac{z}{x}$$

egyenlőtlenségekkel megadható trapéz jellegű halmazból tevődik össze.

2/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel.

Az $R\,(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

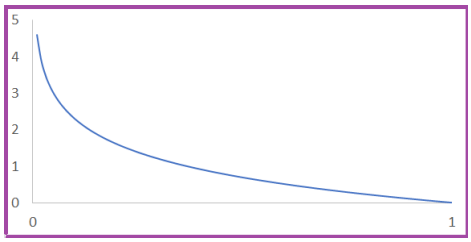
$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{téglalap területe} + \text{trapéz jellegű rész területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z \cdot 1 + \int_z^1 z/x\,dx}{1} = z - z \cdot \ln(z)$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

$$r(z) = -\ln(z)$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



55. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

Vetter András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós nevezetes valószínűségi változók (A rész)

2/B. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

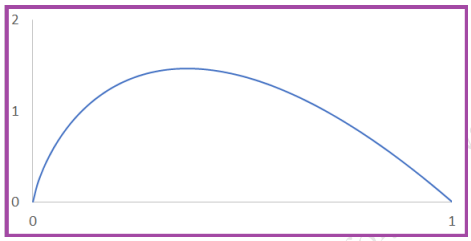
$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \int_0^z \left(\int_0^1 4\,x\,y\,dy \right) dx + \int_z^1 \left(\int_0^{z/x} 4\,x\,y\,dy \right) dx = z^2 - 2z^2 \cdot \ln(z)$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

$$r(z) = -4z \cdot \ln(z)$$

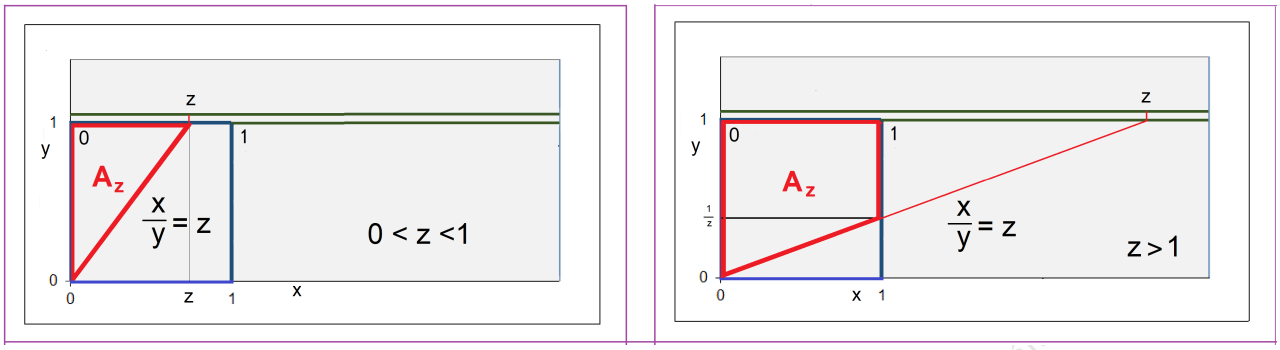
A sűrűségfüggvény grafikonja:



56. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós fo valószínűségi változók (A rész)

9.3.3. Transzformáció a $z = x / y$ hányados függvénnyel



57. ábra. *Nívóhalmazok meghatározása a $z = x / y$ transzformáció kapcsán*

Az $x/y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza nem más, mint az $x/y = z$, azaz $y = x/z$ egyenletű egyenes feletti félsík. (Nem elírás! A megoldás halmaz tényleg az $y = x/z$ egyenletű egyenes **feletti** félsík.) Ezért az A_z halmaz

$0 < z < 1$ esetén nem más, mint egy derékszögű háromszög az egységnégyzet bal oldalán, melyet az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetünk:

$$0 < x < z\,, \qquad x/z < y < 1$$

Ennek a derékszögű hármoszögnek a befogói z , illetve 1 hosszúságúak.

$1 < z$ esetén az A_z halmaz egy derékszögű trapéz, melynek a párhuzamos alapjai függőleges helyzetűek. Ezt a trapézt az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetjük:

$$0 < x < 1\,, \qquad x/z < y < 1$$

Ennek a trapéznak az alapjai 1 , illetve $1 - 1/z$ hosszúságúak, a trapéz magassága pedig 1 .

3/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x / y$ hányados függvénnyel.

Az $R\,(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{bal oldali háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z/2}{1 \cdot 1} = \frac{z}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$R(z) = \frac{1 - 1/(2z)}{1 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{2z}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

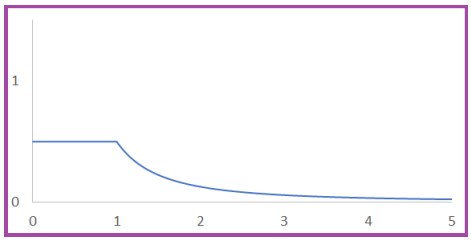
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{2z^2}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



58. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

3/B. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x\,/\,y$ hányados függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^z \left(\int_{x/z}^1 4\,x\,y\,dy \right) dx = \frac{z^2}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$R(z) = \iint\limits_{A_z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x/z}^1 4\,x\,y\,dy \right) dx = 1 - \frac{1}{2z^2}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

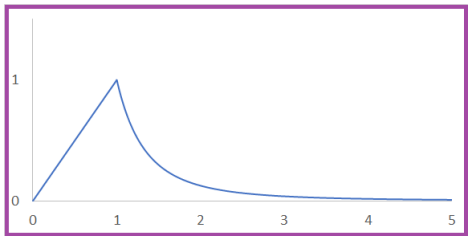
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = z$$

$1 < z < 2$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{z^3}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



59. ábra. *A sűrűségfüggvény grafikonja*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.4. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve

A sok síkról egyenesre történő transzformáció közül kiragadjuk a legfontosabbat: az összegképzést. Az összegképzéssel kapcsolatban egy egyszerű módszert mutatunk a sűrűségfüggvény meghatározására. Először – ügyesen – a síkról síkra képezünk, onnan pedig a vízszintes tengelyre vetítünk. Igaz, két lépésben jutunk el az összeg sűrűségfüggvényéhez, de mindkét lépés egyszerű és elegáns.

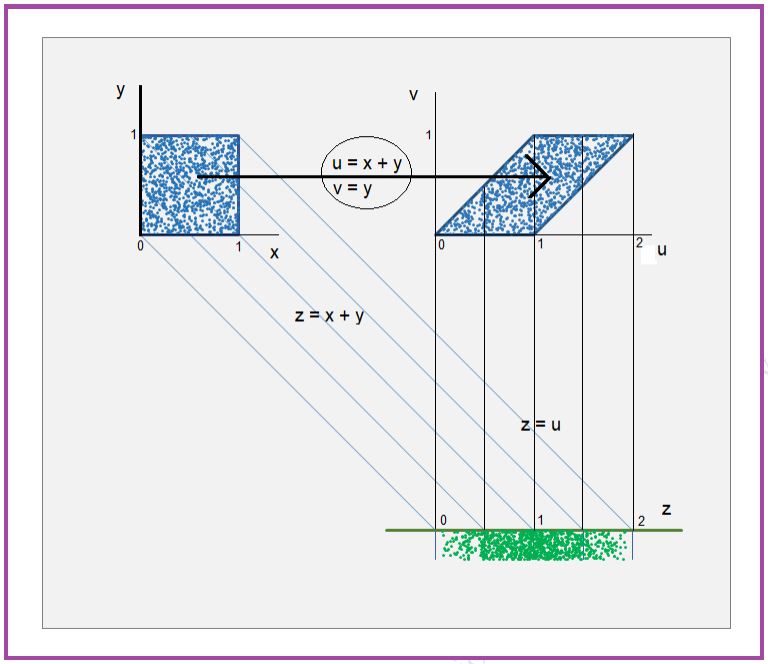
Tessék nézegetni, tanulmányozgatni a következő három oldalon lévő ábra-párokat! Mindhárom oldalon

- a felső ábra kísérleti eredményeket ábrázol pontfelhőkkel,
- az alsó ábra elméleti eloszlásokat ábrázol festékkel.

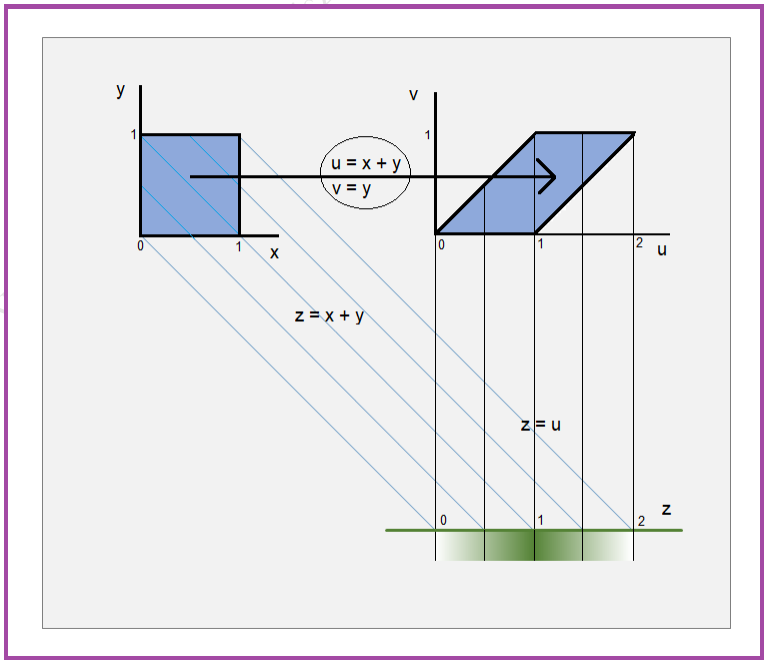
A pédákkal kapcsolatos számolásokat egy későbbi alfejezetben adjuk meg.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.4.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

