

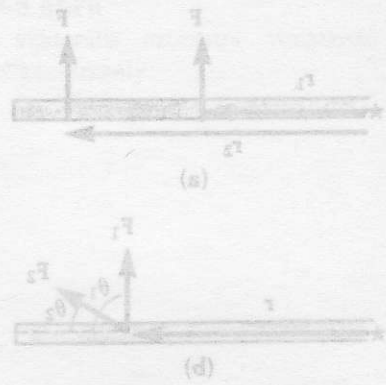
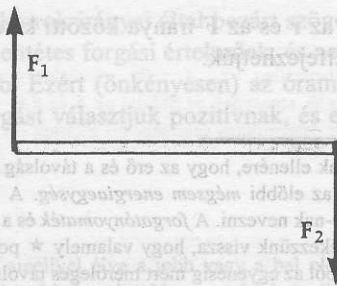
FORGATÓNYOMATÉK ÉS FORGÁSI EGYENSÚLY

Míg a forgatónyomatékon gondolkodtam forogni kezdett velem a világ
(EGY TANULÓ MEGJEGYZÉSE)

10.1 Bevezetés

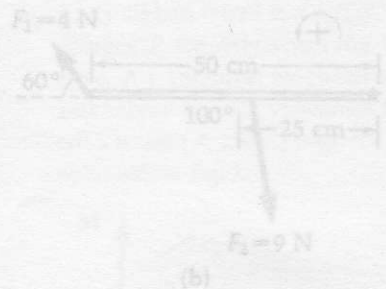
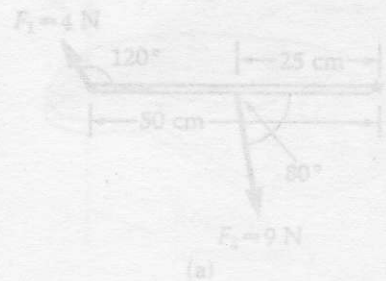
A testek mozgását mindeddig úgy kezeltük, mintha pontszerű részecskék mozognának, s így nem vettük figyelembe a testek tömegközéppont körüli forgását. De a valós világban minden fizikai testnek véges kiterjedése van, és a forgás (a rotáció), akárcsak a haladás (a transláció), gyakran közös tulajdonsága a mozgásnak. Ebben a fejezetben a véges kiterjedésű testek tanulmányozását kezdjük el, és megvizsgáljuk, mitől függ ezek nyugalmi állapota, vagy forgása állandó szögsebességgel, továbbá mi az oka annak, hogy olyan forgási gyorsulással rendelkeznek, amely megváltoztatja a szögsebességet. A legegyszerűbb esettel kezdjük: a merev test tárgyalásával. A merev test részecskéi megtartják egymáshoz viszonyított helyzetüket, még akkor is, ha a testre ható különböző erők következtében az bonyolult translációs és rotációs mozgást végez.

Ha egy testre ható erők összege zérus, akkor Newton második törvénye szerint a test mozgásállapota nem változik meg. Ha a test nyugalomban van, akkor nyugalomban is marad; ha mozgásban van, mindaddig megtartja állandó sebességét, amíg a rá ható erők összege: $\sum \mathbf{F} = 0$. De tekintsük a 10-1 ábrán látható testet! Jóllehet a rá ható erők összege zérus, nyilván mégis teljes egyensúlyban, mert forogni kezd. Ezért az ilyen test forgási egyensúlyának meghatározásához további feltétel szükséges.



10-3 ábra
A merev test szabadon foroghat, ha a rá ható erők eredője nem zérus. A test akkor is foroghat, ha a rá ható erők eredője zérus, de a test forgási egyensúlyi feltétel nem teljesül. (a) és (b) F_1 vektorok által meghatározott θ szög meghatározása.

10-2 ábra
Leengajító felületi nézet. A csuklóban a bal oldalon van.

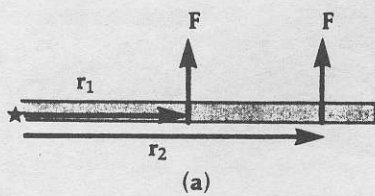


$$(F_2)_x = -(9 \text{ N}) \sin 60^\circ = -3,464 \text{ N}$$

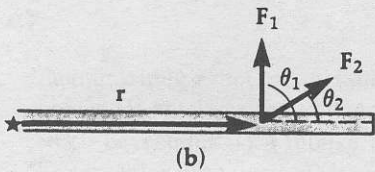
10-1 ábra

Egy merev rúdra két egyenlő nagyságú ellentétes irányú erő hat. Annak ellenére, hogy $\sum \mathbf{F} = 0$ és így a translációs egyensúlyi feltétel teljesül, a rúd nincs rotációs egyensúlyban.

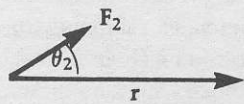
10-4 ábra
A 10-1 példához



(a)



(b)

(c) r és F_2 vektorok által bezárt θ_2 szög meghatározása.**10-2 ábra**

Lengőajtó felülről nézve. A csuklóspánt a bal oldalon van.

10.2 A forgatónyomaték

Tárgyalásunkat azzal kezdjük, hogy megvizsgáljuk, miként gyakoroljunk erőt egy lengőajtóra, hogy kinyíljon. A 10-2 ábrán a lengőajtó felülnézetben látható, forgástengelye a bal oldalon lévő csuklóspánt.

A csillag szimbólum (*) a papír síkjára merőleges rögzített forgástengelyt jelent.

A 10-2a ábrából nyilvánvaló, hogy ha az ajtóra merőleges F erő az r_1 távolságban hat, az nem annyira hatékony, mint amikor az F erő az r_2 távolságban hat. Így F erőnek a tengelytől mért r merőleges távolsága igen jelentős tényező. Továbbá ugyancsak fontos az r és az F között lévő θ szög: mert adott r mellett mennél nagyobb a θ ($\leq 90^\circ$) szög, annál erősebben nyitja az F erő az ajtót. (Valóban, ha $\theta = 0$, akkor az ajtó egyáltalán ki sem nyílik.) Végül, az F erő nagysága is fontos. E három tényező segítségével definiáljuk az M forgatónyomaték fogalmát. A forgatónyomaték egy testre ható erőnek azt a hatását fejezi ki, amely a testnek a rögzített tengely körüli forgását eredményezi.

$$\text{Az } M \text{ forgatónyomaték} \quad M = rF \sin\theta \quad (10-1)$$

(*) tengelyre)

Ebben az esetben r a * tengely és az F erő támadáspontjának távolságát, θ az r és az F iránya által bezárt kisebbik szöget jelenti, amelyet úgy kapunk meg, hogy az r és F vektorokat (párhuzamosan eltolva) egy közös kezdőpontból mérjük fel (10-2c ábra), ahogyan azt a 10-2c ábra mutatja. A forgatónyomaték egysége¹ a newton-méter (N.m).

A 10-3 ábra egy, a * gal jelölt helyen rögzített merev testet mutat, amelyre az r helyvektorú pontban a külső F erő hat. Jegyezzük meg, hogy a * tengely körüli forgás szempontjából az erőnek csupán az r vektorra merőleges F_m komponense hatásos. (Az r vektorral párhuzamos F_p komponens a tengelyre csak húzóerőt fejt ki.) A merőleges komponens $F_m = F \cdot \sin\theta$, így a forgatónyomaték (10-1) összefüggésnek megfelelően $r \cdot F_m = rF \cdot \sin\theta$, azaz

$$M = rF_m \quad (10-2)$$

Hatásvonal és erőkar (nyomatékkar)

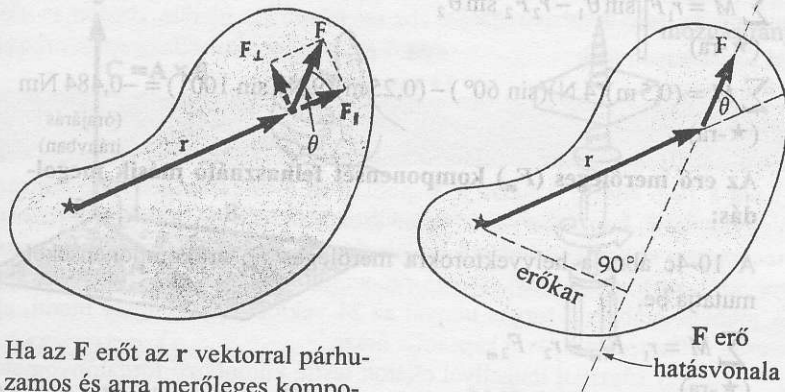
A forgatónyomaték megértésének másik módja az erőkar (nyomatékkar) fogalmához kapcsolódik. Ehhez először az F erő hatásvonalának definiálása szükséges. A hatásvonal az erővektor mentén rajzolt, mindkét irányban meghosszabbított egyenes vonal. A 10-3 ábrán a nyomatékkar (vagy erőkar, emelőkar) a forgástengelytől az erő hatásvonaláig mért merőleges távolság².

$$(\text{Nyomatékkar}) = r \cos(90^\circ - \theta) = r \sin\theta \quad (10-3)$$

ahol θ az r és az F iránya közötti kisebbik szög. Tehát a forgatónyomatékot így is kifejezhetjük:

¹ Annak ellenére, hogy az erő és a távolság szorzatának ugyanaz a dimenziója mint a munkáé, az előbbi mégsem energiaegység. A forgatónyomaték SI egységét soha nem szabad joule-nak nevezni. A forgatónyomaték és a munka teljesen más fogalmak.

² Emlékezzünk vissza, hogy valamely * pontnak egy adott egyenestől mért távolsága a * pontból az egyenesig mért merőleges távolság. Itt a * tengely valójában a papír síkjára merőleges egyenes, nem pedig egy pont. Két egymással nem párhuzamos egyenes távolságát, mint a közöttük lévő legrövidebb szakasz hosszát definiáljuk, és ez a szakasz mindkét egyenesre merőleges. Ez esetünkben megfelel a feltételeknek.



