

Variáció számítás

$$L(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \dots) dt \quad \text{integrál minimalizálása, } x(t) = ?$$

+ kezdeti értékek: $x(t_0) = x_0$
 $x(t_1) = x_1$

Milyen minimum?

$$x(t) \rightarrow x(t) + u(t)$$

Ha az integrál növekszik, minimum volt.

Ha minden $u(t)$ -re növekszik, globális minimum (abszolút minimum)

Ha kicsi $u(t)$ -re növekszik, lokális minimum.

Ha kicsi $u(t)$ és kicsi $u(t)'$ esetén növekszik, lokális gyenge minimum

Minimumkeresés:

(néhány feltétel)

Euler-Lagrange egyenlet

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \frac{d^j}{dt^j} L_{x^{(j)}} = 0$$

n : legmagasabb rendű derivált L -ben

$L_{x^{(j)}} : L$ $x^{(j)}$ reinter deriváltja

$$n=1 \rightarrow L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$n=2 \rightarrow L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} L_{x''} = 0$$

De még vizsgálani kell, lehet nyeregpont is!

Komplex függvények

$$z = x + i \cdot y$$

$$\text{pl. } f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$$u_x = 2x \quad \checkmark$$

$$v_y = 2x \quad \checkmark$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

Ha f deriválható: $u_x = v_y$ Cauchy-Riemann

$$u_y = -v_x$$

feltételek (CR)

$$u_y = -2y \quad \checkmark$$

$$v_x = 2y \quad \checkmark$$

Holomorf függvény:

$f \in H(D)$, ha a D tartomány minden elejére deriválható ($\exists f'(z), \forall z \in D$)

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Harmonikus függvény:

Ha $f = u + i \cdot v$ és diffható $\rightarrow u$ és v harmonikus függvények

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow u \text{ harmonikus}$$

Ha van szintén harmonikus v ,
 akkor $f = u + i \cdot v$ holomorf

$$CR \Rightarrow v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Liouville-tétel: Ha $f \in H(\mathbb{C})$ egyen tartományon holomorf és korlátos akkor konstans.
 $(|f(z)| \leq M) \quad f(z) \equiv \text{const.}$

$\Downarrow$
 Algebra tétel: n -edfokú polinomnak n multiplicitással rendelkező pontosan n darab gyöke van (valós vagy komplex)

$$f \in H_p(\mathbb{C}^+) \iff \|f\|_{H_p} = \sup_{p>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Fourier-transzformáció:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{létezik, ha } \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty}_{f \in L^1(\mathbb{R})}$$

Plancherel:

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ és } \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_{L^2}$$

$\uparrow$
 négyzetesen integrálható

Paley-Wiener: $f \in H_+^2 \iff g = \mathcal{F}(f) \equiv 0 \text{ } \mathbb{R}_- \text{-ben}$

$$\mathcal{F}[H_+^2(\mathbb{R})] = L^2(\mathbb{R}_+)$$

Pien-projektció:

$$f \in L^2 : f = f_+ + f_- \text{ , ahol } f_{\pm} \in H_{\pm}^2$$

$$f = f_+ + f_-$$

$$f = \mathcal{F}^{-1}(g)$$

$$g = g_+ + g_-$$

$$g_{\pm} = \mathcal{F}(f_{\pm})$$

Példa:

$$\int_0^1 t^2 + x^2(t) + (x'(t))^2 dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 2$$

$$n=1 \rightarrow L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_x = 2x$$

$$L_{x'} = 2x'$$

$$2x - \frac{d}{dt} 2x' = 0$$

$$2x - 2x'' = 0$$

próbafüggvény: $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t} - \lambda \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$1 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$x(t) = A \cdot e^t + B \cdot e^{-t}$$

$$x(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = A + B = 1$$

$$x(1) = A \cdot e + B \cdot \frac{1}{e} = 2$$

$$B = 1 - A$$

$$A \cdot e + (1 - A) \cdot \frac{1}{e} = 2$$

$$A \cdot e^2 - A + 1 = 2e$$

$$A \cdot (e^2 - 1) = 2e - 1$$

$$A = \frac{2e - 1}{e^2 - 1} \approx 0,6944$$

$$B = 1 - A \approx 0,3056$$

$$x(t) = 0,6944 \cdot e^t + 0,3056 \cdot e^{-t}$$

Minimum vizsgálata:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{kerdesi feltetelek} \\ \text{égy is teljesüljenek} \end{cases}$$

$$\int_0^1 t^2 + (x(t) + u(t))^2 + (x'(t) + u'(t))^2 dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 + x^2(t) + x'^2(t) dt + \int_0^1 2x(t)u(t) + u(t)^2 + 2x'(t)u'(t) + u'(t)^2 dt$$

eredeti integrál

~~Tudunk mondani olyan $u(t)$ vagy $u'(t)$ függvényről, amire a plusz tag nem pozitív, viszont kicsi $u(t)$ és kicsi $u'(t)$ esetén pozitív len $\rightarrow$ lokális gyenge minimum ??~~