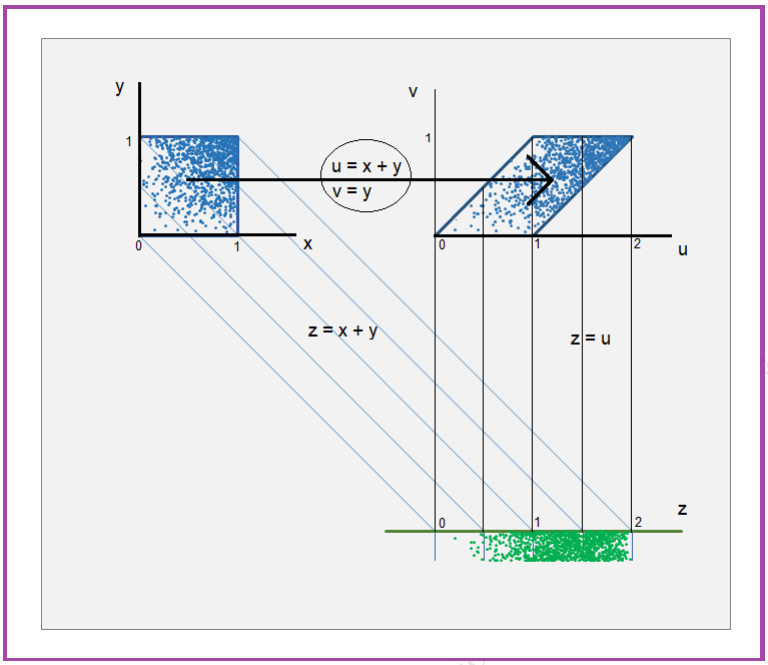


60. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*

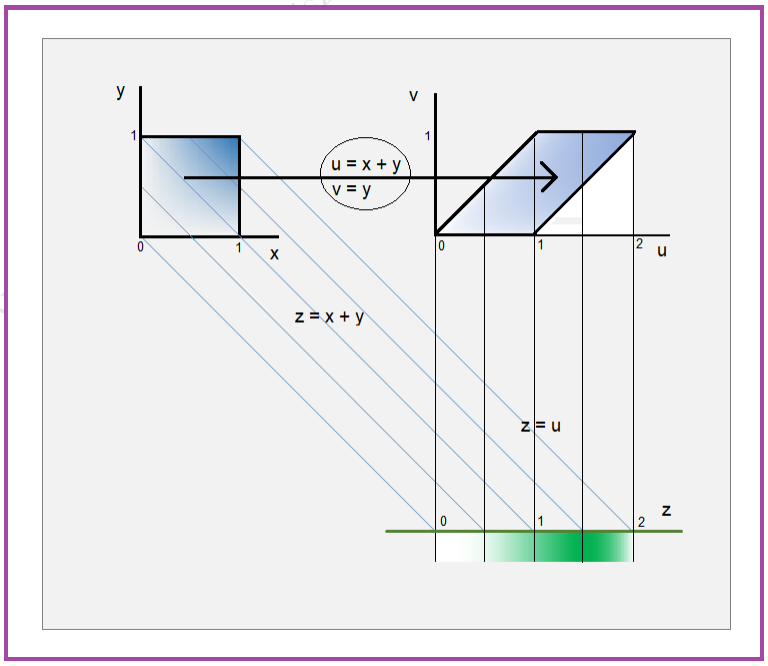


61. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

9.4.2. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

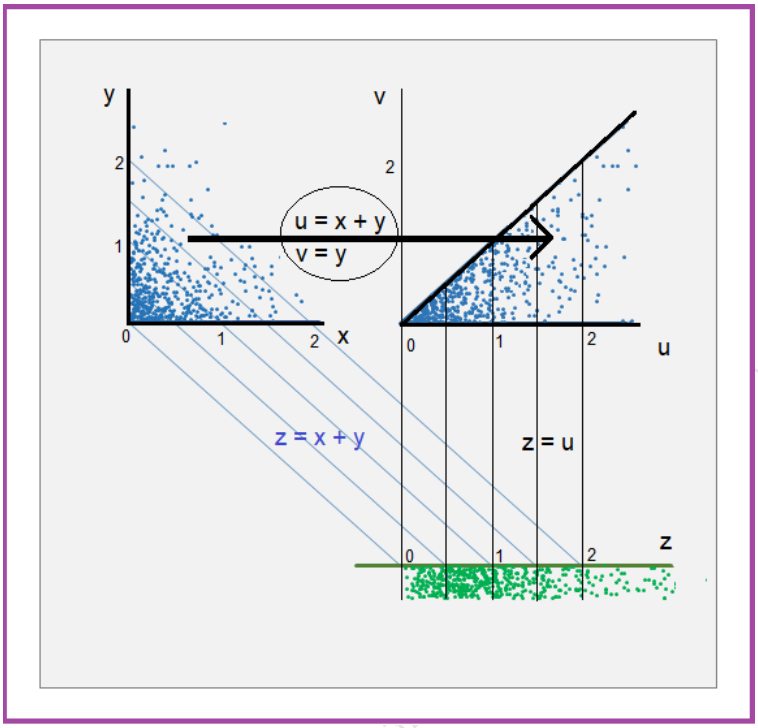


62. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*



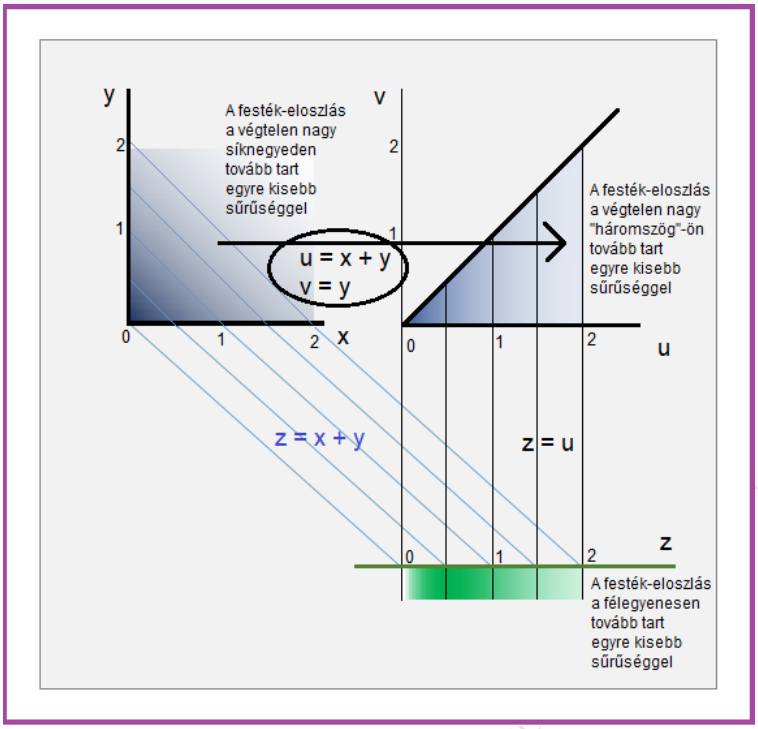
63. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

9.4.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben



64. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: kétdim. … változók (A rész)



65. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós fo… változók (A rész)

9.5. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet

Mielőtt ezt a részt elolvassa, érdemes átnézni az 1. rész 8. fejezetének 8. alpontjában olvasható 3. példát, melynek címe: "A kihúzott pirosak száma és kékek száma összegének súlyfüggvénye (eloszlása)".

Ugyanis ez a példa rámutat arra az egyszerű tényre, hogy *diszkrét X és Y valószínűségi változók esetén a két valószínűségi változó $Z = X + Y$ összegének $r(z)$ súlyfüggvényét úgy kapjuk meg a síkbeli $p(x, y)$ súlyfüggvényből, hogy $p(x, y)$ értékeit összegezzük az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén.*

A következő állítás szerint *folytonos X és Y valószínűségi változók esetén a két valószínűségi változó $Z = X + Y$ összegének $r(z)$ sűrűségfüggvényét úgy kapjuk meg a síkbeli $f(x, y)$ súlyfüggvényből, hogy $f(x, y)$ értékeit integráljuk az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén.*

Állítás. Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$. X és Y összegét jelöljük Z -vel: $Z = X + Y$. Ekkor Z sűrűségfüggvénye kétféleképpen is kiszámolható $f(x, y)$ -ból:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - v, v)\, dv$$

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z - u)\, du$$

1. Megjegyzés. Adott z esetén a $(z - v, v)$, illetve az $(u, z - u)$ pontok az $x + y = z$ egyenletű egyenest futják be, ezért mindkét formula azt fejezi ki, hogy $r(z)$ -t úgy kapjuk meg $f(x, y)$ -ból, hogy az értékeit az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén integráljuk.

2. Megjegyzés. Természetesen az integrál kiszámításánál az integritási tartományból elhagyatók az olyan részek, ahol az integandus 0 -val egyenlő. Ezért ha az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény az S tartományon kívül nulla, akkor egy adott z érték esetén a $(-\infty, \infty)$ integritási tartomány

- az első integrálban az $A_z = \{v : (z - v, v) \in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z) = \int_{A_z} f(z - v, v)\, dv$$

- a második integrálban a $B_z = \{u : (u, z - u) \in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z) = \int_{B_z} f(u, z - u)\, du$$

Az első formula vázlatos bizonyítása. A $z = x + y$ leképezést több lépésben hajtjuk végre. Először tekintjük az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható

$$\begin{array}{ccccc} u & = & x & + & y \\ v & = & & & y \end{array}$$

lineáris leképezést, majd az (u, v) -síkról vetítünk a vízszintes tengelyre. A vízszintes tengelyt általában u -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. (Egy tengelynek lehet több neve, jele is!) A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z = x + y$ leképezést adja.

Az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható lineáris transzfromáció inverze:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & u & - & v \\ y & = & & & v \end{array}$$

Vetítés, András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A-5)

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determináns nyilván 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u,v) \;=\; f\,(\,u-v\,,v\,)\;\cdot\;1 \;=\; f\,(\,u-v\,,v\,)$$

Ezek után a vízszintes tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_1(u) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\;dv = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\,u-v\,,v\,)\;dv$$

Most u helyett z -t írunk, $s_1(u)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül az elsőt:

$$r(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\,z-v\,,v\,)\;dv$$

A második formula vázlatos bizonyítása. A $z = x + y$ leképezést most is több lépésben hajtjuk végre, de egy kicsit másképpen. Először tekintjük az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható

$$\begin{array}{rcl} u & = & x \\ v & = & x \;+\; y \end{array}$$

lineáris leképezést, majd az (u, v) -síkról vetítünk a függőleges tengelyre. A függőleges tengelyt általában v -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z = x + y$ leképezést adja.