- (a) Ha az F erőt az r vektorral párhuzamos és arra merőleges komponenseivel helyettesítjük, akkor csupán az F_{\perp} komponens gyakorol forgatónyomatékot a \star tengely körül.
- (b) A *erőkar* a \star forgástengely és az F erő hatásvonalára közötti távolság.

Forgatónyomaték $M = (\text{erő}) \times (\text{erőkar})$
 (\star tengelyre) $M = Fr \sin \theta$ (10-4)

A forgatónyomaték tehát az F erő adott tengelyre vonatkozó nyomatéka.

Adott forgatónyomaték hatására egy test vagy az óramutató járásával megegyező, vagy azzal ellentétes irányban forog, a megfigyelő nézőpontjától függően. Mindig vegyük figyelembe a forgatónyomatékhoz tartozó forgás irányát. Feladatok megoldásakor összegezni fogjuk a testre ható forgatónyomatékokat, hogy a teljes (eredő) forgatónyomatékot meghatározzuk. A rajzokon a két forgási irány közül az egyiket pozitívnak választjuk, és \oplus vagy \ominus szimbólummal jelöljük. Az így választottal ellentétes irányú forgatónyomatékok negatívak³. Ha külön forgatónyomatékokat összegezzünk, akkor ezek pozitív vagy negatív előjelét figyelembe kell venni. Minthogy a forgástengely helyének megváltozásával az erőkarok hossza (és ezáltal a forgatónyomatékok nagysága) megváltozik, azért mindig fontos annak a \star tengelynek a megadása, amelynek alapján a forgatónyomatékot számítjuk.

10-1 PÉLDA

A 10-4a ábrán látható 50 cm hosszú rúdra az F_1 és az F_2 erő hat. A rúd egyik vége a hosszára merőleges tengellyel van ellátva. Határozzuk meg a \star -gal jelölt tengelyre vonatkozó forgatónyomatékok eredőjét!

MEGOLDÁS

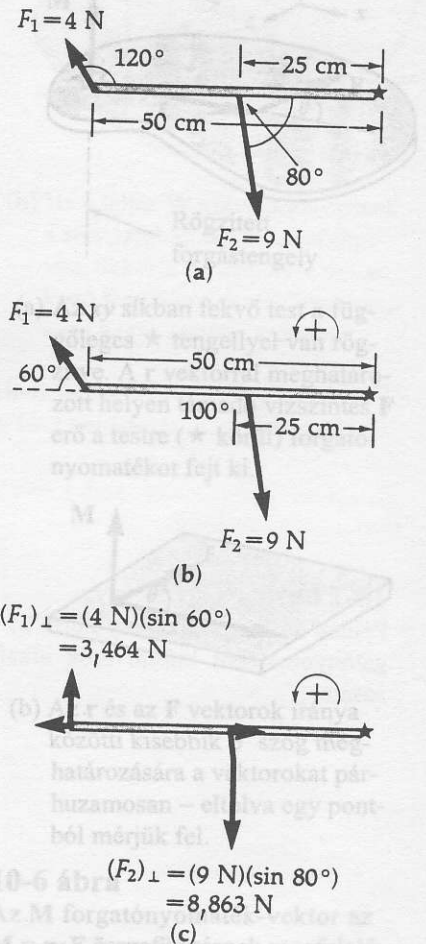
A 10-4b ábrán az erők és a helyvektorok irányai által bezárt szögek láthatók. A forgatónyomatékok ellentétes forgási értelműek, és nem világos, hogy melyikük a nagyobb. Ezért (önkéntesen) az óramutató járásával ellentétes irányú forgást választjuk pozitívnak, és ezt a \oplus szimbólummal jelöljük.

³ Ez a választási szabadsággal analóg, amellyel élve a jobb vagy a bal oldali irány közül azt választjuk pozitívnak, amely az adott feladatnak jobban megfelel. Amiként ezt a választott irányt kicsiny nyilakkal jelöljük, ugyanúgy a választott forgási irányt a \oplus vagy a \ominus szimbólummal látjuk el.

10-5 ábra
A vektorális szorzatra vonatkozó jobbkez-szabály.

10-3 ábra

A merev test szabadon forog a rögzített \star tengely körül. A külső F erő támadáspontja az r vektor által kijelölt pont.



10-4 ábra
A 10-1 példához.



10-3 ábra
A merőleges test szabálya szerint a forgótestet a forgástengely körül forgatni a forgástengelyre merőleges erővel lehet. A forgótestet a forgástengely körül forgatni a forgástengelyre merőleges erővel lehet. A forgótestet a forgástengely körül forgatni a forgástengelyre merőleges erővel lehet.

10-2 ábra
Levegőjártó forgótest. A forgótestet a forgástengely körül forgatni a forgástengelyre merőleges erővel lehet. A forgótestet a forgástengely körül forgatni a forgástengelyre merőleges erővel lehet.

$$\sum M = r_1 F_1 \sin \theta_1 - r_2 F_2 \sin \theta_2$$

(★-ra)

$$\sum M = (0,5 \text{ m})(4 \text{ N})(\sin 60^\circ) - (0,25 \text{ m})(9 \text{ N})(\sin 100^\circ) = -0,484 \text{ Nm}$$

(★-ra)

(órajárás irányban)

Az erő merőleges (F_m) komponensét felhasználó másik megoldás:

A 10-4c ábra a helyvektorokra merőleges F_m erőkomponenseket mutatja be.

$$\sum M = r_1 \cdot F_{1m} - r_2 \cdot F_{2m}$$

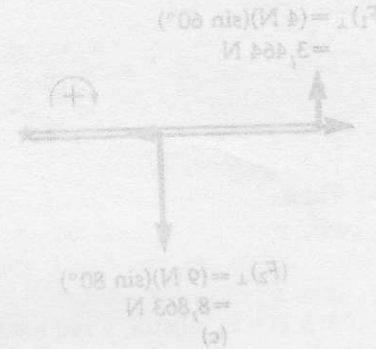
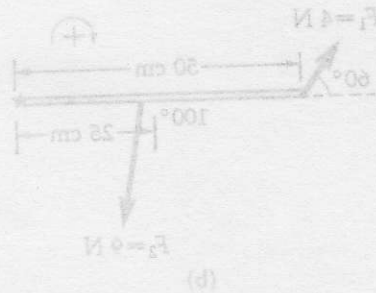
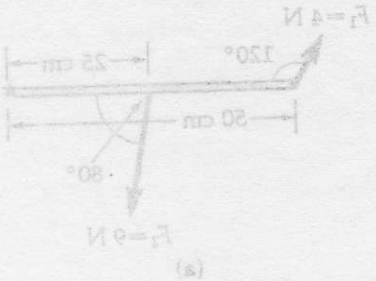
(★-ra)

$$\sum M = (0,5 \text{ m})(3,464 \text{ N}) - (0,25 \text{ m})(8,864 \text{ N}) = -0,484 \text{ Nm}$$

(★-ra)

(órajárás irányban)

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy amikor forgatónyomatékokat számítunk, akkor minden erőkart és minden erőt pozitív számként veszünk figyelembe. Csak azt követően, hogy az egyik forgási irányt „pozitív” választottuk, látjuk el az egyes forgatónyomatékokat a megfelelő előjellel.



10.3 A forgatónyomaték-vektor

A forgási mennyiségek meghatározására létezik egy nagyon kényelmes művelet. Ez a művelet két vektor **vektoriális szorzása**. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ -nek írjuk, és „A kereszt B”-nek mondjuk. Ez a szorzat egy harmadik vektort definiál, melynek nagysága⁴

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \equiv AB \sin \theta \tag{10-5}$$

ahol θ az \mathbf{A} és a \mathbf{B} vektorok iránya által bezárt kisebbik szög. Az $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ szorzatvektor iránya definíció szerint **merőleges az \mathbf{A} és a \mathbf{B} vektorokat tartalmazó síkra**. Persze, ehhez a síkhoz két merőleges irány is tartozik. A kettőből, **megállapodás szerint** a 10-5 ábrán illusztrált **jobbkez-szabálynak** megfelelő irányt választjuk.⁵

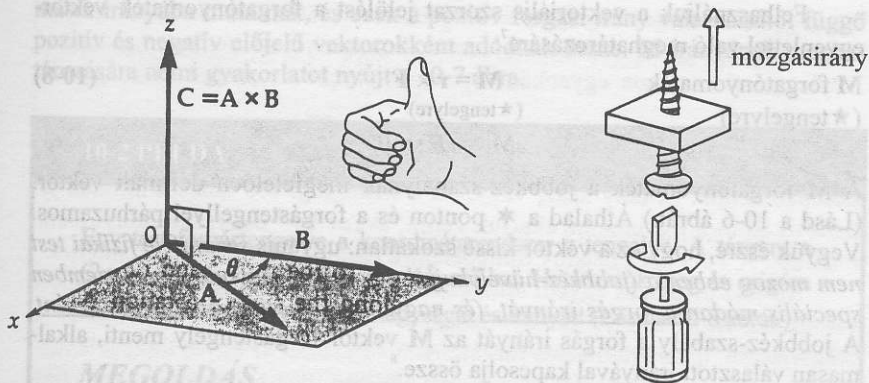
A vektoriális szorzatra vonatkozó jobbkez-szabály

Az \mathbf{A} vektornak θ szöggel \mathbf{B} irányába való forgatása egy forgási irányt határoz meg. Ha jobb kezünk ujjait ebben a forgási irányban begömböjtjük, akkor kinyújtott hüvelykujjunk a $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektor irányába mutat.

Geometriailag az $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ abszolút érték annak a paralelogrammának a területével egyenlő, amelynek az oldalai az \mathbf{A} és a \mathbf{B} vektorok. A vektoriális szorzat Descartes koordinátáit determináns segítségével írhatjuk fel:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

⁵ A jobbkez-szabály választása konzisztens azzal, hogy mindig **jobbsodrású** koordinátarendszerrel dolgozunk – vagyis olyannal, amelyikben a z tengely körüli 90° -os jobbsodrású elforgatás az x tengelyt az y tengelybe viszi át, tehát $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$. Hasonlóképpen $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ és $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$. Megjegyezzük továbbá, hogy $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$, mert $\sin 0^\circ = 0$.