Minden $u(t)$ -re pozitív $\rightarrow$ globális minimum volt $x(t)$

$$\int_0^1 2x(t)u(t) + 2x'(t)u'(t) dt = \int_0^1 2x(t)u(t) dt + \left[2x'(t)u(t) \right]_0^1 - \int_0^1 2x''(t)u(t) dt = \int_0^1 2u(t) \cdot \underbrace{(x(t) - x''(t))}_{=0} dt$$

először tag 0, mert a határokokban 0
($u(0) = 0$, $u(1) = 0$)

Euler-Lagrange

Pelda:

$$\int_0^1 (x')^2 dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$\mathcal{E} - L: L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_x = 0$$

$$L_{x'} = 2x'$$

$$-\frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_{x'} = \text{konstans}$$

$$2x' = C$$

$$x' = C$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot t + B$$

$$x(0) = A \cdot 0 + B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$x(1) = A \cdot 1 + B = 1 \rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = t}$$

$$\left(\int_0^1 (x')^2 dt = 1 \right)$$

Minimum-e?

$$x(t) = t + u(t), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

$$\int_0^1 (t' + u'(t))^2 dt = \int_0^1 1 + 2u' + (u')^2 dt = 1 + \underbrace{[2u]_0^1}_{0-0=0} + \int_0^1 (u')^2 dt \geq 1$$

$\downarrow \oplus$ $\downarrow$

$$x(t) = t$$

globalis minimum

Példá: $\int_0^1 (x')^3 dt \rightarrow \min$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$\mathcal{E} - L: L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_x = 0$$

$$L_{x'} = 3(x')^2$$

$$-\frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_{x'} = 3 \cdot (x')^2 = \text{konstans}$$

$$x' = \text{konstans}$$

$$\rightarrow x(t) = A \cdot t + B$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$x(t) = t$$

(előző feladat alapján)

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x')^3 dt = 1$$

Minimum-e?

$$\int_0^1 (t' + u')^3 dt = \int_0^1 1 + \underbrace{3u' + 3(u')^2 + (u')^3}_{\text{pozitív-e?}} dt$$

$$3 \cdot (u')^2 + (u')^3 = (u')^2 \cdot (3 + u')$$

⊕

kicsi u' -re pozitív $\Rightarrow$ lokális, gyenge minimum

Példák

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 - (x')^2 dt \rightarrow \text{min}$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{E} - L: Lx - \frac{d}{dt}Lx' = 0$$

$$Lx = 2x$$

$$Lx' = -2x'$$

$$2x + 2x'' = 0$$

$$x'' + x = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$(x = e^{\lambda t})$$

$$\lambda = \pm i$$

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$$

$$e^{-it} = \cos t - i \cdot \sin t$$

Ezek össze is megoldás $\rightarrow \cos t$
 $\sin t$

$$x(t) = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=1 \end{matrix}$$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{Az A és B}$$

$$\underline{x(t) = \cos(t)} \quad \text{De tényleg minimum?}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + u)^2 - (-\sin t + u')^2 dt = \int \underbrace{\cos^2 t - \sin^2 t}_{\text{eredeti}} + \underbrace{2 \cdot u \cdot \cos t + 2 \cdot u' \cdot \sin t}_{0, \text{ mert } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u' \cdot \sin t = \text{par.}} + u^2 - (u')^2 dt$$

$$= 0 - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u \cdot \cos t$$

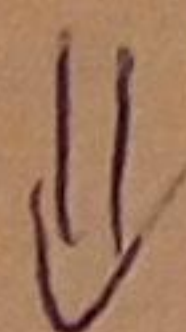
mert a végpontokban nulla

$$u^2 - (u')^2 = ?$$

Nem lehet garantálni, hogy pozitív,

$$\text{Kicsi } u' \text{-re } \varepsilon^2 < \varepsilon$$

$$u < u'$$



Nem minimum

Példa:

$$\int 2t^2 - tx + (x'')^2 dt \rightarrow \min$$

$$L_x = -t$$

$$L_{x'} = 0$$

$$L_{x''} = 2x''$$

$$\mathcal{E} - L: n=2 \quad L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} L_{x''} = 0$$

$$(t^5)^{(4)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot t = 5! \cdot t$$

$$-t - 0 + 2x^{(4)} = 0$$

$$x^{(4)} = \frac{t}{2}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{t^5}{2 \cdot 5!} + A \cdot t^3 + B \cdot t^2 + C \cdot t + D$$

(nincs konstans, ezért
x-ben nincs t^4)