Az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható transzfromáció inverze:

$$\begin{array}{rcl} x & = & u \\ y & = & v \;-\; u \end{array}$$

A Jacobi determináns nyilván most is 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u,v) \;=\; f\,(\,u\,,v-u\,)\;\cdot\;1 \;=\; f\,(\,u\,,v-u\,)$$

Ezek után a függőleges tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_2(v) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\;du = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\,u\,,v-u\,)\;du$$

Most v helyett z -t írunk, $s_2(v)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül a másodikat:

$$r(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\,u\,,z-u\,)\;du$$

Vetítés András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok (A rész)

9.6. Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban

9.6.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = 1 \qquad (0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1)$$
$$s(u,v) = 1 \qquad (0 \le u - v \le 1\,,\ 0 \le v \le 1)$$
$$s_1(u) = \int_0^u 1\ dv = u \qquad \text{ha} \quad 0 \le u \le 1$$
$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 1\ dv = 2 - u \qquad \text{ha} \quad 1 \le u \le 2$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = z \qquad \text{ha} \quad 0 \le z \le 1$$
$$r(z) = 2 - z \qquad \text{ha} \quad 1 \le z \le 2$$

9.6.2. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = 4xy \qquad (0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1)$$
$$s(u,v) = 4(u-v)v \qquad (0 \le u - v \le 1\,,\ 0 \le v \le 1)$$
$$s_1(u) = \int_0^u 4(u-v)v\ dv = \frac{2}{3}u^3 \qquad \text{ha} \quad 0 \le u \le 1$$
$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 4(u-v)v\ dv = \frac{2}{3}\left(-u^3 + 6u - 4\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le u \le 2$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = \frac{2}{3}z^3 \qquad \text{ha} \quad 0 \le z \le 1$$
$$r(z) = \frac{2}{3}\left(-z^3 + 6z - 4\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le z \le 2$$

9.6.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} \qquad (x\,,\ y \ge 0)$$
$$s(u,v) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda u} \qquad (u \ge 0\,,\ 0 \le v \le u)$$
$$s_1(u) = \int_0^u \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda u}\ dv = \lambda^2 u \mathrm{e}^{-\lambda u} \qquad (u \ge 0)$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z} \qquad (z \ge 0)$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.7. Konvolúció

Független valószínűségi változók összege (folytonos eset). Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, ezért az összeg sűrűségfüggvényére korábban kapott formula így alakul:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - v)\ f_2(v)\ dv$$

avagy

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)\ f_2(z - u)\ du$$

Felismerjük, hogy $r(z)$ nem más, mint az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ függvények **konvolúciója**.

Jegyezzük meg:

- Ha két független *diszkrét* valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg *súlyfüggvény*ét a tagok súlyfüggvényeiből **konvolúció**val kapjuk.
- Ha két független *folytonos* valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg *sűrűségfüggvény*ét a tagok sűrűségfüggvényeiből **konvolúció**val kapjuk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel

10.1. Regresszió egydimenzióban

10.1.1. A medián minimál tulajdonsága

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, és c egy konstans. A véletlen X pontnak és a c pontnak az $|\,X-c\,|$ távolsága is valószínűségi változó. Mint tudjuk, $|\,X-c\,|$ várható értéke így számolható ki:

$$\mathrm{E}(\,|\,X-c\,|\,) = \int_{-\infty}^{\infty} |\,x-c\,|\, f(x)\, dx$$

Ennek az integrálnak az értéke – természetesen – függ c-től.

Állítás: Az integrál értéke akkor minimális, ha c eleget tesz az $F(c)=\frac{1}{2}$ egyenletnek. Tehát az $|\,X-c\,|$ távolság várható értéke akkor minimális, ha c a valószínűségi változó mediánja.

Bizonyítás *(Extra tananyag)*: Az integrál értékét jelöljük $h(c)$-vel. Az alábbi átalakítások nyilvánvalóak:

$$h(c) = \int_{-\infty}^{\infty} |\,x-c\,|\, f(x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{c} |\,x-c\,|\, f(x)\, dx \;+\; \int_{c}^{\infty} |\,x-c\,|\, f(x)\, dx \;=$$

$$= \int_{-\infty}^{c} (c-x)\; f(x)\, dx \;+\; \int_{c}^{\infty} (\;x-c\;)\; f(x)\, dx \;=$$

$$= \; c \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \;-\; \int_{-\infty}^{c} x\; f(x)\, dx \;+\; \int_{c}^{\infty} x\; f(x)\, dx \;-\; c \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx$$

A kapott négy tag mindegyikét külön-külön deriváljuk c szerint:

$$\left(c \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \right)' = 1 \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \;+\; c\, f(c) = F(x) + c\, f(c)$$

$$-\left(\int_{-\infty}^{c} x\; f(x)\, dx \right)' \;=\; -c\, f(c)$$

$$\left(\int_{c}^{\infty} x\; f(x)\, dx \right)' \;=\; -c\, f(c)$$

$$-\left(c \int_{c}^{\infty} 1\; f(x)\, dx \right)' \;=\; -1 \cdot \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx \;+\; c\, f(c) \;=\; -1 + F(x) + c\, f(c)$$

A kapott 6 tagot összeadva megkapjuk a deriváltat:

$$h'(c) \;=\; 2\, F(c) - 1$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Egydimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Mivel a

$$2\,F(c) - 1 \;=\; 0$$

egyenlet ekvivalens a

$$F(c) \;=\; \frac{1}{2}$$

egyenlettel,

$$h'(c) \;=\; 2\,F(c) - 1 \;=\; 0 \quad \text{ha } c \;=\; \text{medián}$$

$$h'(c) \;=\; 2\,F(c) - 1 \;<\; 0 \quad \text{ha } c < \text{medián}$$

$$h'(c) \;=\; 2\,F(c) - 1 \;>\; 0 \quad \text{ha } c > \text{medián}$$

ami tényleg azt jelenti, hogy $h(c)$ minimuma akkor adódik, ha $c \;=\;$ medián .

10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása

Tegyük fel, hogy X valószínűségi változóra N kísérletet végeztünk. A kísérleti eredményeket jelöljük $X_1, X_2, \ldots, X_N$ -nel. Ha minden kísérleti eredményt egy c konstanssal helyettesítünk, akkor – természetesen – minden egyes helyettesítésnél egy eltérés, egy "hiba" adódik. Ezeknek az eltéréseknek, hibáknak a nagyságai:

$$|\, X_1 - c \,|\,,\; |\, X_2 - c \,|\,,\; \ldots\,,\; |\, X_N - c \,|$$

A hibák átlaga:

$$\frac{|\, X_1 - c \,| \;+\; |\, X_2 - c \,| \;+\; \ldots + \;|\, X_N - c \,|}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közel van az $|\, X - c \,|$ valószínűségi változó várható értékéhez:

$$\frac{|\, X_1 - c \,| \;+\; |\, X_2 - c \,| \;+\; \ldots \;+\; |\, X_N - c \,|}{N} \;\approx$$

$$\approx \mathrm{E}(\,|\, X - c \,|\,) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, x - c \,|\; f(x)\, dx$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó mediánja.

10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága

Steiner egyenlőség: Ha c egy pont a számegyenesen, és tekintünk egy valószínűségi változót vagy eloszlást, akkor a c -re vonatkozó második momentum egyenlő a variancia (azaz szórásnégyzet) plusz a c pont és várható érték közötti távolság négyzete:

$$\sum_x (\, x - c \,)^2\; p(x) \;=\; \sigma^2 \;+\; (\, \mu - c \,)^2 \qquad \text{(diszkrét eseben)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\, x - c \,)^2\; f(x)\; dx \;=\; \sigma^2 \;+\; (\, \mu - c \,)^2 \qquad \text{(folytonos esetben)}$$

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlás esetén a bármely c esetén a c pontra vontatozó tehetetlenségi nyomaték egyenlő a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték plusz az a c -re vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, amit úgy kapnánk, mintha az összes tömeget a súlypontba helyeznénk.

Lőrincz András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Az értelmezés folytonos valószínűségi változók (A rész)

Bizonyítás A Steiner egyenlőség bizonyítását a folytonos esetre adjuk meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\, x - c \,)^2 \, f(x) \, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (\, (\, x - \mu \,) \;+\; (\, \mu - c \,) \,)^2 \;\, f(x) \, dx \;=$$

$$=\; \int_{-\infty}^{\infty} \big(\, (\, x - \mu \,)^2 \;+\; 2(\, x - \mu \,) \cdot (\, \mu - c \,) \;+\; (\, \mu - c \,)^2 \,\big) \;\, f(x) \, dx \;=$$

$$=\; \int_{-\infty}^{\infty} (\, x - \mu \,)^2 \, f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2(\, x - \mu \,) \cdot (\, \mu - c \,) \, f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\, \mu - c \,)^2 \, f(x) \, dx \;=$$

$$=\; \sigma^2 \;+\; 2(\, \mu - c \,) \int_{-\infty}^{\infty} (\, x - \mu \,) \, f(x) \, dx + (\, \mu - c \,)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \;=$$

$$=\; \sigma^2 \;+\; 2(\, \mu - c \,) \, 0 \;+\; (\, \mu - c \,)^2 \, 1 \;=\; \sigma^2 \;+\; 0 \;+\; (\, \mu - c \,)^2 \;=\; \sigma^2 \;+ (\, \mu - c \,)^2$$

Ebben az okoskodásban kihasználtuk azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\, x - \mu \,) \, f(x) \, dx \;=\; 0$$

ami azért igaz, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\, x - \mu \,) \, f(x) \, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx \;- \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, f(x) \, dx \;=$$

$$=\; \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx \;-\; \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \;=\; \mu \;-\; \mu \cdot 1 \;=\; 0$$

A diszkrét eset bizonyításának a gondolatmenete hasonló, csak éppen a sűrűségfüggvények helyett súlyfüggvényt kell venni, és az integrálok helyett összegzést kell végezni.

A Steiner egyenlőség nyilvánvaló következménye a Steiner egyenlőtlenség.