10-5 ábra

A vektorális szorzatra vonatkozó jobbkez-szabály.

(a) Az **A** és a **B** vektor az *xy* síkban van.

Az **A** vektor θ szöggel **B** vektorba való forgatása egy forgásirányt tűz ki. Ha *jobb kezünk* ujjait ebbe a forgásirányba görbítjük, akkor kinyújtott hüvelykujjunk a $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektor irányába mutat. A **C** vektor a *z* tengely pozitív irányába mutat, azaz merőleges az **A** és a **B** vektorokat tartalmazó síkra.

(b) Ha jobbmenetes csavart fadarabba csavarunk, a csavar abba az irányba halad, amely – megegyezően a jobbkez-szabállyal – a forgásirányhoz a forgástengely irányába mutató vektort rendel. Ha a csavart kicsavarjuk a fából, a csavar mozgása továbbra is konzisztens marad a jobbkez-szabállyal.

Megjegyezzük, hogy „balkéz-szabály” ellentétes irányú vektort produkálna. Megjegyezzük továbbá, hogy ha a vektorokat fordított sorrendben szorozzuk össze, akkor az eredő vektor ellentétes irányú lesz:

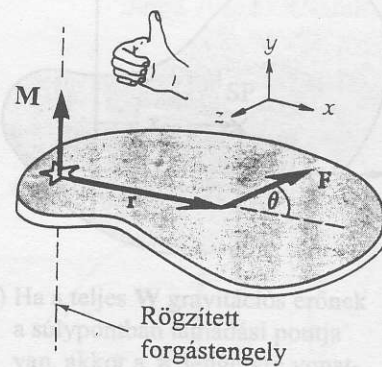
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (10-6)$$

Így tehát a vektortényezők *sorrendje nagyon fontos*. Végül: ha a két vektor egyike egy skalárral van megszorozva, akkor a szorzatvektort úgy is felírhatjuk, mint a vektorális szorzat skalárszorosát. Így:

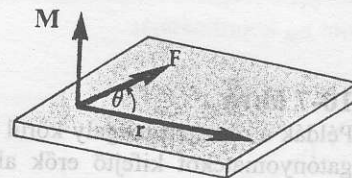
$$(m\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (10-7)$$

A forgással kapcsolatos fogalmak vektorok segítségével való kifejezése nagyon kényelmes, mert az így kapott egyenletek *minden* koordináta-rendszerben érvényesek, pl. a derékszögű, a polár, a gömbi, stb. koordináta-rendszerben is. Továbbá a vektori írásmód egyszerűbb, mint az egyenletek komponensenként, skalár alakban való felírása. De még alapsabb ok az, hogy a vektor-egyenletek akkor is *megtartják alakjukat*, ha a koordináta-rendszer egy új helyzetbe eltolódik, vagy elfordul. Tudjuk, hogy a fizika törvényei a koordináta-rendszer eltolásával és elforgatásával szemben változatlanok⁶, így a vektorokkal való felírás a legalkalmasabb a fizika alapvető kapcsolatainak megadására.

⁶ E kijelentés mögött az az alapvető feltételezés, hogy a tér homogén és izotrop. A *homogén* kifejezés annyit jelent, hogy a tér a *helytől* függetlenül mindenütt ugyanolyan tulajdonságú, míg az *izotrop* kifejezés arra utal, hogy a tér tulajdonságai függetlenek az *iránytól*. Ha ezek a térre vonatkozó feltételezések helytállóak, akkor nem számít, hogy hol választjuk meg koordináta-rendszerünk origóját és, hogy milyen irányba állítjuk a tengelyeket.



(a) Az *xy* síkban fekvő test a függőleges \star tengellyel van rögzítve. A **r** vektorral meghatározott helyen támadó vízszintes **F** erő a testre (\star körül) forgatónyomatéket fejt ki.



(b) Az **r** és az **F** vektorok iránya közötti kisebbik θ szög meghatározására a vektorokat párhuzamosan – eltolva egy pontból mérjük fel.

10-6 ábra

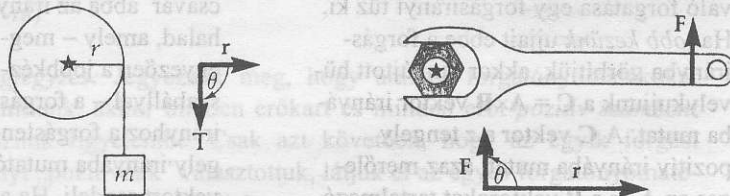
Az **M** forgatónyomaték-vektor az $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ összefüggésnek megfelelő jobbkez-szabály szerint a \star tengely irányába mutat.

Felhasználjuk a vektoriális szorzat jelölést a forgatónyomaték vektor-egyenlettel való meghatározására⁷:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \text{ forgatónyomaték} & \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} & (10-8) \\ (\star \text{ tengelyre}) & \quad (\star \text{ tengelyre}) \\ |\mathbf{M}| & = rF \sin\theta. \end{aligned}$$

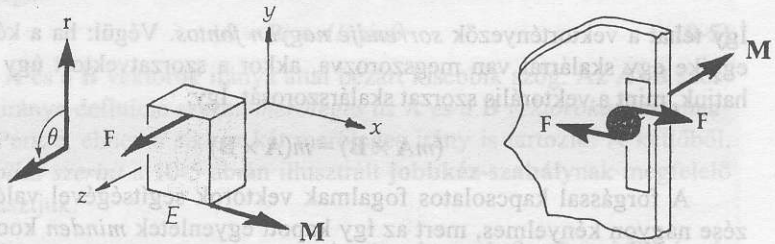
A \mathbf{M} forgatónyomaték a jobbkéz-szabálynak megfelelően definiált vektor. (Lásd a 10-6 ábrát.) Áthalad a \star ponton és a forgástengellyel párhuzamos. Vegyük észre, hogy ez a vektor kissé szokatlan: ugyanis *semmiféle fizikai test nem mozog ebben a (jobbkéz-hüvelykujjal definiált) irányban. Ezzel szemben speciális módon a forgás irányát, (és nagyságát) fejezi ki önálló vektorként.* A jobbkéz-szabály a forgás irányát az \mathbf{M} vektor forgástengely menti, alkalmasan választott irányával kapcsolja össze.⁸

Ha egy rögzített tengellyel ellátott testre különböző forgatónyomatékok hatnak, akkor az egyes forgatónyomaték-vektorok a tengely egyik vagy



(a) Egy henger szabadon forog a rögzített \star tengely körül. Az m tömegű testet tartó kötélen ébredő T feszítőerő \mathbf{M} forgatónyomatékot gyakorol (a \star tengely körül) a papír síkjára merőlegesen befelé mutató irányban. A forgatónyomaték-vektor a \star forgástengely mentén fekszik.

(b) A csavaranya csavarorsóróll történő lecsavarásához a csavarkulcsra az ábrázolt módon F erőt gyakorolunk. Ez az erő a papír síkjából kifelé mutató \mathbf{M} forgatónyomatékot eredményez. A forgatónyomaték-vektor a \star csavartengely mentén fekszik.



(c) A doboz E él körül történő felbillentéséhez szükséges, hogy a dobozra az ábrán látható módon alkalmazott erő (az E él körül) a pozitív x tengely irányába mutató \mathbf{M} forgatónyomatékot gyakoroljon.

(d) A kilincsgombnak óramutató járásával megegyező irányban való csavarása a kilincsgomb tengelyében ható \mathbf{M} forgatónyomaték-vektort létesít.

10-7 ábra

Példák a rögzített tengely körül \mathbf{M} forgatónyomatékot kifejtő erők alkalmazására.

⁷ A forgatónyomatéknak a (10-8) vektoriális szorzattal való definíciója általában nem tengelyre, hanem pontra (a koordinátarendszer origójára) vonatkozó mennyiséget definiál! A szerzők azonban most nyilvánvalóan csak síkbeli erőrendszerrel foglalkoznak, ahol a forgástengely merőleges az erőrendszer síkjára, s a koordinátarendszer kezdőpontját a tengely és a sík dőféspontjába helyezik. Ebben az esetben a forgatónyomaték-vektor a tengely irányába mutat, s a pontra definiált vektoriális szorzat megegyezik a tengelyirányú összetevővel (A fordító megjegyzése.).

⁸ Az így definiált vektorok matematikai tulajdonságai mások, mint a „közönséges” vektoroké, amilyenek például az elmozdulás és a sebesség. Hogy ezt a két vektorcsoportot megkülönböztessük, azokat, amelyek forgással kapcsolatosak, *axiális-* vagy *pszeudovektoroknak*, míg a „közönséges” vektorokat *polárvektoroknak* nevezzük.

másik irányába mutatnak, és ezek a pozitív forgási irány választásától függő pozitív és negatív előjelű vektorokként adódnak össze. M irányának meghatározására némi gyakorlatot nyújt a 10-7 ábra.

10-2 PÉLDA

Egy test forgástengelye a koordináta-rendszer z tengelye. A tárgyra a $(2\text{ m}, 1\text{ m}, 0)$ pontban $F = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ erő hat. Határozzuk meg az origóra vonatkozó forgatónyomaték nagyságát és irányát! (Lásd a 10-8 ábrát.)

MEGOLDÁS

Az F erő nagysága $\sqrt{(3\text{ N})^2 + (4\text{ N})^2} = 5\text{ N}$, az x tengellyel bezárt

szöge $\psi = \arctg \frac{4}{3} = 53,13^\circ$. Az r helyvektor szöge

$\Phi = \arctg \frac{1}{2} = 26,57^\circ$, nagysága $\sqrt{(2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2} = 2,236\text{ m}$.