$2n = 4$ kezdeti érték kell

Példa:

$$\int_0^1 t^2 + x^2 + 2(x')^2 + (x'')^2 dt \rightarrow \min$$

$$x'(0) = x(0) = 0$$

$$x'(1) = x(1) = 1$$

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} L_{x''} = 0$$

$$2x - 4x'' + 2x^{(4)} = 0$$

$$x = e^{\lambda t}$$

$$2 - 4\lambda^2 + 2\lambda^4 = 0$$

$$2 \cdot (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \lambda_{3,4} = -1$$

$$e^t \quad t \cdot e^t \quad e^{-t} \quad t \cdot e^{-t}$$

(ketteses gyök esetén t hozzá)

$$x(t) = A \cdot e^t + B \cdot e^{-t} + C \cdot t \cdot e^t + D \cdot t \cdot e^{-t}$$

$2n = 4$ db kezdeti érték ✓

$$x(0) = A + B = 0$$

$$x(1) = A \cdot e + B \cdot \frac{1}{e} + C \cdot e + D \cdot \frac{1}{e} = 1$$

$$x'(0) = A - B + C - D = 0$$

$$x'(1) = A \cdot e - B \cdot \frac{1}{e} + C \cdot 2 \cdot e + D \cdot 0 = 1$$

Minimum vizsgálata:

$$x(t) \rightarrow x(t) + u(t)$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

$$\int_0^1 t^2 + (x+u)^2 + 2 \cdot (x'+u')^2 + (x''+u'')^2 = \int_0^1 \underbrace{t^2 + x^2 + 2 \cdot (x')^2 + (x'')^2}_{\text{eredeti}} + \underbrace{2xu + 4x'u' + 2u''x''}_{0} + \underbrace{u^2 + 2(u')^2 + (u'')^2}_{>0 \quad \forall u}$$

globális minimum

szorzatos parciális

$$x \cdot u = -x' \cdot u'$$

$$x' \cdot u' = -x'' \cdot u''$$

(ha a határokban u és u' nulla)

Komplex függvények

Példa: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$ harmonikus, keressük hozzá harmonikus v -t, amire

$$f(z) = u + i \cdot v \text{ holomorf.} \quad f(i) = -1 + i \text{ (kerdési érték)}$$

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 - 3y^2 + 2x & u_{xx} &= 6x + 2 \\ u_y &= -6xy - 2y & u_{yy} &= -6x - 2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \checkmark \end{array} \right. \text{ Tényleg harmonikus.}$$

kerdési érték: $i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot i = (0, 1)$

$$u(0,1) = 0^3 - 3 \cdot 0 \cdot 1^2 + 0^2 - 1^2 = -1 = \operatorname{Re} \{ f(i) \} \quad \checkmark \text{ Kérdési érték konstans}$$

$$CR: \rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2x = v_y \rightarrow v = \int v_y dy = \int 3x^2 - 3y^2 + 2x dy = 3x^2 y - y^3 + 2xy + C(x)$$

$\nearrow$ y -ra nézve konstans

$$u_y = -v_x$$

$$-6xy - 2y = -\frac{d}{dx} (3x^2 y - y^3 + 2xy + C(x))$$

$$6xy + 2y = 6xy + 2y + C'(x)$$

$$C'(x) = 0 \rightarrow C = \text{konstans}$$

$$f(i) = -1 + i \quad \begin{array}{l} u(0,1) = -1 \\ v(0,1) = 1 \end{array}$$

$$v(0,1) = 3 \cdot 0^2 \cdot 1 - 1^3 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + C = -1 + C = 1$$

$C = 2$

$$\underline{\underline{v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + 2xy + 2}}$$

Példa

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^\alpha}$$

$\alpha > 0$ és egész

$f \in H_p(\mathbb{C}^+)$ milyen p -vel

a) $f(z)$ mindenhol differenciálható, kivéve $z = -i$, de az nem elem a felső félsíkban,
azaz felül mindenhol differenciálható: $f \in H(\mathbb{C}^+)$

$$b) \|f\|_{H_p} = \sup_{p>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{\alpha p}{2}}} dx$$

$$|f(x+iy)| = \left| \frac{1}{(x+iy+i)^\alpha} \right| = \frac{1}{|x+iy+i|^\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + (y+1)^2})^\alpha}$$

$$|z|^\alpha = |z^\alpha|, \text{ ha } \alpha \text{ egész}$$

minden valós

Felülről becsüljük, akkor maximális az integrál,
ha $y=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{\alpha p}{2}}} dx < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx < \infty$$

Páros függvény, ha 1 és ∞ közötti integrál véges,
akkor $-\infty$ és -1 közötti is

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^{-2p} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} \right]_1^N \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{-2p+1}}{-2p+1}$$