Steiner egyenlőtlenség: A c -re vonatkozó második momentum nagyobb vagy egyenlő, mint a variancia (azaz szórásnégyzet), és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a c pont egybeesik a várható értékkel. Más szavakkal: a c -re vonatkozó második momentum akkor minimális, ha c egyenlő a várható értékkel, és a minimum értéke egyenlő a varianciával (szórásnégyzettel).

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőtlenség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlással kapcsolatban bármely c esetén a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték nagyobb, mint a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Szabó Szabó – Valószínűségszámítás – 1. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása

A kísérleti eredmények hibáit négyzetre emelve az alábbi értékeket kapjuk:

$$(X_1 - c)^2,\ (X_2 - c)^2,\ \ldots,\ (X_N - c)^2$$

Ezek átlaga:

$$\frac{(X_1 - c)^2 \ + \ (X_2 - c)^2 \ + \ \ldots \ + \ (X_N - c)^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közelíthető az $(X - c)^2$ várható értékével:

$$\frac{(X_1 - c)^2 \ + \ (X_2 - c)^2 \ + \ \ldots \ + \ (X_N - c)^2}{N} \ \approx$$

$$\approx \mathrm{E}\left((X - c)^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 \ f(x)\, dx$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó várható értéke.

10.2. Regresszió kétdimenzióban

Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval van dolgunk. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk. A megfigyelt értékek legyenek:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$$

Ha valaki az X és Y értékek közül csak az X -et tudja megfigyelni, akkor feladata lehet, hogy Y -ra tippeljen X megfigyelt értékéből úgy, hogy

ügyesen választ egy alkalmas $y = k(x)$ függvényt, amibe X megfigyelt értékét mindig behelyettesíti, és ezzel a a $k(X)$ függvényértékkel értékkel tippel Y -ra: Y -ra.

Ennél a tippelésnél a véletlen X értékből tippelünk a véletlen Y értékre, ezért az – óhatatlanul adódó – hiba is véletlentől függ.

10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák abszolút értékei:

$$|Y_1 - k(X_1)|, |Y_2 - k(X_2)|, \ldots, |Y_N - k(X_N)|$$

Ezek átlaga

$$\frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \ldots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \ \approx$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $|Y - k(X)|$ várható értékével:

$$\approx \ \frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \ldots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \ \approx$$

$$\approx \ \mathrm{E}(|Y - k(X)|) = \iint_{R^2} |y - k(x)| \ f(x, y)\, dx\, dy =$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

$$\iint\limits_{R^2} |y-k(x)|\ f_1(x)\ f_{2|1}(y|x))\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y-k(x)|\ f_{2|1}(y|x))\ dy \right) f_1(x)\ dx$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y-k(x)|\ f_{2|1}(y|x))\ dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y|x))$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlás mediánjával. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt úgy kapjuk meg, hogy az

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$$

egyenletből y -t kifejezzük x segítségével.

10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák négyzetei:

$$(Y_1 - k(X_1))^2, (Y_2 - k(X_2))^2, \ldots, (Y_N - k(X_N))^2$$

Ezek átlaga

$$\frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \ldots + (Y_N - k(X_N))^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $(Y - k(X))^2$ várható értékével:

$$\frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \ldots + (Y_N - k(X_N))^2}{N} \approx$$

$$\approx \mathrm{E}\left((Y - k(X))^2\right) = \iint\limits_{R^2} (y-k(x))^2\ f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{R^2} (y-k(x))^2\ f_1(x)\ f_{2|1}(y|x))\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y-k(x))^2\ f_{2|1}(y|x))\ dy \right) f_1(x)\ dx$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y-k(x))^2\ f_{2|1}(y|x))\ dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y|x))$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlásnak a várható értékével. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt így kapjuk meg:

$$k(x) = m_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{2|1}(y|x)\ dy$$

Vatter András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (rész)

10.3. Egy számolós minta példa

Példa: Először 0 és 1 között választunk egy Y számot egyenletes eloszlás szerint, majd pedig 0 és Y között választunk egy X számot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint. Számítógéppel a szimuláció így történhet:

$$X = \text{RND}_1 \cdot \text{RND}_2 \qquad Y = \text{RND}_1$$

A definíciót szavakban így mondhatjuk:

$$X = \text{két független random szám szorzata}$$

$$Y = \text{a két tényező közül az első tényező}$$

Tegyük fel, hogy valakinek az a dolga, hogy X -ből Y -ra tippeljen. Két célt is kitűznek neki:

1. A hiba abszolút értékének a várható értékét kell minimalizálnia.
2. A hiba négyzetének a várható értékét kell minimalizálnia.

Megoldás:

$$f(x,y) = f_{1|2}(x|y) \cdot f_2(y)$$

Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = 1 \qquad 0 < y < 1$$

X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y < 1$$

X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_x^1 \frac{1}{y}\, dy = -\ln(x) \qquad 0 < x < 1$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \qquad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\, dy = \int_x^y \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)}\, dy = \frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} \qquad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes mediánja az $X = x$ feltétel mellett az

$$\frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} = \frac{1}{2}$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

egyenlet y -ra történő megoldásából jön ki:

$$\begin{aligned}
\ln(y) - \ln(x) &= -\frac{1}{2}\ln(x) \\
\ln(y) &= \frac{1}{2}\ln(x) \\
\ln(y) &= \ln(\sqrt{x}) \\
y &= \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Ezért az abszolút hiba várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) = \sqrt{x}$$

Y feltételes várható értéke az $X = x$ feltétel mellett:

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{2|1}(y|x)\, dy = \int_x^1 y\, \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)}\, dy = \int_x^1 \frac{1}{-\ln(x)}\, dy = \frac{1-x}{-\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Ezért a négyzetes hiba várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \qquad 0 < x < 1$$

A két függvény összevetése céljából egy egyszerű táblázatot készítettünk az értékeikből:

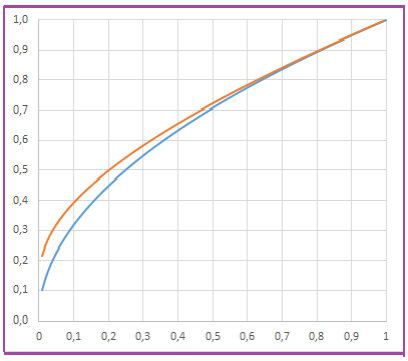
x	$\sqrt{x}$	$\frac{1-x}{\ln(x)}$
0,1	0,32	0,39
0,2	0,45	0,50
0,3	0,55	0,58
0,4	0,63	0,65
0,5	0,71	0,72
0,6	0,77	0,78
0,7	0,84	0,84
0,8	0,89	0,90
0,9	0,95	0,95

Látható, hogy

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{kisebb, mint} \qquad y = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

ami azt jelenti, hogy az abszolút hiba várható értékének minimalizálásakor kisebb értékekkel kell tippelnünk, mint amikor a négyzetes hiba várható értékét minimalizáljuk. Ezt a tényt a "Regressziós függvények összevetése" feliratú ábrán is bemutatjuk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)



66. ábra. *Regressziós függvények összevetése:* $y = \sqrt{x}$ *görbe lejjebb van, mint az* $y = \frac{x-1}{ln(x)}$ *görbe*

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

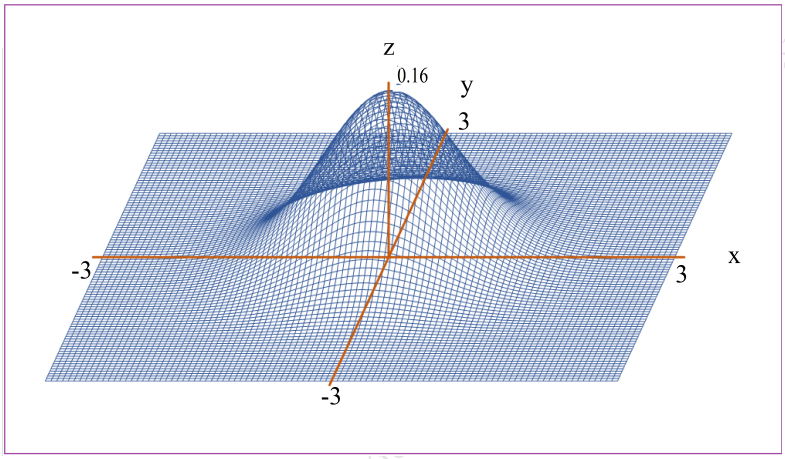
11. Normális eloszlások a síkon

11.1. Standard normális eloszlás a síkon

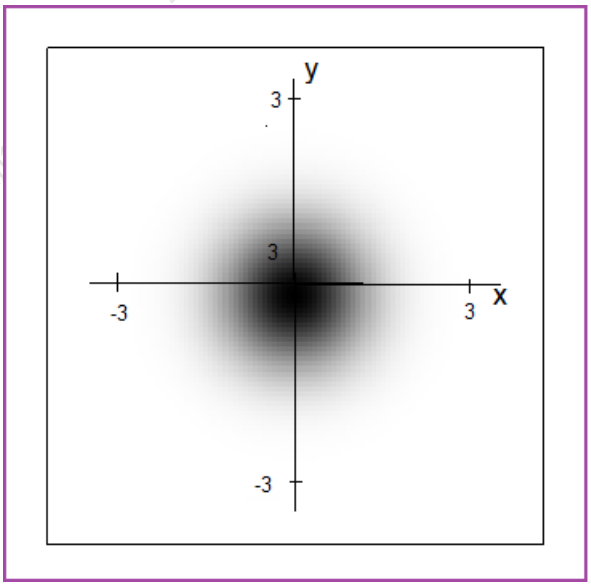
A kétdimenziós standard normális eloszlást az egész síkon az alábbi sűrűségfüggvénnyel definiáljuk:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Mivel a sűrűségfüggvény csak (x^2+y^2)-en keresztül függ x-től és y-tól, az eloszlás körszimetrikus. A függvénynek megfelelő felület egy harang alakjára emlékeztet.



67. ábra. 2-*dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye*



68. ábra. 2-*dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye festékkel szemléltetve*

Könnyű észrevenni, hogy a kétdimenziós standard normális sűrűségfüggvény előállítható egydimenziós standard nor-

mális sűrűségfüggvények direktszorzataként is:

$$\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Ezért a kétdimenziós standard normális eloszlásnak

- a tengelyekre vetett vetületei egydimenziós standard normális eloszlások,
- a feltételes eloszlások a függőleges és a vízszintes egyenesek mentén is egydimenziós standard normális eloszlások.