Így az F és az r irányával bezárt szög:

$$\Theta = (53,13^\circ - 26,57^\circ) = 26,57^\circ.$$

$$|M| = |r||F|\sin\Theta = (2,236\text{ m})(5\text{ N})\sin(26,57^\circ) = 5,00\text{ N}\cdot\text{m}.$$

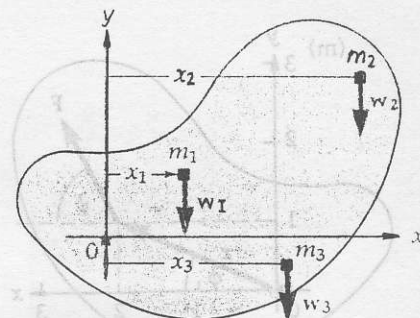
Mivel r és F az xy síkban fekszik, a jobbkéz-szabály szerint $r \times F$ a z tengely irányába esik

Vektoriális jelöléssel a megoldás:

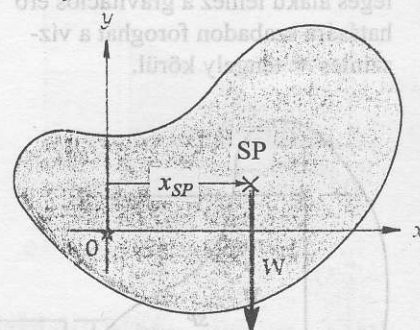
$$M = r \times F = (2\hat{x} + 1\hat{y}) \times (3\hat{x} + 4\hat{y})$$

Tekintettel arra, hogy $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = 0$ (hiszen $\sin 0^\circ = 0$), és mert

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \text{ azért } M = 2\hat{x} \times 4\hat{y} + 1\hat{y} \times 3\hat{x} = 8\hat{z} - 3\hat{z} = (5,00\text{ N})\hat{z}$$



- (a) Minden m_i tömegű részecskére $w_i = m_i g$ gravitációs erő hat, mindegyikhez tartozik egy x_i erőkar, így a \star tengelyre vonatkozóan minden részecske $x_i w_i$ forgatónyomatékokat létesít. Ezeknek a \star tengelyre vonatkozó forgatónyomatékoknak az összege a gravitációs erő eredő forgatónyomatéka.



- (b) Ha a teljes W gravitációs erőnek a súlypontban támadási pontja van, akkor a \star tengelyre vonatkozó forgatónyomaték ugyanaz, mint az (a) esetben számított.

10.4 A súlypont és a tömegközéppont

Mielőtt a kiterjedt testekre ható forgatónyomatékokat gravitáció jelenlétében vizsgálni kezdenénk, szükséges, hogy a gravitációs erőről részletesebb ismereteket szerezzünk. Minden, a Föld közelében lévő testre olyan gravitációs erő hat, amely a tárgyon szétszórva, annak minden egyes atomját befolyásolja. Ez a tény izgalmas kérdést vet fel: Ha egy tárgyra gravitációs erők következtében hatnak forgatónyomatékok, akkor vajon hogyan összegezzhetjük ezt az óriási számú bonyolult nyomatékokat, amelyeknek mindegyike egy-egy egyedi atomra ható gravitációs erő és ezen atom saját erőkarjának szorzataként állítható elő?

Szerencsére ezt a képtelen sok számolási műveletet egyetlen egyre csökkenthetjük a test súlypontjának (SP) meghatározása révén:

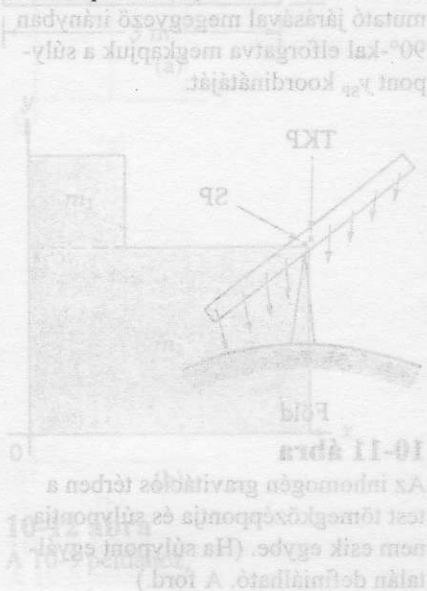
A SÚLYPONT (SP) az a pont, ahol a W gravitációs erőhatást egyesítve képzeljük, azért, hogy a gravitációtól származó forgatónyomatékok kiszámíthatóak.

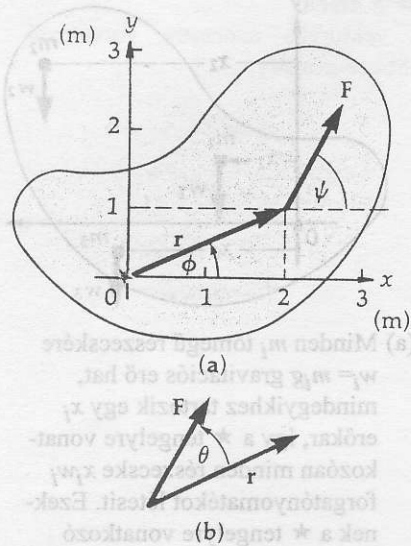
Csupán ennek a megfontolásnak a segítségével vagyunk képesek az egyes részecskékre érvényes Newton törvényeket a gravitációs térben mozgó kiterjedt test általános esetére kiterjeszteni.

Tekintsünk egy vékony fémlémezből kivágott, tetszésszerű testet! Állítsuk függőlegesen, és csatlakoztassuk egy (rögzített) vízszintes, a testre me-

10-8 ábra

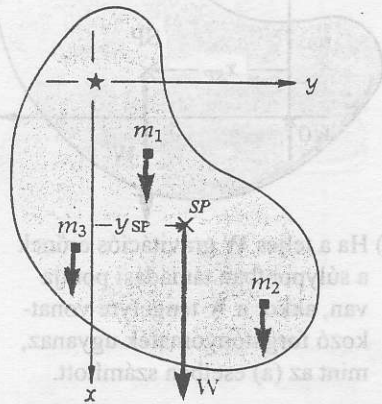
A 10-2 példához.





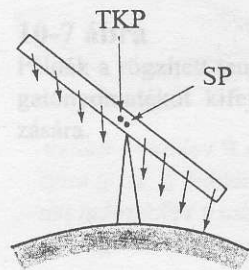
10-9 ábra

A függőleges síkban fekvő, tetszőleges alakú lemez a gravitációs erő hatására szabadon foroghat a vízszintes \star tengely körül.



10-10 ábra

Az előző ábrán szereplő testet az óramutató járásával megegyező irányban 90° -kal elforgatva megkapjuk a súlypont y_{SP} koordinátáját.



10-11 ábra

Az inhomogén gravitációs térben a test tömegközéppontja és súlypontja nem esik egybe. (Ha súlypont egyáltalán definiálható. A ford.)

rőlegesen álló forgástengelyre! Koordinátarendszerünk O középpontját a \star forgástengely egyik pontjába helyezzük. A test teljes M tömegét úgy tekintjük, mintha számos, egyenként m_i elemi tömegrészekből állna. Így:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum m_i$$

Elképzelhetünk néhány száz, vagy, ha a nehézségi erő hatását minden jelenlévő atomra figyelembe akarjuk venni, akkor 10^{23} nagyságrendnyi elemi tömeget. A 10-9 ábra néhány tömegelemre ható nehézségi erőt szemléltet.

Mi lesz az összes egyedi tömegelemre ható gravitációs erő \star tengelyre vonatkozó teljes $\Sigma \mathbf{M}$ forgatónyomatéka? Minden egyes $w_i = m_i g$ erőnek x_i erőkarja van, így a gravitációs forgatónyomaték, amit az egyes tömegelemek \star -ra vonatkoztatva létesítenek, $x_i w_i$ -vel egyenlő. Ezért a \star -tengelyre vonatkozó teljes forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + \dots = \Sigma x_i w_i \quad (10-9)$$

(\star -ra)

Az x_{SP} távolságot most úgy definiáljuk, hogy az az SP súlypont nyomatékarja legyen. Így

$$\Sigma \mathbf{M} = x_{SP} \Sigma w_i \quad (10-10)$$

(\star -ra)

A kétféle forgatónyomatéki egyenlet összehasonlításából x_{SP} :

A súlypont
(x koordinátája)

$$x_{SP} = \frac{\Sigma x_i w_i}{\Sigma w_i} \quad (10-11)$$

Feltételeztük, hogy az egész testre (mint a többi, e könyvben tárgyalt esetben is) g mindenütt egyenlő (homogén). A (9-10) egyenlettel való összevetésből láthatjuk, hogy *egy test súlypontja megegyezik a test tömegközéppontjával, feltéve, hogy a test minden pontja homogén gravitációs mezőben van.*⁹

Az SP pont y koordinátáját oly módon kapjuk meg, hogy a testet 90° -kal elforgatjuk úgy, hogy a gravitáció az eredeti x tengely mentén hasson, lásd a 10-10 ábrát. Háromdimenziós testekre z_{SP} értékét is megtalálhatjuk. Olyan rendszerre, amelynek csak néhány tömegpontja van, az összegezés közvetlenül is elvégezhető. Kiterjedt testekre, amelyek anyageloszlása folytonos, olyan számítási eljárást alkalmazunk, amely a véges összeget az infinitezimális dm tömegelemekre ható dw gravitációs erővel számolva *integrálba* viszi át. Egyenletekkel kifejezve:

<p>jelölésmód végesszámú tömegpontra</p> $x_{SP} = \frac{\Sigma x_i w_i}{\Sigma w_i}$	<p>integrál alakú jelölésmód folytonos tömegeloszlásra</p> $x_{SP} = \frac{\int x dw}{\int dw} \quad (10-12)$ <p>(Az egész testre integrálva)</p>
---	---

⁹ A homogén rúd tömegközéppontja a geometriai középpontban van. Azonban inhomogén gravitációs térben súlypontja a 10-11 ábrán látható helyzetben kissé a rúd alsó része felé tolódik el, mert erre, minthogy közelebb van a Földhöz, nagyobb gravitációs erő hat. Az „egyensúlyi pont” közvetlenül a súlypont alatt van. Más helyzetekben a súlypont máshova kerül. Persze a tömegközéppont minden helyzetben egyazon helyen marad, mert azt a gravitációs mezőre hivatkozás nélkül definiáltuk. (Inhomogén térben a súlypont definiálása többnyire értelmetlen. A fordító megjegyzése.)