Konvergens, ha $-2p+1 < 0$

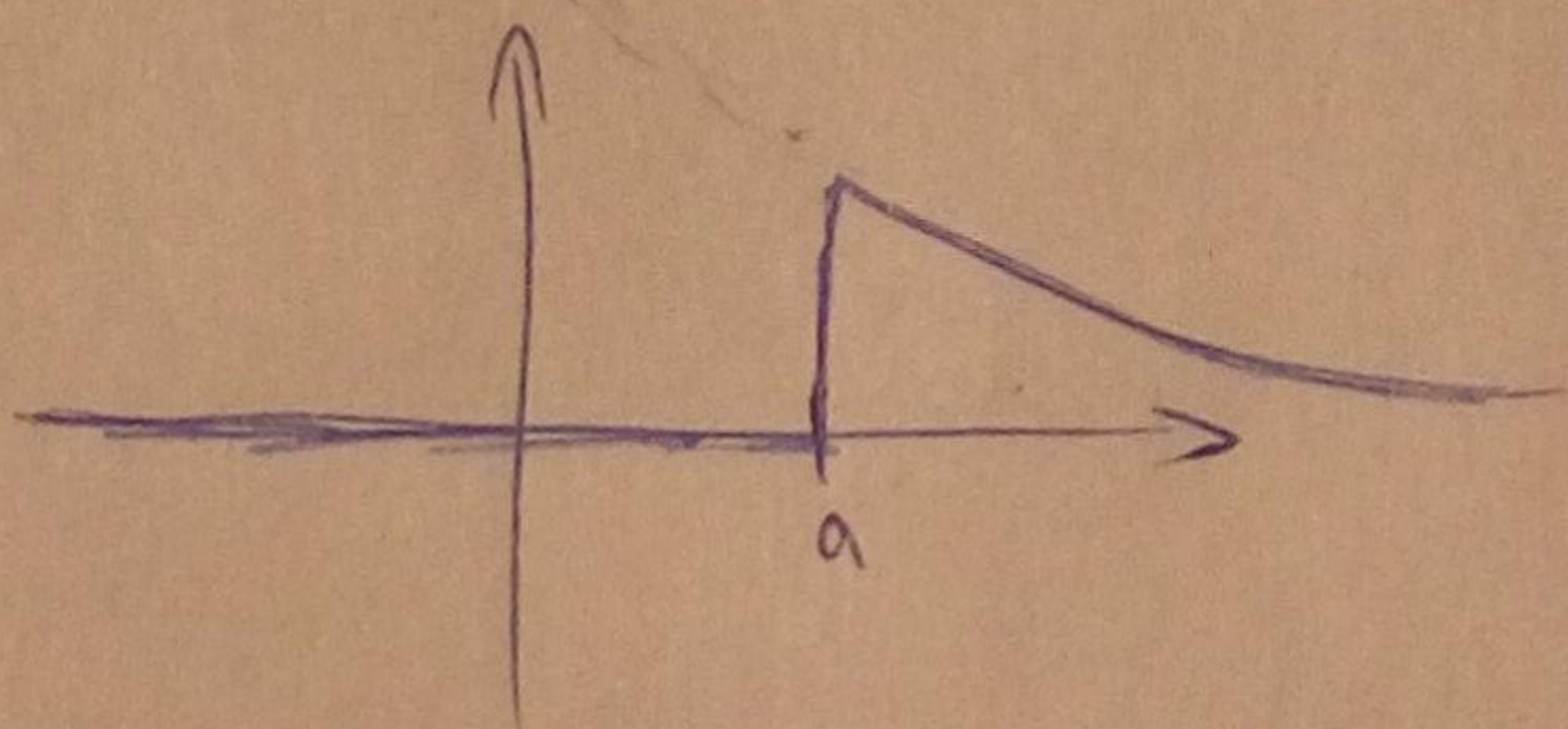
$$2p > 1$$

$$p > \frac{1}{2}$$

$$(N^{-2p+1} \rightarrow 0)$$

Fourier pelda

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x \geq a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_a^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_a^N = e^{-a} - \underbrace{e^{-\infty}}_0 = e^{-a}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-itx} dx = \int_a^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-itx} dx = \int_a^{\infty} e^{-x(1+it)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-x(1+it)}}{-(1+it)} \right]_a^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{e^{-N(1+it)}}{-(1+it)}}_0 + \frac{e^{-a(1+it)}}{-(1+it)} \right) = \underline{\underline{\frac{e^{-a(1+it)}}{-(1+it)}}} \end{aligned}$$

$f = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x^2+1)}$ milyen esetenben integrálható?