11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval

Az r korrelációval rendelkező kétdimenziós standard normális eloszlást az egész síkon az alábbi sűrűségfüggvénnyel definiáljuk:

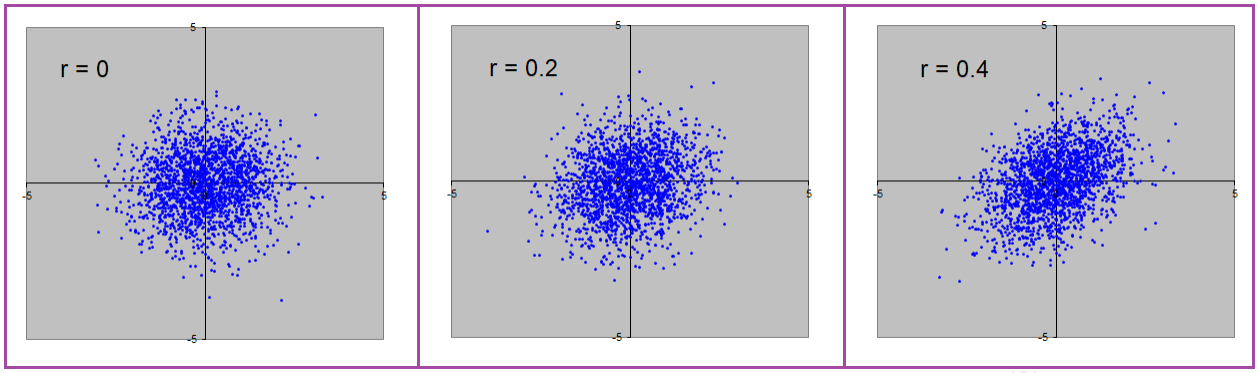
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-2rxy}{1-r^2}}$$

ahol r valós szám -1 és 1 között.

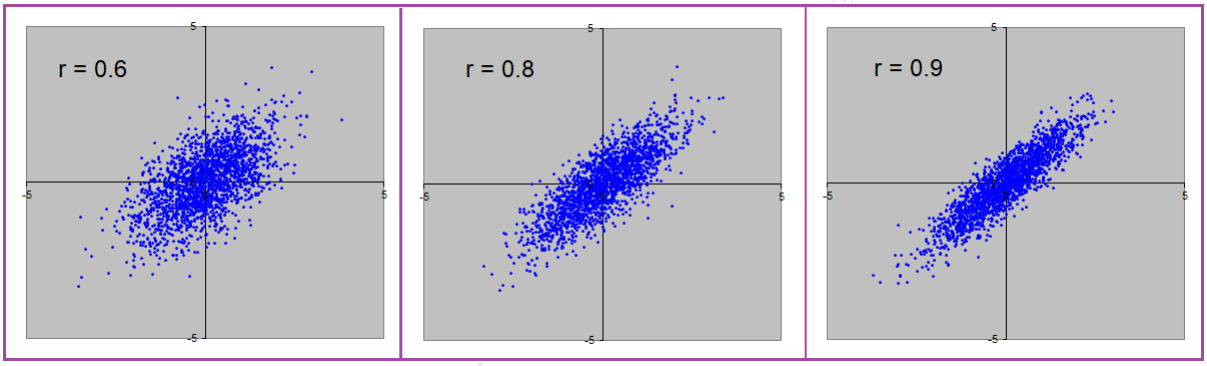
A korrelációval rendelkező standard normális eloszlásokat két ábra sorozattal mutatjuk be – pontfelhők segítségével. Az ábra sorozatokat egyszerre kell áttekinteni úgy, mintha egy moziban lepörgetnék előttünk a képeket.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

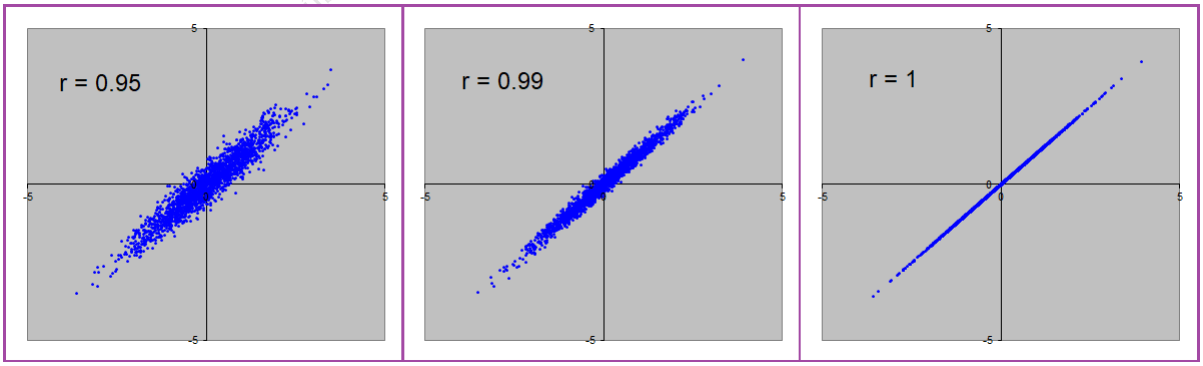
Amikor az r korrelációs együttható pozitív:



69. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0, 0.2, 0.4 *korrelációval*

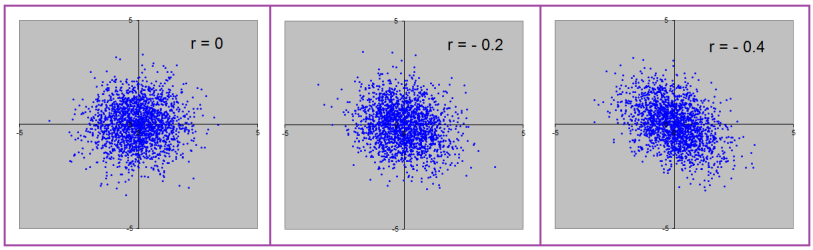


70. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0.6, 0.8, 0.9 *korrelációval*

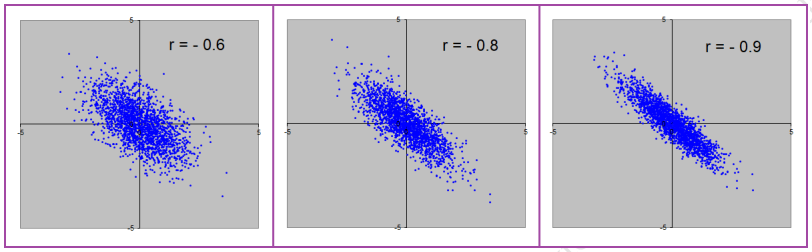


71. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0.95, 0.99, 1 *korrelációval*

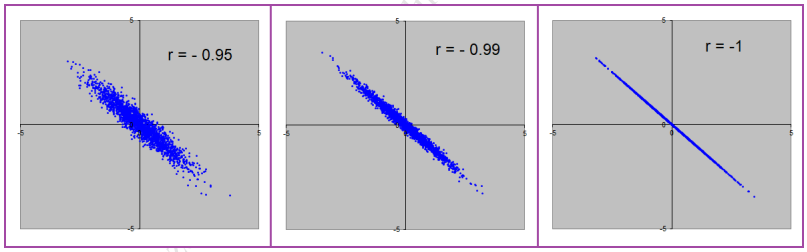
Amikor az r korrelációs együttható negatív:



72. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0 , -0.2 , -0.4 *korrelációval*



73. ábra. *Standard normális pontfelhő* -0.6 , -0.8 , -0.9 *korrelációval*



74. ábra. *Standard normális pontfelhő* -0.95 , -0.99 , -1 *korrelációval*

Megjegyzés: *(Extra tananyag)* A korrelációs együtthatót tetszőleges X és Y valószínűségi változók kapcsán be lehet vezetni. Ehhez érdemes előbb a **kovarianciá**t definiálni:

$$\mathrm{COV}(\ X, Y\ ) = \mathrm{E}\,(\ [X - \mathrm{E}(X)\ ]\,[Y - \mathrm{E}(Y)\ ]\ )$$

Könnyű belátni, hogy a kovarianciát úgy is megkapjuk, hogy a vegyes momentumból kivonjuk a várható értékek szorzatát:

$$\mathrm{COV}(\ X, Y\ ) = \mathrm{E}(X\,Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Ezek után az X és az Y valószínűségi változók **korrelációs együtthatójának**nak általános definíciója:

$$\mathrm{CORR}(\ X, Y\ ) \ = \ \frac{\mathrm{COV}(\ X, Y\ )}{\mathrm{SD}(\ X\ )\ \cdot\ \mathrm{SD}(\ Y\ )}$$

A korrelációs együttható nem más, mint a **kovariancia osztva a szórások szorzatával**.

A korrelációnak a kétdimenziós normális eloszlásoknál betöltött szerepét a fentebbi ábrákkal mutattuk be. További jelentőségére, mely egyéb eloszlások kapcsán is fontos, könyvünkben nem térünk ki.

11.3. Normális eloszlás μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , r paraméterekkel

A kétdimenziós normális eloszlásokat az általános esetben is a sűrűségfüggvényükkel definiáljuk:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}$$

ahol μ_1, μ_2 valós számok, σ_1, σ_2 pozitív számok, az r pedig -1 és 1 közötti valós szám.

A sűrűségfüggvény kitevőjében szereplő tört számlálója, a

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

kifejezés egy kvadratikus képlet, aminek a szintvonalai koncentrikus ellipszisek. Ezért a sűrűségfüggvénynek megfelelő felület egy deformált harang alakjára emlékeztet, mintha a harangot összenyomtuk volna úgy, hogy – felülnézetben – a kör helyett ellipszis legyen az alakja.