Hasonló kifejezés írható fel y_{SP} -re és z_{SP} -re is. A három komponens egyenlete egyetlen $\mathbf{r}_{SP} = x_{SP}\hat{x} + y_{SP}\hat{y} + z_{SP}\hat{z}$ vektoregyenletbe foglalható össze:

A súlypont helye:
$$\mathbf{r}_{SP} = \frac{\sum \mathbf{r}_i w_i}{\sum w_i} \quad \mathbf{r}_{SP} = \frac{\int \mathbf{r} dw}{\int dw} \quad (10-13)$$

(Az egész testre integrálva)

ahol \mathbf{r}_i (vagy \mathbf{r}) a $w_i = m_i g$ (vagy a $dw = g \cdot dm$) súlyú m_i (vagy dm) elemi tömeg helyzet-vektora. Vegyük észre, hogy mindkét kifejezés esetén a nevező nem más, mint a test teljes W súlya.

Nem szükséges, hogy a test súlypontja a test valóságos anyagán belül legyen. Például egy fánk (sütemény) súlypontja üregének geometriai középpontjában van. A homogén (egyenletes sűrűségű), szimmetrikus testek súlypontja mindig a szimmetriaközéppontban van. De a súlypont akkor is a szimmetriatengelyen van, ha a test sűrűsége a szimmetriatengelytől kifelé csak radiálisan változik. Sőt, a tárgyak szimmetriája gyakran kulcsa a súlypont meghatározásának, és a szimmetriatulajdonságok megfigyelése révén a súlypont helyét gyakran ránézéssel is meg lehet állapítani.

Tömegközéppont számítások

Mintegy ebben a könyvben csak homogén gravitációs térben lévő testekkel foglalkozunk, ezért a súlypontra vonatkozó számításaink megegyeznek a tömegközéppontra vonatkozóakkal. Tájékoztatásul álljanak itt a (9-8) egyenlettel megadott definíciók:

A tömegközéppont (TKP) helye:
$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum \mathbf{r}_i m_i}{M} \quad \mathbf{r}_{TKP} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M} \quad (10-14)$$

(integrálva az egész testre)

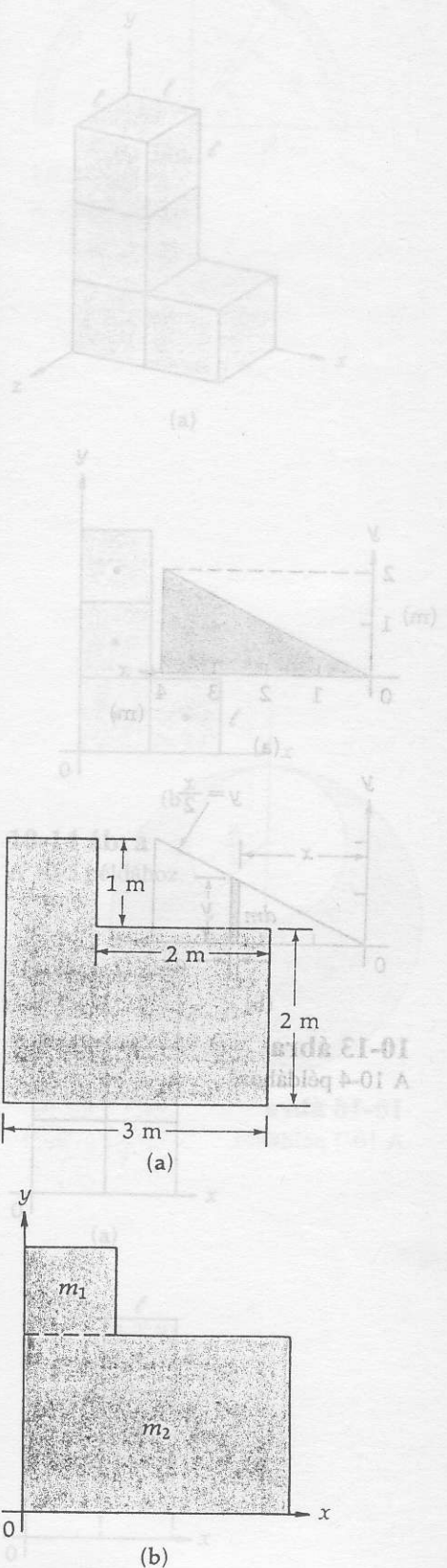
10-3 PÉLDA

Határozzuk meg a 10-12a ábrán látható, homogén lemezből kivágott L alakú test tömegközéppontját!

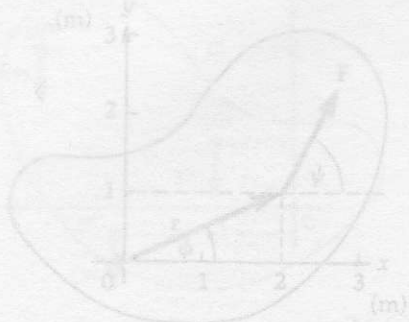
MEGOLDÁS

A számolás egyszerűsítésére osszuk fél képzeletben a testet két szimmetrikus darabra (10-12b ábra). Tudjuk, hogy mindkét rész tömegközéppontja a geometriai középpontban van. A lemez A nagyságú területének m tömege: $m = (A)(\rho)$ (ρ sűrűség) (t vastagság). Így:

A résztest tömege (terület)(ρt)	A tömegkp. koord. (x, y)
$m_1: (1 \text{ m})(1 \text{ m})(\rho t)$	$(0,50 \text{ m}; 2,5 \text{ m})$
$m_2: (3 \text{ m})(2 \text{ m})(\rho t)$	$(1,5 \text{ m}; 1 \text{ m})$



10-12 ábra
A 10-3 példához.



Tehát

$$x_{TKP} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0,50 \text{ m})(1 \text{ m})(1 \text{ m})(\rho t) + (1,5 \text{ m})(3 \text{ m})(2 \text{ m})(\rho t)}{(1 \text{ m})(1 \text{ m})(\rho t) + (3 \text{ m})(2 \text{ m})(\rho t)}$$

$$= \frac{9,5 \text{ m}}{7,0} = \underline{1,36 \text{ m}}$$

$$y_{TKP} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2,5 \text{ m})(1 \text{ m})(1 \text{ m})(\rho t) + (1 \text{ m})(3 \text{ m})(2 \text{ m})(\rho t)}{(1 \text{ m})(1 \text{ m})(\rho t) + (3 \text{ m})(2 \text{ m})(\rho t)}$$

$$= \frac{8,5 \text{ m}}{7,0} = \underline{1,21 \text{ m}}$$

Tehát a tömegközéppont koordinátái: (1,36 m, 1,21 m)

10-4 PÉLDA

A 10-13 ábrán látható háromszög alakú test homogén anyagú lemezből készült. Keressük meg a tömegközéppontját!

MEGOLDÁS

Mint hogy az anyag homogén, azért sűrűsége ($\rho = \text{tömeg/térfogat}$) állandó. Jelöljük a lemez vastagságát t -vel! (Számításaink során mind ρ , mind t ki fog esni.) Ebben az esetben a dm tömeg-elemek összegezésére integrálást alkalmazunk. Példánkban lényeges szempont, hogy a 10-13b ábrán láthatóan a kiválasztott dm tömegelem minden pontjának abszcisszája ugyanaz az x érték. A dm tömegelem magassága az integrálás során változik, határát az $y = x/2$ egyenes képezi.

Most a dm tömegelem integrálásra alkalmas változó segítségével fejezzük ki. Mindig figyelembe kell vennünk, hogy

$$dm = \rho dV,$$

ahol dV a dm tömegelem térfogata. A 10-13b ábrából

$$dV = (\text{magasság})(\text{vastagság})(\text{szélesség}) = y t dx = \left(\frac{x}{2}\right) t \cdot dx$$

Így $dm = \rho t(x/2)dx$. Ezzel dm -et a dx változóval fejeztük ki.

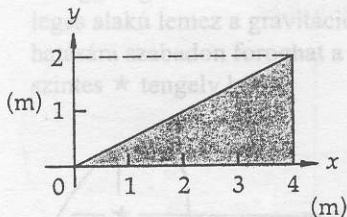
$$x_{TKP} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{4 \text{ m}} x \rho t \left(\frac{x}{2}\right) dx}{\int_0^{4 \text{ m}} \rho t \left(\frac{x}{2}\right) dx}$$

$$x_{TKP} = \frac{\left(\frac{\rho t}{2}\right) \int_0^{4 \text{ m}} x^2 dx}{\left(\frac{\rho t}{2}\right) \int_0^{4 \text{ m}} x dx} = \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^{4 \text{ m}}}{\left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{4 \text{ m}}} = \frac{2}{3} x \Big|_0^{4 \text{ m}} = \frac{8}{3} \text{ m} = 2,67 \text{ m}$$

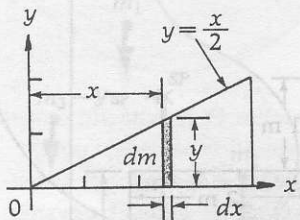
Tehát a tömegközéppont x koordinátája a derékszögű háromszög csúcsától mérve a háromszög x tengelyen levő oldalának $2/3$ -ában van. Hasonló módon állapíthatjuk meg a tömegközéppont y koordinátáját az x tengellyel párhuzamos dy szélességű dm tömegelem

10-9 ábra

A függőleges síkban fekvő, térszög α alakú lemez a gravitációs erő



(a)

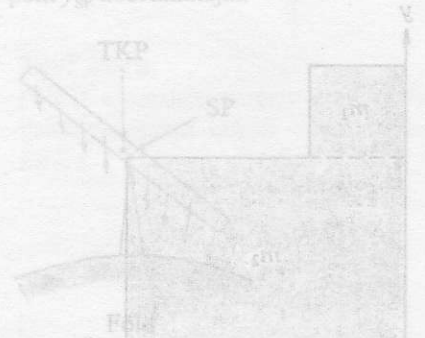


(b)

10-13 ábra

A 10-4 példához.

mutató járásával meggyőző irányban 90°-kal elforgatva megkapjuk a súlypont y_{TKP} koordinátáját.