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x^2+1)} &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2,5}} \quad 2,5 > 1 \quad \checkmark \\ &\searrow_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad \frac{1}{2} < 1 \quad \checkmark \\ &\Downarrow \\ &f \in L^1_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

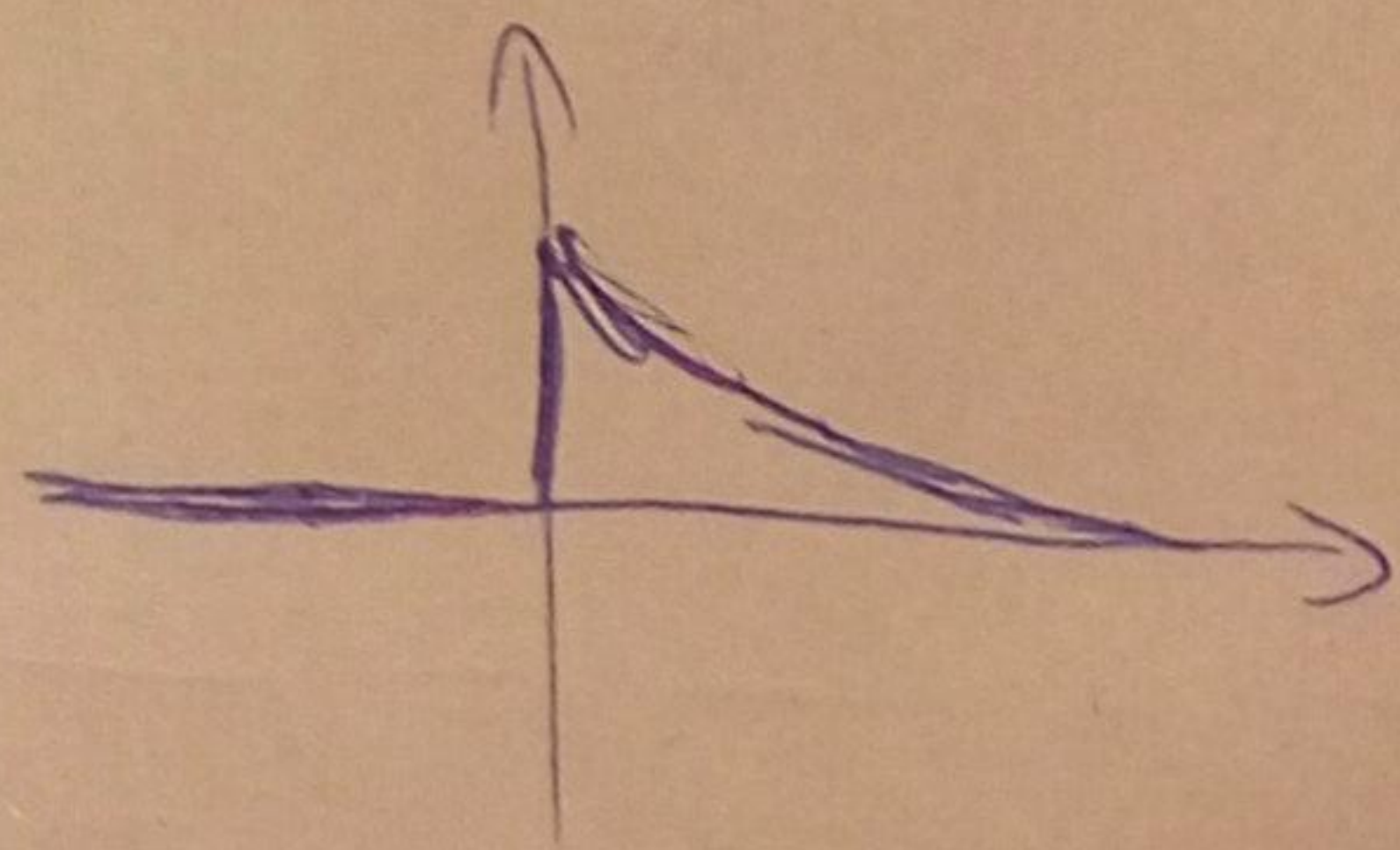
$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} &< \infty, \text{ ha } p > 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{x^p} &< \infty, \text{ ha } p < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x \cdot (x^2+1)^2} &\xrightarrow{\infty} \frac{1}{x^5} \quad 5 > 1 \quad \checkmark \\ &\searrow_0 \frac{1}{x} \quad 1 \nless 1 \quad \times \end{aligned} \Rightarrow f \notin L^2_{\mathbb{R}}$$

Pelda:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Paley-Wiener



$$\rightarrow g \in L^2(\mathbb{R}_+) \Rightarrow \exists f \in H_+^2 : \mathcal{F}(f) = g$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{itx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{x \cdot (it-1)}}{it-1} \right]_0^{\infty}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-it}$$

$$(e^{-\infty} = 0)$$

Kitegyntés: $f(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-iz}$ $f \in H_+^2$

a) differenciálható legyen a felső félkörön ✓
(csak -i-ben nem differenciálható, de az lent van)

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1-ix+iy|^2} dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y)^2 + x^2} dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{4\pi^2} \left[\arctg x \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi} < \infty \quad \checkmark$$

Errel bebizonyítottuk feltevést.