1. Megjegyzés: A μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , r paraméterű normális festék eloszlás úgy származtatható az r korrelációval rendelkező kétdimenziós standard normális festék eloszlásból, hogy

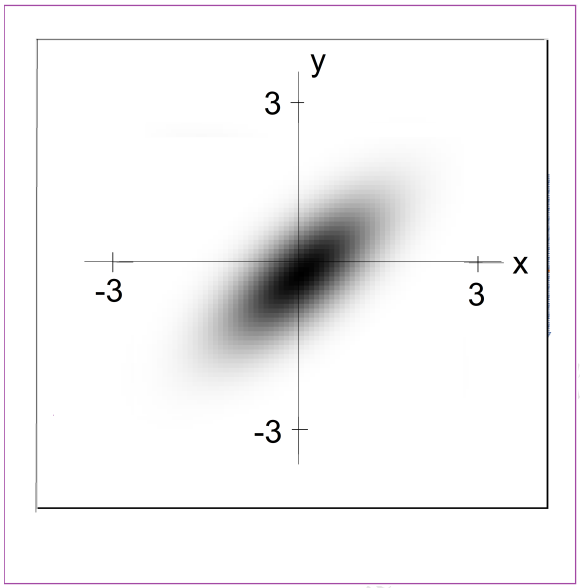
- vízszintes irányban σ_1 -szeres,
- függőleges irányban pedig σ_2 -szeres nagyítást hajtunk végre,
- majd pedig vízszintes irányban eltolunk μ_1 -gyel,
- függőleges irányban pedig μ_2 -vel.

2. Megjegyzés: *(Extra tananyag)*: Meg lehet mutatni, hogy

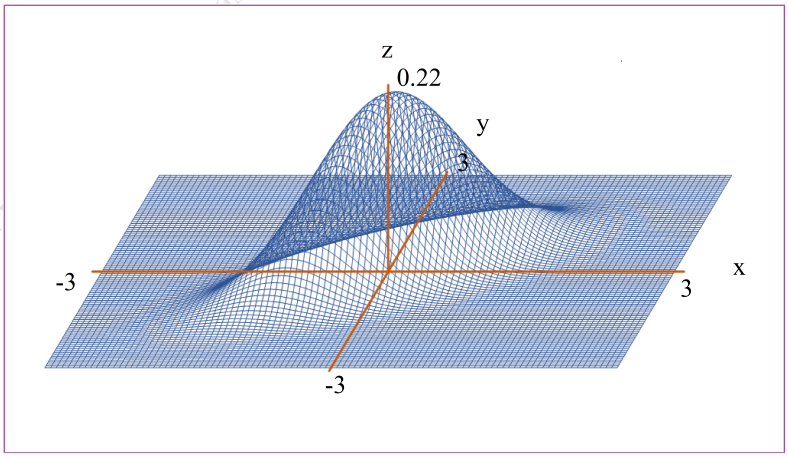
- a sűrűségfüggvény szintvonalai koncentrikus ellipszisek
- az ellipszisek közös középpontja a (μ_1, μ_2) pont
- az ellipszisek tengelyeinek irányát a (a később tárgyalandó) kovariancia mátrix sajátvektorai adják
- a tengelyek hossza pedig arányos a kovariancia mátrix sajátértékeinek négyzetgyökeivel

Vetier András – Valószínűségszámítás – 1. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Normális eloszlás szemléltetése festékkel és a sűrűségfüggvény ábrája felülettel

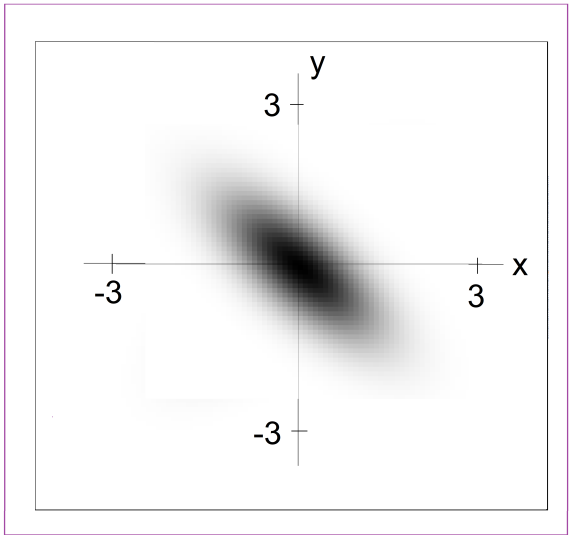


75. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

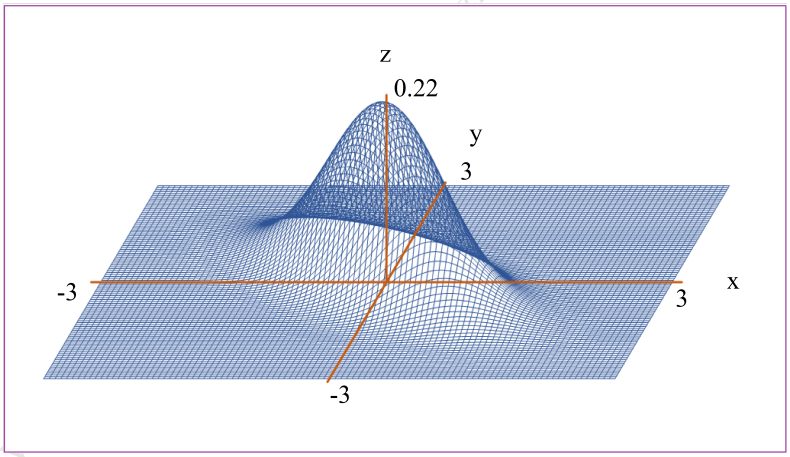


76. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

Vetier András – Statisztika – 4. rész: Kétdimenziós normális eloszlású véletlen változók (A rész)

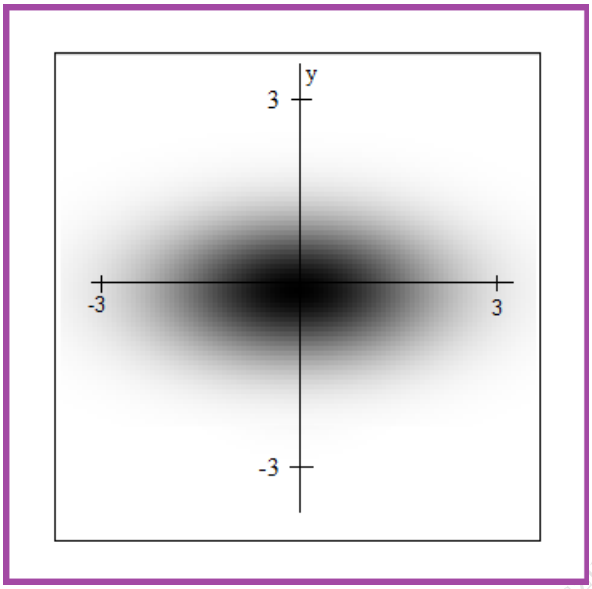


77. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$

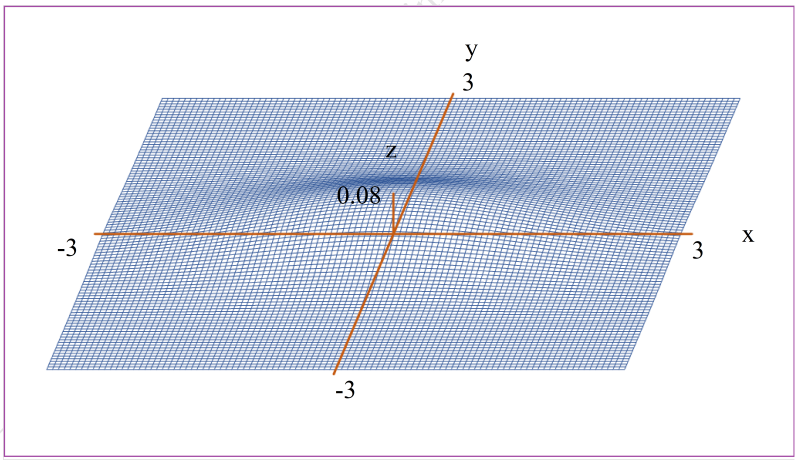


78. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$

Vetier András – Valószínűségszámítás folytonos valószínűségi változók (A rész)