10-11 ábra

Az inhomogén gravitációs térben a test tömegközéppontja és súlypontja nem esik egybe. (Ha súlypontot a talán definiálható. A ford.)

választással. Az iméntihez hasonló számítás az $y_{TKP} = 0,667$ m eredményre vezet. Tehát a tömegközéppont koordinátái

$$(2,67 \text{ m}; 0,667 \text{ m})$$

Általában minden tetszőleges, állandó sűrűségű anyagból készített háromszög (nem csupán a derékszögű háromszög) tömegközéppontja bármelyik csúcstól a szemközti oldal középpontjához húzott egyenesen, a csúcstól számítva annak 2/3-ában van.

10-5 PÉLDA

Négy, állandó sűrűségű, l élhosszúságú kocka a 10-14 ábrán látható módon L alakú testté van összeragasztva. Keressük meg a test tömegközéppontját!

MEGOLDÁS

A szimmetriából következően minden egyes kocka tömegközéppontja a geometriai középpontban van. Minthogy ezek a középpontok mind a $z = l/2$ síkban vannak, ezért ebből következően a tömegközéppont z koordinátája is ebben a $z_{TKP} = l/2$ síkban helyezkedik el.

Az x és az y koordináták kiszámításához tekintjük a 10-14b ábrát, és képzeljük a rendszert olyan elrendezésnek, amely a kockák geometriai középpontjában lévő pontszerű M tömegekből áll. Így:

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_{TKP} = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right) + M\left(\frac{l}{2}\right) + M\left(\frac{l}{2}\right) + M\left(\frac{3l}{2}\right)}{M + M + M + M} = \frac{3l}{4}$$

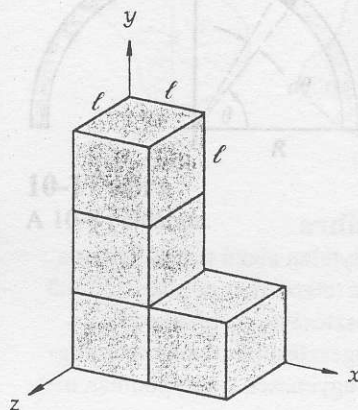
$$y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$y_{TKP} = \frac{M\left(\frac{5l}{2}\right) + M\left(\frac{3l}{2}\right) + M\left(\frac{l}{2}\right) + M\left(\frac{l}{2}\right)}{M + M + M + M} = \frac{5l}{4}$$

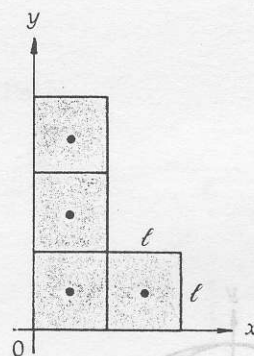
Tehát a tömegközéppont a $\left(\frac{3l}{4}; \frac{5l}{4}; \frac{l}{2}\right)$ pontban van.

10-6 PÉLDA

A „negatív” tömeg módszere. Ha valamely test kis kiegészítéssel szimmetrikussá tehető, akkor a tömegközéppont meghatározására hasznos az alább ismertetett módszert alkalmazni. A módszert az előbbi példa most következő megoldásával illusztráljuk. Először a 10-14 ábrán látható testhez további két kockát illesztünk azért, hogy a 10-15a ábrán bemutatott, $6M$ tömegű szimmetrikus test keletkezzék. E test tömegközéppontjának x és y koordinátái szimmet-



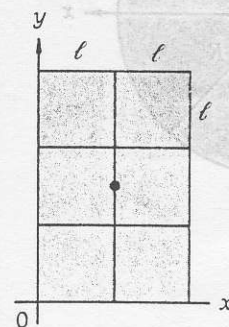
(a)



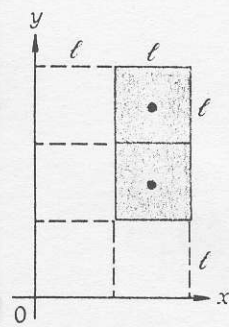
(b)

10-14 ábra

A 10-5 példához.



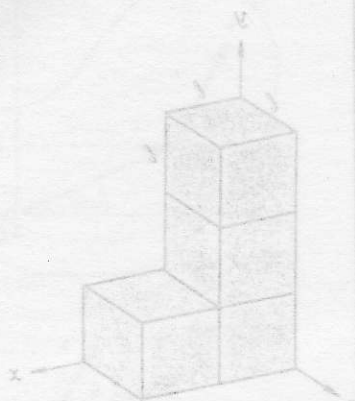
(a)



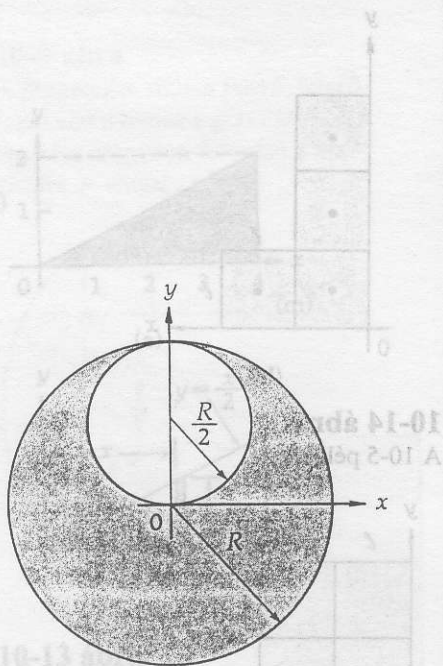
(b)

10-15 ábra

A 10-6 példához.



(a)



10-16 ábra

A 10-7 példához.

ria folytán (l ; $3l/2$). Ezután tekintetbe vesszük azt a $-2M$ tömegű „negatív” tömeget, melynek tömegközéppontja, amint ezt a 10-15b ábra mutatja, a $(3l/2; 2l)$ pontban van. Végül a két testet „összeadjuk”. Az eljárás során létrejön a 10-5 példában szereplő eredeti L alakú test. A tömeg-középpont számítása a következő:

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(6M)(l) + (-2M)\left(\frac{3l}{2}\right)}{6M + (-2M)} = \frac{3l}{4}$$

$$y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{(6M)\left(\frac{3l}{2}\right) + (-2M)(2l)}{6M + (-2M)} = \frac{5l}{4}$$

$$z_{TKP} = \frac{l}{2}$$

A tömegközéppont a $\frac{3l}{4}; \frac{5l}{4}; \frac{l}{2}$ pontban van.

10-7 PÉLDA

Homogén anyagú, vékony fémlemezről készült R sugarú körlepből $R/2$ sugarú köralakú lyuk van kivágva. A lyuk széle a körleap peremét érinti. Határozzuk meg a tömegközéppont távolságát az eredeti teljes körlemez középpontjától!

MEGOLDÁS

A lyukat úgy kezeljük, mint az eredeti hiánytalan, körlemezrel egyesített „negatív tömegű” testet. (Ha majd a kettőt összeadjuk, akkor a lyuk-tartomány zérus tömegű lesz.) Szimmetria okból a tömegközéppont a 10-16 ábra y tengelyen van, ezért $x_{TKP} = 0$. Az m tömegűnek tekintett eredeti körlemez középpontjába helyezett origóval számolva:

	Tömeg	tömegközéppont
Eredeti (teljes) körlemez	$m_1 = m$	$(0; 0)$
Negatív tömegű lyuk	$m_2 = -\frac{m}{4}$	$(0; R/2)$

$$\text{Tehát } y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(0) + \left(-\frac{m}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)}{\left(m\right) + \left(-\frac{m}{4}\right)} = -\frac{R}{6}$$

A tömegközéppont a $\left(0; -\frac{R}{6}\right)$ pontban van.

10-8 PÉLDA

Vékony, homogén anyagú drót R sugarú félkörre van hajlítva. Határozzuk meg a tömegközéppontját! Lásd a 10-17. ábrát!

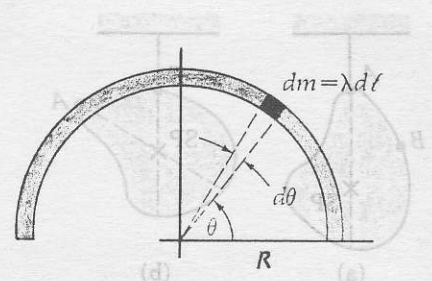
MEGOLDÁS

A drót mentén kiválasztunk egy $d\ell$ hosszúságú elemi részt. Ez kifejezhető $d\ell = R d\theta$ alakban. Az elemi rész tömege $dm = \lambda d\ell$, ahol λ a drót fajlagos tömege: $\lambda = a$ drót tömege/ a drót hossza. (A λ faktor számításainkban ki fog esni.) Így $dm = \lambda R d\theta$, és θ az integrálási változó. A szimmetriából következtetjük, hogy $x_{TKP} = 0$; y_{TKP} kiszámításához figyelembe vesszük, hogy $y = R \sin\theta$. Az általános kifejezéssel számolva

$$y_{TKP} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int (R \sin \theta)(\lambda R d\theta)}{\lambda \int d\ell} = \frac{R^2 \lambda \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\lambda \pi R}$$

$$y_{TKP} = \frac{R}{\pi} [(-\cos \theta)]_0^\pi = \frac{R}{\pi} [-(-1) - (-1)] = \frac{2R}{\pi}$$

Így a tömegközéppont a $(0; \frac{2R}{\pi})$ pontban van.