Réponse: Rien

$$f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R} \quad f \in L^2$$

$$(1) g = \mathcal{F}(f)$$

$$(2) g = g_+ + g_-$$

$$(3) f_+ = \mathcal{F}^{-1}(g_+)$$

$$f_- = \mathcal{F}^{-1}(g_-)$$

$$(4) f = f_+ + f_-$$

$$(5) f_{\pm} \in H^2$$

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-itx} dx = \int_0^{\infty} e^{-x-itx} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x-itx} dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-x-itx}}{-1-it} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{x-itx}}{1-it} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} = \underline{\underline{\frac{2}{1+t^2}}}$$

$$g_+ = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$g_- = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ \frac{2}{1+t^2}, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$f_+ = \mathcal{F}^{-1}(g_+) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2}{1+t^2} \cdot e^{itx} dt$$

$$f_- = \mathcal{F}^{-1}(g_-) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2}{1+t^2} e^{itx} dt$$

Rien
projeté

1. Milyen függvény lehet a

$$\int_0^1 (x'(t)^2 + x''(t)^2) dt \rightarrow \min$$

megoldása?

2. Számolja ki az $f(x) = x, |x| \leq 1, f(x) = 0, |x| > 1$ függvény Fourier transzformációját. Van olyan $h \in H_+^2$ függvény melynek f a Fourier transzformáltja? Válaszát igazolja.

3. Bizonyítsa, hogy az $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ függvény harmonikus és keresse meg a harmonikus konjugáltját.

4. Oldja meg a

$$\int_0^1 (9x'(t)^2 + 4x(t)^2) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, x(1) = 1$$

feladatot. Határozza meg milyen minimum van, gyenge, erős, abszolút?

5. Oldja meg a

$$\int_0^1 (9t^2 + 4(x'(t))^3) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 1, x(1) = 2$$

feladatot. Határozza meg milyen minimum van, gyenge, erős, abszolút?

6. Igazolja, hogy

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+1+i)} \in H_+^2.$$

$$(1.) \int_0^1 (x'(t)^2 + x''(t)^2) dt \rightarrow \min$$

Általános Euler-Lagrange: $\sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \frac{d^j}{dt^j} L_{x^{(j)}} = 0$

$$n=2 \rightarrow L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} L_{x''} = 0$$

$$L_x = 0$$

$$L_{x'} = 2 \cdot x'(t)$$

$$L_{x''} = 2 \cdot x''(t)$$

$$\frac{d}{dt} L_{x'} = 2 \cdot x''(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} L_{x''} = 2 \cdot x'''(t)$$

$$0 - 2 \cdot x''(t) + 2 \cdot x'''(t) = 0$$

próbafüggvény: $x = e^{\lambda t}$

$$-2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 + 2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda^4 = 0$$

$$-2\lambda^2 + 2\lambda^4 = 0$$

$$\lambda^2 \cdot (-2 + 2\lambda^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$(e^{0t} = 1)$$