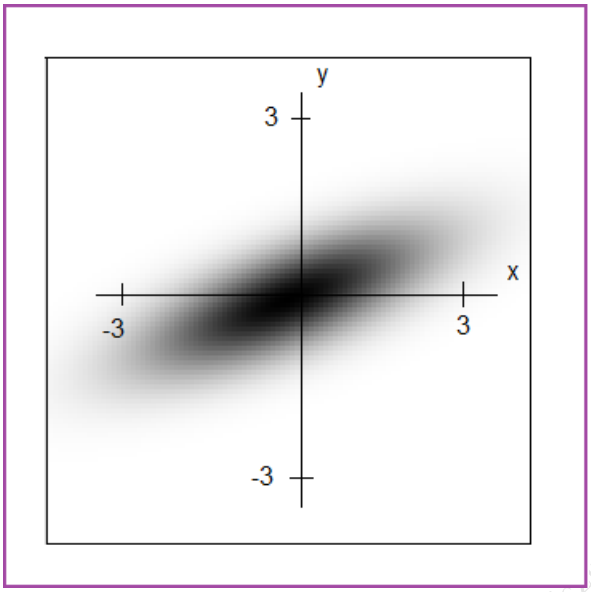


79. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$

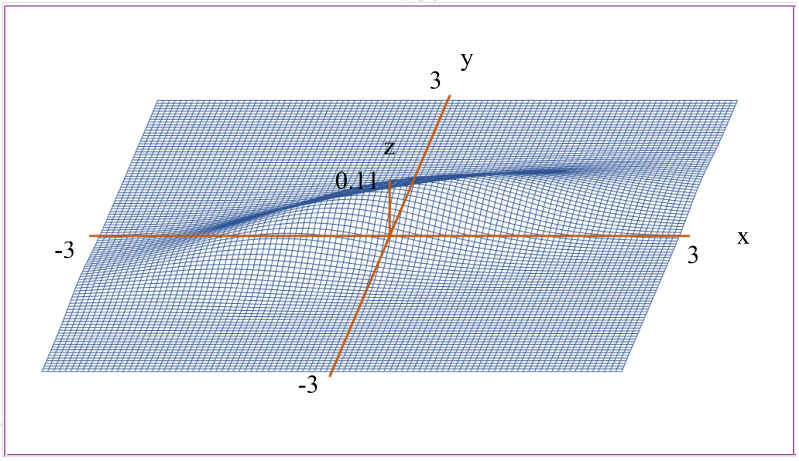


80. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$

Vetier András – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

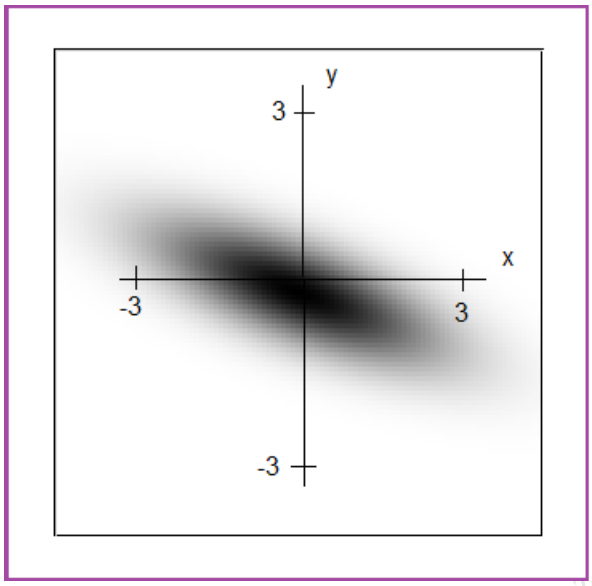


81. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

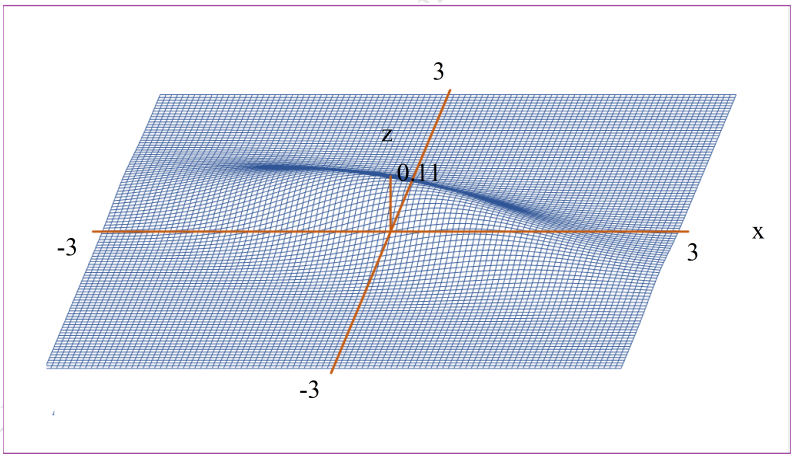


82. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

Vetier András – Valószínűségszámítás – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

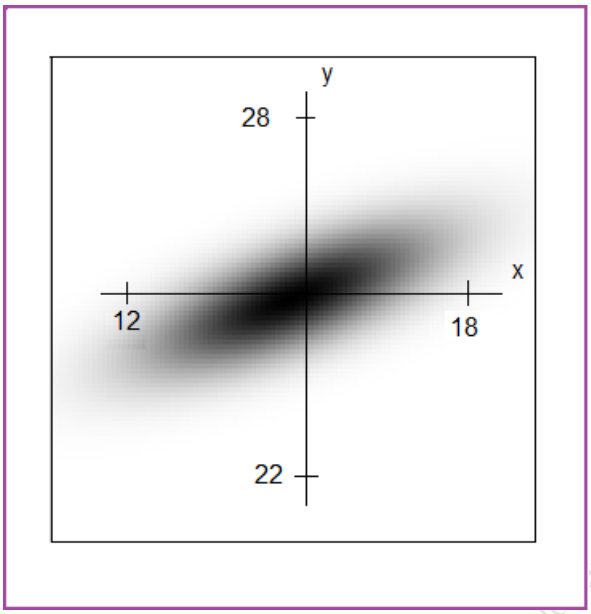


83. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$

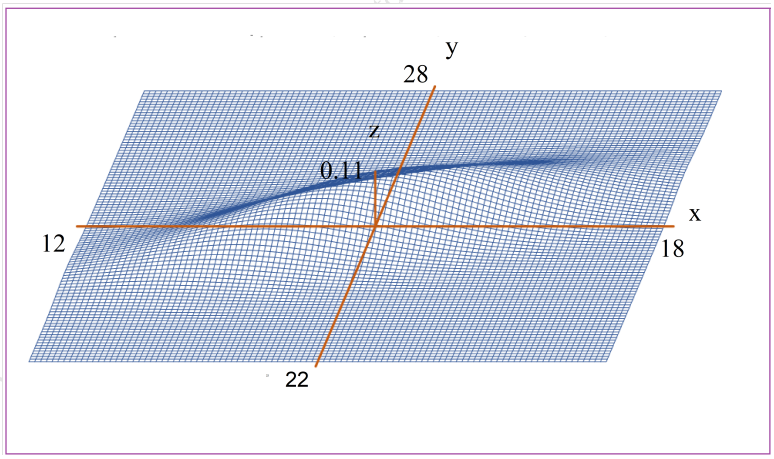


84. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$

Vetier András – Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)



85. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 25$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



86. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye;* $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 25$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

Vetics András — Valószínűségszámítás — Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Mikor használunk kétdimenziós normális eloszlásokat?

1. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, r paraméterekkel.

   Ezt a kijelentést *kétdimenziós centrális határeloszlás tételek* támasztják alá, melyek tárgyalása meghaladja lehetőségeinket. Ha egy valószínűségi változó kis értékeket vesz fel, akkor szórása is szükségképpen kicsi. Ezért az előző kijelentésnek következménye az alábbi:

2. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis értékű* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , r paraméterekkel, hiszen kis értékek esetén a szórások is kicsik.

3. Sokszor csak kényelmi okokból használjuk a kétdimenziós normális eloszlásokat, mert úgy látjuk, úgy gondoljuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és kétdimenziós problémák esetén normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen lehet dolgozni. Ilyen alkalmazásra hamarosan mutatunk példát.

4. A standard normális eloszlás jelentősége abban rejlik, hogy

   - lineáris transzformációk segítségével tetszőleges normális eloszlás kapcsolatban hozható a standard normálissal, és
   - a standard normális eloszlással – speciális tulajdonságai miatt – az elméleti és a gyakorlati számítások könnyebben végezhetők el.

11.4. Vetület eloszlások

Az x-tengelyre vetett vetület sűrűségfüggvényét a tengely tetszőleges x pontjában az alábbi integrál adja:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}\,dy$$

Ennek a – kissé bonyolult – integrálnak a kiszámolása a $z = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ helyettesítéssel elvégezhető. Az eredmény:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

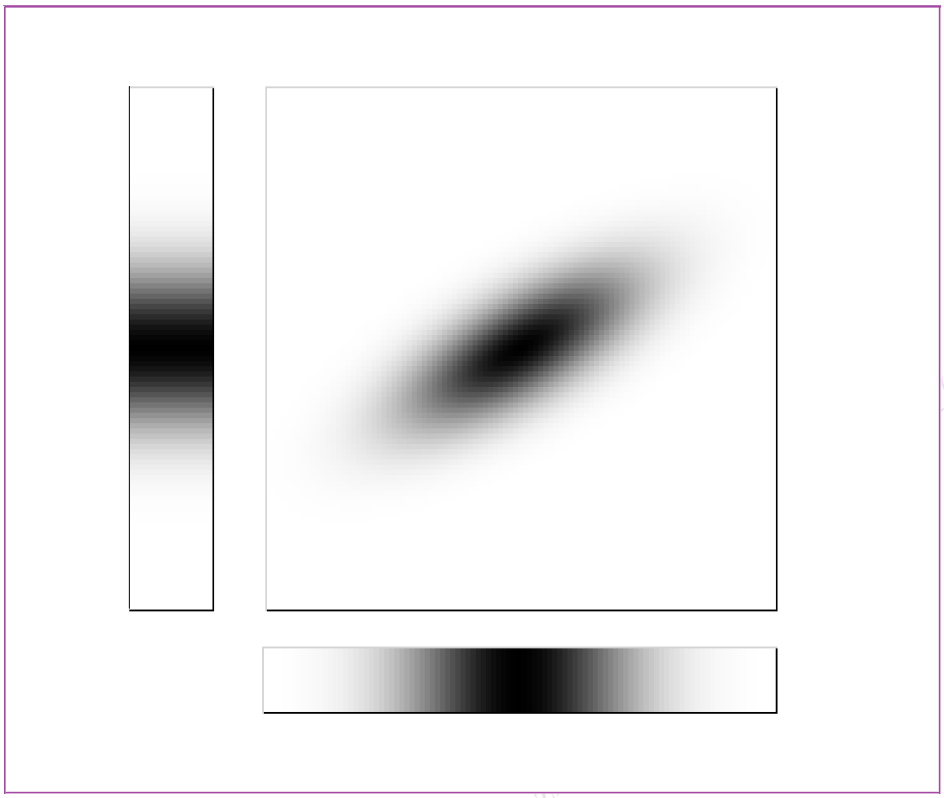
Hasonlóképp meghatározható a függőleges tengelyre vetett vetület eloszlás sűrűségfügvénye is:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

Látjuk, hogy a tengelyekre vetett vetületek normális eloszlások μ_1, σ_1, illetve μ_2, σ_2 paraméterekkel.

Ezzel a μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 paraméterek jelentését megtaláltuk. μ_1 és μ_2 a vetületek várható értékét jelenti, σ_1, σ_2 pedig a vetületek szórását.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi mezők (vége)



87. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás és vetületei festékkel szemléltetve;* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1.5$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

11.5. Feltételes sűrűségfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvényt az $X = x$ feltétel mellett a megfelelő függőleges egyenes mentén az alábbi hányados adja:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\, e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}$$

Egyszerűsítésekkel az alábbi eredmény adódik:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left(\mu_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\right)^2}$$

A kapott képletből kiolvashatjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

és szórása

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

A feltételes sűrűségfüggvény az $Y = y$ feltétel mellett a megfelelő vízszintes egyenes mentén hasonló:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\right)^2}$$

Vatjer András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenz (A rész)

A képletből látjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$$

szórása:

$$\sigma_1\sqrt{1 - r^2}$$

11.6. Feltételes medián és várható érték

A fentiek szerint tehát az $X = x$ feltétel mellett az Y várható értéke és mediánja:

$$\mathrm{E}(\, Y \mid X = x \,) = \mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X várható értéke és mediánja:

$$\mathrm{E}(\, X \mid Y = y \,) = \mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$$

Látjuk, hogy a feltételes várható érték és medián lineárisan függ a feltételtől. A lineáris függésben a meredekség $r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, illetve $r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Az

$$y = \mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

egyenletű egyenest **első regressziós egyenes**nek nevezzük. Hasonlóképpen az

$$x = \mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$$

egyenletű egyenest **második regressziós egyenes**nek nevezzük.

