Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-28

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását $\mathbb{F}_3$ fölött! *(2 pont)*

2. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a standard bázisra vonatkozó mátrixát, amely a valós 3-dimenziós teret az $(1, 0, 0)$ vektor irányában az $x+y=0$ egyenletű síkra vetíti! *(2 pont)*

3. Az alábbi mátrixok közül melyik pozitív definit? Amelyik nem, miért nem? Adjunk egyszerű indoklást! Melyik mátrix irreducibilis? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg azt az $\mathbf{x}$ vektort, melyre az $\mathbf{Ax}$ vektor a lehető legközelebb van a $\mathbf{b} = (6, 2, 8, 4)$ vektorhoz, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Írjuk fel a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

6. Adjuk meg azt a 2-rangú mátrixot, melynek az előző példabeli $\mathbf{A}$ mátrixtól való távolsága Frobenius-normában a legkisebb!

7. Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot, ha *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát! *(2 pont)*

9. Írjuk le a Perron–Frobenius-tételnek a nemnegatív mátrixok sajátértékeinek spektrálkörön való elhelyezkedéséről szóló részét! *(3 pont)*

10. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixot! Határozzuk meg 1- és ∞-normáját, és ezeket is használva – minél egyszerűbb módon – spektrálsugarát, és legnagyobb szinguláris értékét! *(5 pont)*

11. Írjuk le annak bizonyítását, hogy ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren diagonalizálható! *(4 pont)*