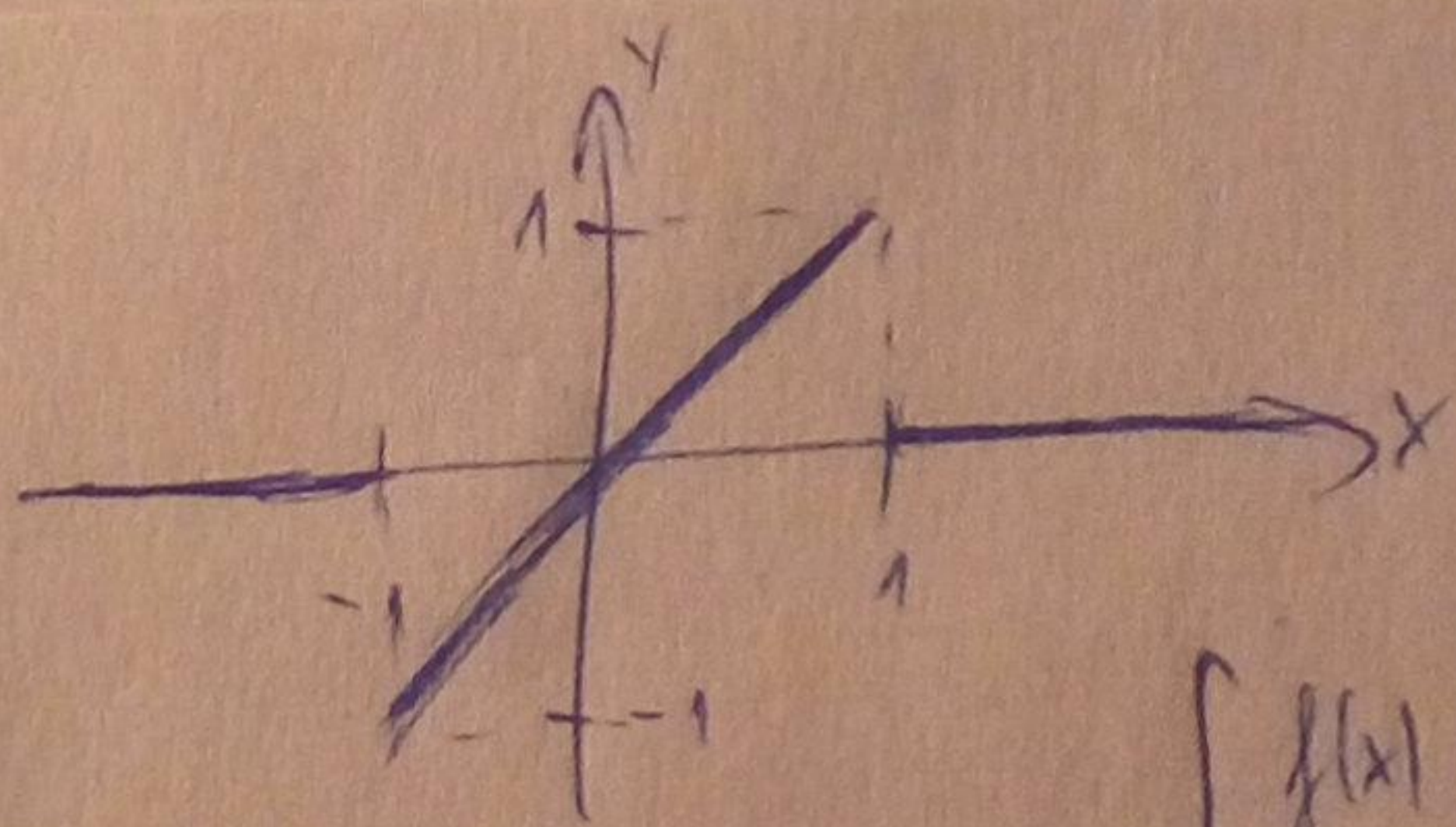
$$\lambda_{3,4} = \pm 1$$

$$(e^t \quad e^{-t})$$

$$x(t) = A + B \cdot t + C \cdot e^t + D \cdot e^{-t} \quad \text{alakú len}$$

A pontos megoldáshoz 4 db kezdeti érték kell!

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$



SZABÓ NORBERT
ASD5YL

$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ véges $\rightarrow$ létezik $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-itx} dx = \int_{-1}^1 x \cdot e^{-itx} dx =$$

(parciális)

$$= \left[x \cdot \frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{e^{-itx}}{-it} dx = \left[x \cdot \frac{e^{-itx}}{-it} - \frac{1}{-it} \cdot \frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{-it}\right) \cdot \frac{e^{-it}}{-it} - \left((-1) - \frac{1}{-it}\right) \cdot \frac{e^{it}}{-it} \right] = \frac{e^{-it}}{t^2} - \frac{e^{it}}{t^2} + \frac{i \cdot e^{-it}}{t} + \frac{i \cdot e^{it}}{t} =$$

$$= 2i \cdot \frac{\cos(t)}{t} - 2i \cdot \frac{\sin(t)}{t^2}$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{itz} dt \quad (\text{inverz } \mathcal{F})$$

Paley-Wiener tétel: $h \in H_+^2 \Leftrightarrow f = \mathcal{F}\{h\} \equiv 0$ $\mathbb{R}_-$ -ben

~~$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{itz}$$~~

Nincs olyan $h(z)$, mert $f \neq 0$ $\mathbb{R}_-$ -ben.
(-1 és 0 között nem nulla)

3.

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x$$

$$u_x = 2x + 1$$

$$u_y = -2y$$

SZABÓ NORBERT

AJD54L

Harmonikus, ha $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Harmonikus konjugált: $v(x, y) = ?$

Cauchy-Riemann egyenletek:

$$v_y = u_x = 2x + 1$$

$$\rightarrow v = \int (2x + 1) dy = 2xy + y + C(x)$$

$$v_x = -u_y = 2y$$

$$v_x = \frac{dv}{dx} = 2y + 0 + C'(x) = 2y$$

$$C'(x) = 0$$

$$C(x) = \text{konstans}$$

$$\underline{v(x, y) = 2xy + y + C}$$

C beállítása kezdeti feltétel alapján lehetséges.

$$\textcircled{4} \int_0^1 (9x'(t)^2 + 4x(t)^2) dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

SZABÓ NORBERT

AJD54L

Euler-Lagrange: $L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$

$$L_x = 8x(t)$$

$$L_{x'} = 18x'(t)$$

$$8x(t) - 18x''(t) = 0$$

$$x = e^{\lambda t}$$

$$8 \cdot e^{\lambda t} - 18 \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 = 0$$

$$8 - 18\lambda^2 = 0$$

$$18\lambda^2 = 8$$

$$\lambda^2 = \frac{4}{9}$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{3}$$