11.7. Feltételes szórás

Az $X = x$ feltétel mellett az Y szórása is kiolvashoató a feltételes sűrűségfüggvény képletéből:

$$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x \,) = \sigma_2\sqrt{1 - r^2}$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X szórása:

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = y \,) = \sigma_1\sqrt{1 - r^2}$$

Látjuk, hogy a feltételes szórás nem függ a feltételtől, és kisebb, mint a feltétel nélküli szórás.

$$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x \,) = \sigma_2\sqrt{1 - r^2} < \sigma_2$$

illetve

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = y \,) = \sigma_1\sqrt{1 - r^2} < \sigma_1$$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

11.8. Példa: testmagasság és testsúly

Véletlenszerűen választunk egy felnőtt férfit, és megmérjük testmagasságát centiméterekben és testsúlyát (pontosabban: testtömegét) kilogramokban:

$$X \;=\; \text{testmagasság} \qquad\qquad Y \;=\; \text{testsúly}$$

Tegyük fel, hogy

- a testmagasság várható értéke 180 (cm),
- a testmagasság szórása 15 (cm),
- a testsúly várható értéke 80 (kg),
- a testsúly szórása 10 (kg),
- a korrelációs együttható pedig 0.6 .

Ha az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval kapcsolatos számításokban kétdimenziós normális eloszlással dolgozunk, az alábbi numerikus eredményeket kapjuk.

1. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb:

   $$\mathrm{P}(\, Y > 90 \,) \;=\; \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 80 ; 10 ; TRUE)} \;=\; 0.16$$

2. Tekintsünk egy tetszőleges x testmagasság értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testmagassága körülbelül x (cm), akkor az ő testsúlyaik szórása nem 10 (kg), hanem csak:

   $$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x \,) \;=\; 10\,\sqrt{1 - 0.6^2} \;=\; 8$$

   Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ x-től.

3. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testmagassága körülbelül egyforma, mondjuk x, , akkor a testsúly várható értéke – a feltételezett x függvényében – így alakul:

   - $x = 170$ esetén Y feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\, Y \mid X = 170 \,) \;=\; 80 + 0.6\,\frac{10}{15}(170 - 180) \;=\; 76$$

     Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 76 kg.

   - $x = 180$ esetén Y feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\, Y \mid X = 180 \,) \;=\; 80 + 0.6\,\frac{10}{15}(180 - 180) \;=\; 80$$

     Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 80 kg.

Vetjer András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 190\ )\ =\ 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(190 - 180)\ = 84$$

  Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $x = 200$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 200\ )\ =\ 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(200 - 180)\ =\ 88$$

  Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 88 kg.

A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 10 cm-rel magasabb felnőtt férfiak átlagosan 4 kg-mal nehezebbek, mint a 10 cm-rel alacsonyabbak. Tehát 1 cm magasságnövekedés átlagosan 0.4 kg testsúly növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testsúly szórása és a testmagasság szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

$$\frac{10}{15} \cdot 0.6\ =\ 0.4$$

4. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb – a feltételezett testmagasság függvényében – így alakul:

- $x = 170$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($Y > 90 \mid X = 170$) = `1 - NORM.DIST( 90 ; 76 ; 8 ; TRUE )` = 0.04

  Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 4 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 180$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($Y > 90 \mid X = 180$) = `1 - NORM.DIST( 90 ; 80 ; 8 ; TRUE )` = 0.11

  Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 11 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 190$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($Y > 90 \mid X = 190$) = `1 - NORM.DIST( 90 ; 84 ; 8 ; TRUE )` = 0.23

  Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 23 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 200$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($Y > 90 \mid X = 200$) = `1 - NORM.DIST( 90 ; 88 ; 8 ; TRUE )` = 0.40

  Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 40 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

5. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb:

  P($X > 200$) = `1 - NORM.DIST( 200 ; 180 ; 15 ; TRUE )` = 0.09

Vetics András – Valószínűségszámítás – egy rész Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok (A rész)

6. Tekintsünk egy tetszőleges y testsúly értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testsúlya körülbelül y (kg), akkor az ő testmagasságaik szórása nem 15 (cm), hanem csak:

$$\mathrm{SD}(\ X \mid Y = y\ )\ =\ 15\ \sqrt{1 - 0.6^2}\ =\ 12$$

Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ y -tól.

7. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testsúlya körülbelül egyforma, mondjuk y (kg), akkor a testmagasság várható értéke – a feltételezett y függvényében – így alakul:

   - $y = 76$ esetén X feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 76\ )\ =\ 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(76 - 80)\ =\ 176.4$$

     Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 176.4 cm.

   - $y = 80$ esetén X feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 80\ )\ =\ 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(80 - 80)\ =\ 180.0$$

     Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 180.0 cm.

   - $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 84\ )\ =\ 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(84 - 80)\ =\ 183.6$$

     Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

   - $y = 88$ esetén X feltételes várható értéke:

     $$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 88\ )\ =\ 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(88 - 80)\ =\ 187.2$$

     Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 187.2 cm.

   A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 4 kg-mal nehezebb felnőtt férfiak átlagosan 3.6 cm-rel magasabbak, mint a 4 kg-mal könnyebbek. Tehát 1 kg súlynövekedés átlagosan 0.9 cm testmagasság növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testmagasság szórása és a testsúly szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

   $$\frac{15}{10} \cdot 0.6\ =\ 0.9$$

8. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb – a feltételezett testsúly függvényében – így alakul:

   - $y = 76$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

     $\mathrm{P}(\ X > 200 \mid Y = 76\ )\ =$ `1 - NORM.DIST( 200 ; 176.4 ; 12 ; TRUE )` $= 0.02$

     Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 2 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Feltételes eloszlás, korrelációs folytonos valószínűségi változók (A rész)

- $y = 80$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 80$) = `1 - NORM.DIST( 200 ; 180.0 ; 12 ; TRUE )` = 0.05

  Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 5 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 84$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 84$) = `1 - NORM.DIST( 200 ; 183.6 ; 12 ; TRUE )` = 0.09

  Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 9 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 88$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 88$) = `1 - NORM.DIST( 200 ; 187.2 ; 12 ; TRUE )` = 0.14

  Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 14 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

Kiemelünk két tényt a fentiek közül:

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 190\ ) \ = \ 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(190 - 180) \ = \ 84$$

  vagyis a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 84\ ) \ = \ 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(84 - 80) \ = \ 183.6$$

  vagyis a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

Lehet, hogy furcsának tűnik, de mégis ez az igazság: a 190 cm magas férfiak átlagos testsúlya 84 kg, de a 84 kg testsúlyú férfiak átlagos testmagssága nem 190 cm, hanem csak 183.6 cm.

11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk

Tegyük fel, hogy egy áramkörben a feszültség névleges értéke 230 V, de az igazság az, hogy a tényleges feszültség ingazdozik, egyszer több, máskor kevesebb, mint 230 V. Tegyük fel, hogy a tényleges feszültség normális eloszlású valószínűségi változó 230 várható értékkel és 10 szórással.

Ha valakinek tökéletes műszere van, akkor a tényleges feszültséget pontosan ki tudja mérni. De ha a műszer tévedhet, és a leolvasott feszültség a tényleges feszültségnél több is és kevesebb is lehet, akkor felmerül a kérdés: hogyan következtessünk a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre?

Tegyük fel, hogy a műszer hibája – a tényleges feszültségtől független, és normális eloszlást követ 0 V várható értékkel és 5 V szórással. Ha a leolvasott érték a tényleges feszültség és a műszer hibájának az összege, akkor így okoskodhatunk.

Legyen X a tényleges feszültség, H a műszer hibája, Y a leolvasott érték: $Y = X + H$. A feltételek szerint

Szeidl András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

- X normális eloszlású $\mu_1 = 230$ várható értékkel és $\sigma_1 = 10$ szórással,
- H független X -től, és normális eloszlású $\mu_H = 0$ várható értékkel és $\sigma_H = 5$ szórással,

amiből következik, hogy

- Y normális eloszlású

$$\mu_2 \;=\; \mu_1 + \mu_H = 230 + 0 \;=\; 230$$

várható értékkel és

$$\sigma_2 \;=\; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_H^2} \;=\; \sqrt{10^2 + 5^2} \;=\; \sqrt{125}$$

szórással.

Y feltételes szórása X adott értéke esetén a hiba szórásával, vagyis 5 -tel egyenlő. Ezért az

$$\mathrm{SD}(\,Y \mid X = x\,) \;=\; \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}$$

összefüggés miatt az

$$5 \;=\; \sqrt{125}\,\sqrt{1 - r^2}$$

egyenletet kapjuk, amiből a korrelációs együtthatóra az alábbi érték jön ki:

$$r \;=\; \sqrt{\frac{4}{5}}$$

Ezek alapján – a tanultak szerint – a legjobb tipp Y -ból X -re az alábbi képlettel adódik:

$$x \;=\; \mu_1 \;+\; r\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,(\,y \;-\; \mu_2\,)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; \sqrt{\frac{4}{5}}\;\frac{10}{\sqrt{125}}\,(\,y \;-\; 230\,)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; \frac{20}{25}\,(y - 230)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; 0.8\,(\,y \;-\; 230\,)$$

Ezek szerint, ha valaki rendszeresen következtet a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre, és a hiba négyzetének (vagy abszolút értékének) a várható értékét igyekszik minimalizálni, akkor – például – 240 V feszültség leolvasása esetén a tényleges feszültséget 238 V -nak kell vennie.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétváltozós folytonos valószínűségi változók (A rész)