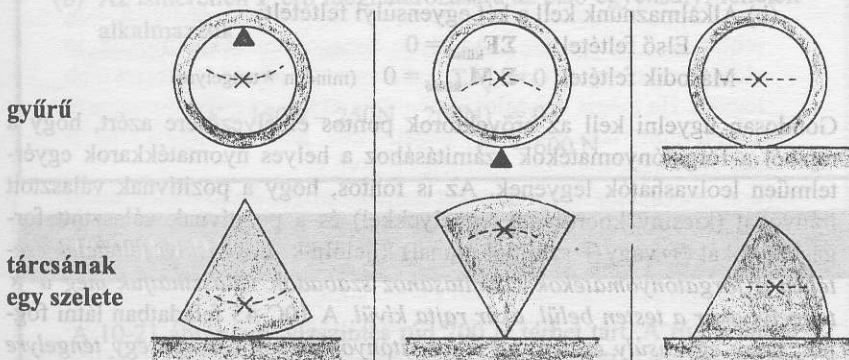


10-17 ábra

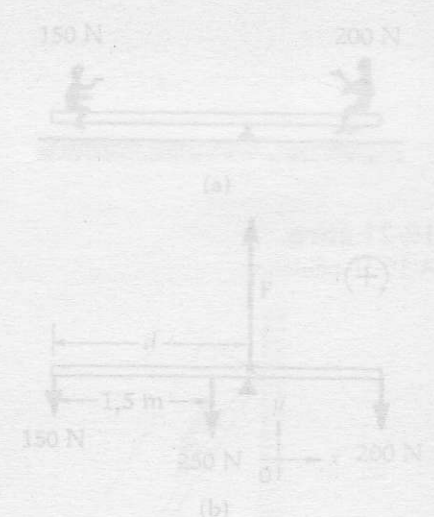
A 10-8 példához.

10.5 Egyensúly

A mérnökök számára fontos kérdés az egyes műszaki szerkezetek stabilitása és egyensúlya a gravitációs térben. Minden erőt és forgatónyomatékot, ami a szerkezeti elemekre hat, figyelembe kell venniük, hogy olyan hidakat tudjanak építeni, amelyek nem szakadnak le, olyan épületeket tervezhessenek, amelyek nagy szélben sem dőlnek fel, olyan gátakat, amelyeket a víz nyomása nem tör át. Ezek a problémakörök a mechanika *statikának* nevezett ágához tartoznak. A statika (egy inerciarendszerre vonatkoztatottan) a *statikai egyensúlyban* lévő, vagy pedig a dinamikai egyensúlyban lévő (transzlációs vagy szöggyorsulás nélkül, állandó sebességgel mozgó) testekkel foglalkozik.



(a) Stablis (biztos) egyensúly. (b) Instabil (bizonytalan) egyensúly. (c) Semleges egyensúly.

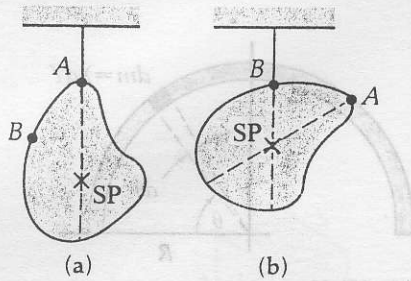


10-20 ábra

A 10-9 példához.

10-18 ábra

Szilárd testek egyensúlyi helyzetei.



10-19 ábra

A szabálytalan alakú test súlypontja a test két tetszőleges pontban történő felfüggesztésével meghatározható. A felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenesek a súlypontban metszik egymást.

Gravitáció jelenlétében a tárgyak stabilitása attól függ, hogy a súlypontjuk az alátámasztásukhoz képest hogyan helyezkedik el. Ha a tárgy úgy van alátámasztva, hogy csekély elmozdulás (vagy elfordulás) *emeli* a súlypontját, akkor azt mondjuk, hogy **stabilis egyensúlyban** van. Azért stabilis, mert ekkor a gravitációtól származó forgatónyomaték igyekszik visszaállítani a tárgy eredeti helyzetét. Ha a súlypont kicsiny elmozdulás vagy elfordulás következtében *süllyed*, akkor a tárgy **instabil egyensúlyban** van – a gravitáció hatására a súlypont tovább süllyed. Végül, ha a tárgy anélkül mozdul el, hogy súlypontjának magassága megváltozna, **semleges egyensúlyban** van. A 10-18 ábra ezt a három esetet illusztrálja.

Az egyes egyensúlyi helyzetekben a testek nem hajlamosak a forgásra (bár az instabil egyensúly ebből a szempontból is meglehetősen bizonytalan állapot). Ennek oka az, hogy a súlyponton átmenő W erőből származó forgatónyomaték erőkarja a felfüggesztési vagy az alátámasztási pontra vonatkozóan zérus. Így forgást okozó forgatónyomaték nincs jelen.

Általában, az egy pontban felfüggesztett test nyugalmi állapotban úgy helyezkedik el, hogy súlypontja a felfüggesztési pont alatt, az ezen átmenő függőleges egyenesen van. Ez egyszerű lehetőséget ad az olyan, szabálytalan alakú testek súlypontjának kísérleti meghatározására, amelyekre a (10-14) egyenlet végzendő matematikai számolás nehezen volna kivitelezhető. Ahogyan ezt a 10-19 ábra illusztrálja, ha a test tetszőszerinti A pontjában van felfüggesztve, akkor súlypontja az A ponton átmenő függőleges egyenesen van. Valamely más B pontra vonatkozóan megismételt eljárás egy másik egyenest tűz ki. A súlypontot a két egyenes metszéspontja adja meg.

10.6 Merev testek statikai egyensúlyban

Ahhoz, hogy egy test egyensúlyban legyen, két feltételnek kell teljesülnie: Szükséges, hogy a testre ható *erők eredője* és a testre ható *forgatónyomatékok eredője is zérus legyen*:

$$\begin{array}{ll} \text{Első} & \text{transzlációs} \\ \text{feltétel} & \text{egyensúly} \end{array} \quad \Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = 0 \quad (10-15)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Második} & \text{forgási} \\ \text{feltétel} & \text{egyensúly} \end{array} \quad \Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0 \quad (\text{bármely } \star \text{ tengelyre}) \quad (10-16)$$

Bármely statikai probléma vizsgálatának a módszere mindig azonos:

(a) Vektorábrát kell készíteni a testről, amelyen a testre ható összes külső erő látható.

(b) Alkalmaznunk kell a két egyensúlyi feltételt:

$$\text{Első feltétel: } \Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$$

$$\text{Második feltétel: } \Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0 \quad (\text{minden } \star \text{ tengelyre})$$

Gondosan ügyelni kell az erővektorok pontos elhelyezésére azért, hogy a rajzból a forgatónyomatékok számításához a helyes nyomatékarok egyértelműen leolvashatók legyenek. Az is fontos, hogy a pozitívnak választott irányokat (kicsiny koordináta tengelyekkel) és a pozitívnak választott forgásirányokat (\oplus vagy \ominus szimbólummal) kijelöljük. *Egyensúlyi feltételek esetében a forgatónyomatékok számításához szabadon választhatjuk meg a \star tengelyt akár a testen belül, akár rajta kívül.* A 10C-45 feladatban látni fogjuk, hogy egyensúly esetén, ha a forgatónyomatékok összege egy tengelyre vonatkozóan zérus, akkor bármely más, ezzel párhuzamos tengelyre is zérus. A feladatok megoldása gyakran egyszerűbbé válik, ha a forgáspontot (\star) úgy választjuk, hogy egy vagy több ismeretlen erő hatásvonala is átmenjen

rajta. Minthogy a forgásponton átmenő erők erőkarja zérus, azért ezek az erők a nyomatéki egyenletben nem szerepelnek. Végül egy tanács: Tekintve, hogy ezek az erők az egyenletben nem jelennek meg, ezért előnyös a második egyensúlyi feltétellel kezdeni – gyakran már maga a nyomatéki egyenlet is választ ad a feltett kérdésre.

A következő példákban szándékosan „hangosan gondolkodunk”, ezáltal indoklásaink különösen világosak lesznek. Minden statikai probléma ugyanazeket a megközelítéseket használja, ezért az alábbi bevezető példák nagyon hasznosak.

10-9 PÉLDA

Két gyermek, egy 150 N és egy 200 N súlyú, 3m hosszú, 250 N súlyú palló két végén ül. (a) Határozzuk meg azt az alátámasztási pontot, amely a palló egyensúlyban maradását biztosítja! (b) Határozzuk meg azt az erőt, amelyet az alátámasztás gyakorol a pallóra.

MEGOLDÁS

- (a) A 10-20b ábrában a pallóra ható függőlegesen felfelé mutató ismeretlen F erő, ami az alátámasztástól származik, a palló bal oldali végétől ismeretlen d távolságra van. A forgáspontot (\star) az alátámasztási pontban választjuk. Így a \star tengelyre vonatkozó forgatónyomaték számításához az ismeretlen F erőre nem lesz szükségünk. A palló egyenletes tömegeloszlású, így a gravitációs erőt geometriai középpontjában vehetjük fel. Bejelöljük a pozitív x és y irányt, az óramutató járásának irányába választott pozitív forgásirányt, valamint a \star tengely helyét. A második egyensúlyi feltételt alkalmazva kapjuk, hogy

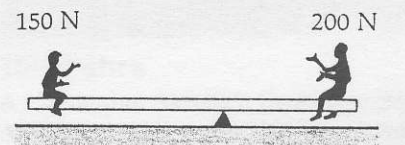
$$\begin{aligned}\Sigma M &= 0 \\ (\star \text{ tengelyre}) \\ (200\text{N})(3\text{m} - d) - (250\text{N})(d - 1,5\text{m}) - (150\text{N})(d) &= 0 \\ (975\text{Nm}) - (600\text{N})(d) &= 0\end{aligned}$$

$$d = 1,63 \text{ m.}$$

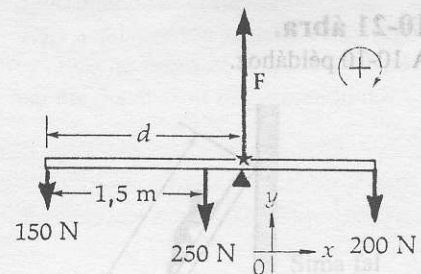
Jegyezzük meg, hogy a forgatónyomatékok számításakor minden nyomatékkart és erőt pozitív számmal veszünk figyelembe. A megfelelő pozitív vagy negatív előjelet csak akkor alkalmazzuk, amikor a forgatónyomatékokat összegezzük, mégpedig attól függően, hogy melyik forgási irányt választottuk pozitívnak.