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{2}{3}t} + B \cdot e^{-\frac{2}{3}t}$$

$$x(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = 0 \rightarrow A = -B$$

$$x(1) = A \cdot e^{\frac{2}{3}} + B \cdot e^{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$-B \cdot e^{\frac{2}{3}} + B \cdot e^{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$B = \frac{1}{-e^{\frac{2}{3}} + e^{-\frac{2}{3}}}$$

$$B \approx -0,6972$$

$$x(t) = 0,6972 \cdot e^{\frac{2}{3}t} - 0,6972 \cdot e^{-\frac{2}{3}t}$$

$$x(t) = 0,6972 \cdot (e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Minimum vizsgálata: $x(t)$ -hez hozzáadunk $u(t)$ -t, amellyel teljesíti a kerdesi feltetelt is

Ha az integrál értéke nő, minimum volt

- $\forall u$ -ra $\rightarrow$ globális minimum

- $\forall$ kicsi u -ra $\rightarrow$ lokális

- $\forall$ kicsi u és u' $\rightarrow$ lokális, nyílt

$$x(t) = 0,6972 \cdot (e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{2}{3}t}) + u(t)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

$$\begin{cases} x(0) = x(0) + u(0) \\ x(1) = x(1) + u(1) \end{cases}$$

$$\int_0^1 g \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,6972 \cdot \left(e^{\frac{2}{3}t} + e^{-\frac{2}{3}t} \right) + u' \right)^2}_{\tilde{x}'^2} + 4 \cdot \underbrace{\left(0,6972 \cdot \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{2}{3}t} \right) + u \right)^2}_{\tilde{x}: \text{eredeti megoldás}} dt =$$

$$= \int_0^1 g \cdot (\tilde{x}'^2 + 2 \cdot \tilde{x}' \cdot u' + u'^2) + 4 \cdot (\tilde{x}^2 + 2 \cdot \tilde{x} \cdot u + u^2) dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 g \cdot \tilde{x}'^2 + 4 \cdot \tilde{x}^2}_{\text{eredeti integrál}} + \underbrace{\int_0^1 18 \cdot \tilde{x}' \cdot u' + 9 \cdot u'^2 + 8 \cdot \tilde{x} \cdot u + 4 \cdot u^2}_{\text{értékszámlás, hogy pozitív-e}} dt$$

$$\left(\int_0^1 18 \cdot \tilde{x}' \cdot u' dt = \underbrace{\left[18 \cdot \tilde{x}' \cdot u \right]_0^1}_{0, \text{ mert } u(0)=0, u(1)=0} - \int_0^1 18 \cdot \tilde{x}'' \cdot u dt = \int_0^1 \underbrace{-18 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2}_{-8} \cdot \tilde{x} \cdot u dt \right)$$

$$\int_0^1 g \cdot u'^2 + 4 \cdot u^2 dt \quad \text{bármilyen } u \text{ esetén pozitív len} \Rightarrow \underline{\text{globális minimum}}$$

(csak konstans nulla⁴ esetén lenne nulla)

5.

$$\int_0^1 (9t^2 + 4 \cdot x'(t)^3) dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 2$$

SZABÓ NORBERT

AJD5YL

$$E-L: L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_x = 0$$

$$L_{x'} = 12 \cdot x'(t)^2$$

$$-\frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$\Downarrow$

$L_{x'}$ konstans

$$12 \cdot x'(t)^2 = C$$

$$x(t) = A \cdot t + B \text{ alakú len (} 12 \cdot A^2 = C \text{)}$$

$$x(0) = 0 + B = 1 \rightarrow B = 1$$

$$x(1) = A + B = A + 1 = 2 \rightarrow A = 1$$

$$\underline{x(t) = t + 1}$$

Minimum vizsgálata:

$$x(t) = t + 1 + u(t)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

$$\int_0^1 9t^2 + 4 \cdot (1+u')^3 dt = \underbrace{\int_0^1 9t^2 + 4 \cdot 1^3 dt}_{\text{eredeti integrál}} + \underbrace{\int_0^1 4 \cdot (1+u')^3 - 4 \cdot 1^3 dt}_{\text{ért vizsgáljuk, hogy pozitív-e}}$$

$$\int_0^1 4(u'^3 + 3 \cdot u'^2 + 3 \cdot u') dt \stackrel{?}{>} 0$$

$\forall u$ -ra pozitív $\rightarrow$ globális minimum

$\forall$ kicsi u -ra $\rightarrow$ lokális

$\forall$ kicsi u és $u' \rightarrow$ lokális, gyenge

$$\underbrace{\int_0^1 12 \cdot u' dt}_{0, \text{ mert}} + \underbrace{\int_0^1 4 \cdot u'^2 \cdot (u' + 3) dt}_{\substack{\uparrow \\ \text{pozitív}}}$$

kicsi u' -ra pozitív $\Rightarrow$ lokális gyenge minimum

határokon

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$