- (b) Az ismeretlen F erő meghatározására az első egyensúlyi feltételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ (F - 150\text{N} - 250\text{N} - 200\text{N}) &= 0 \\ F &= 600 \text{ N}\end{aligned}$$



(a)



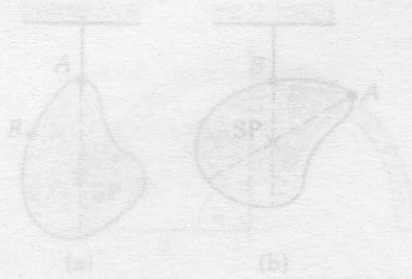
(b)

10-20 ábra

A 10-9 példához.

10-10 PÉLDA

A 10-21 ábrán egy vízszintes rúd 200 N terhet tart. A rúd a falhoz csuklós tengellyel csatlakozik, amely így tetszőleges irányú erőt



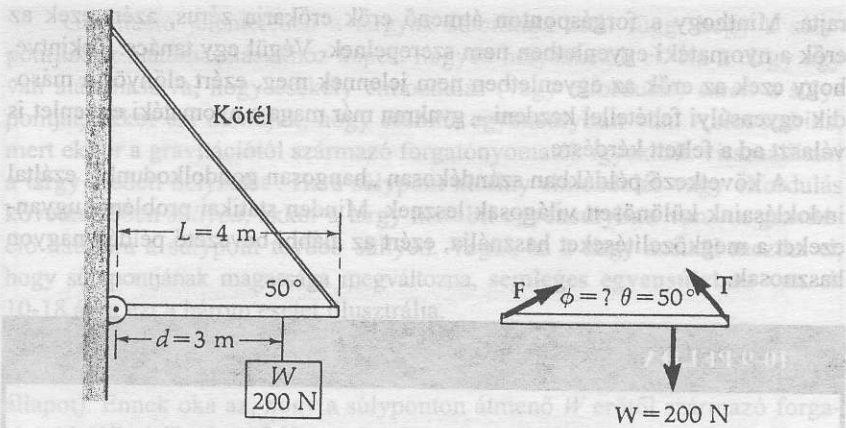
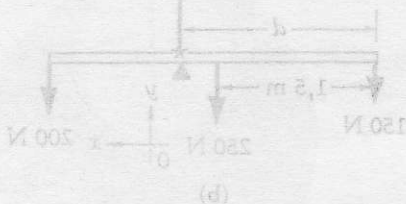
10-19 ábra

A szabálytalan alakú test súlypontja a test két tetszőleges pontban történő felfüggesztésével meghatározható. A felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenesek a súlypontban metszik egymást.



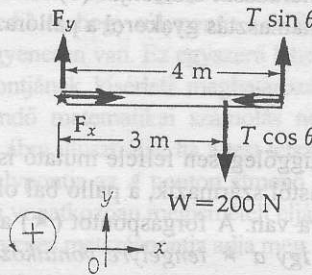
10-21 ábra.

A 10-10 példához.



(a) A vízszintes rúd 200 N súlyú terhet tart.

(b) A rúd vektorábrája.



(c) Vektorábra az erőösszetevőkkel

(d) A csukló által a rúdra gyakorolt erő iránya a vízszintessel Φ szöget zár be.

gyakorolhat a rúdra, *forgatónyomatékot* azonban nem fejthet ki.¹⁰ Annak feltételezésével, hogy a rúd súlya elhanyagolható, határozzuk meg (a) a kötéleben ébredő T feszítőerőt és (b) azt az F erőt, amit a csuklós tengely gyakorol a rúdra.

MEGOLDÁS

(a) Először is elkészítjük a rúd vektorábráját (10-21b és a 10-21c ábra). Minthogy a csuklós tengelytől származó erőknek sem nagyságát, sem irányát nem ismerjük, azért egyszerűbb lesz, ha az erő F_x vízszintes és F_y függőleges komponensét külön – külön határozzuk meg. Irányukat könnyen elképzelhetjük: Ha elvennénk a csuklós tengelyt, akkor a gravitáció hatására a rúdnak ez a vége leesne, ezért F_y felfelé kell, hogy mutasson; a T kötélerő vízszintes komponensének kompenzálása miatt pedig F_x -nek jobbra kell irányulnia. (Az ilyen megfontolásokat mindig jó előzetesen elvégezni, hogy az erődiagram a lehető legkorrektebb legyen. Ha mégis helytelenül döntünk, akkor az erőkomponensre kapott numerikus eredmény negatív lesz, jelezve, hogy a tényleges erő a feltételezettel ellentétes irányú.)

A csuklós tengelyen két ismeretlen erő hatásvonalja halad át, ezért mi most ezt a pontot választjuk a forgatónyomatékok meghatározására. (Minthogy a két ismeretlen erő karja most zé-

¹⁰ Ha a rúd szilárdan be lenne ágyazva a falba, akkor a huzalt feszítő erőt tetszőlegesen növelhetnénk anélkül, hogy a rúd helyzete ezáltal megváltozna. (A fal a rúd végére ellentétes forgatónyomatékot gyakorolna, hogy a huzaltól származó megnövekedett forgatónyomatéknak ellenálljon.) Az ilyen típusú feladattal nem foglalkozunk, a rudat minden esetben csuklós tengellyel erősítjük a falhoz.

rus, azért ezek nem gyakorolnak forgatónyomatékok a csuklóra.) Választásunkat a rajzon csillag ★ jelzi. Ezután pozitívnak választjuk az órajárással ellentétes irányú forgást – ezt a rajzon a ⊖ szimbólum jelöli. Az x és az y tengelyek pozitív irányát is berajzoltuk. Most pedig a második egyensúlyi feltételt alkalmazzuk:

$$\Sigma M = 0$$

(a csuklós tengelyre)

$$T \sin \theta \cdot L - W d = 0$$

$$T = \frac{W d}{\sin \theta \cdot L} = \frac{(200 \text{ N})(3 \text{ m})}{(\sin 50^\circ)(4 \text{ m})} = 196 \text{ N}$$

(b) Most az első egyensúlyi feltételt alkalmazzuk.

$$x \text{ irányban} \quad \Sigma F_x = 0$$

$$F_x - T \cos \theta = 0$$

$$F_x = T \cos \theta = (196 \text{ N})(\cos 50^\circ) = 126 \text{ N}$$

$$y \text{ irányban} \quad \Sigma F_y = 0$$

$$F_y - W + T \sin \theta = 0$$

$$F_y = W - T \sin \theta$$

$$F_y = 200 \text{ N} - (196 \text{ N})(\sin 50^\circ) = 49,9 \text{ N}$$

A csuklós tengely által a rúdra ható erő nagysága:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(126)^2 + (49,9)^2} \text{ N} = 136 \text{ N}$$

és az erő iránya (10-21d ábra):

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{49,9 \text{ N}}{126 \text{ N}} = 0,396$$

$$\Phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,396 = 21,6^\circ$$

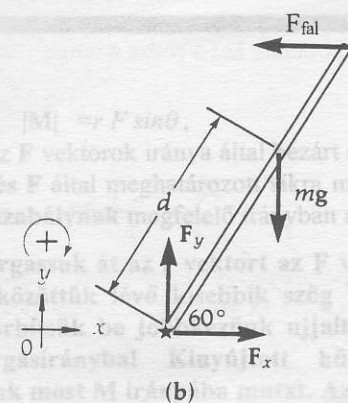
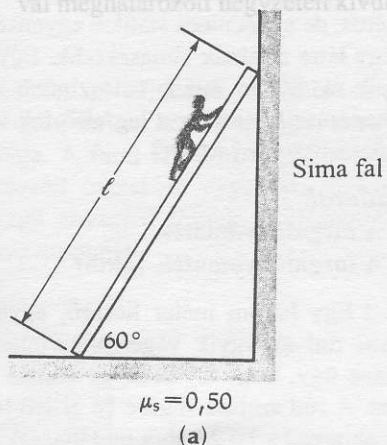
Ezekben a példákban előnyös volt a $\Sigma F = 0$ feltétel alkalmazása előtt a $\Sigma M = 0$ forgatónyomaték feltétellel indítani. Egyensúlyi állapotok vizsgálatához gyakran ez a legjobb hozzáállás, mert a vonatkozási pont gondos mérlegeléssel történő megválasztása a forgatónyomaték számítására felírt egyenletből egy vagy több erőt is kiküszöbölhet, amelyek egyébként az erők összegére felírt egyenletben megjelennének.

10-11 PÉLDA

Egy l hosszúságú, elhanyagolható tömegű létra sima falnak támaszkodik. A létra 60° -os szöget zár be a vízszintessel. A talajon a nyugalmi súrlódási együttható 0,50. Milyen (l -el kifejezve) magasságra mászhat fel egy ember, anélkül, hogy a létra megcsúszna?

MEGOLDÁS

A 10-22b ábrán a létráról készített vektorábrán látható. Ahhoz, hogy a létra ne csússzon meg a talajon, a talajnak érdesnek kell lennie, hogy kellő mértékű vízszintes súrlódási erőt biztosítson. Meg kell azonban említenünk, hogy a talajtól a létrára ható, a dőlésszögtől függő eredő erő nem a létra irányába hat. (Az a tévhit, hogy ez a létra mentén hat, elég gyakori!) Mínt hogy a talajtól származó erőnek sem az irányát, sem a nagyságát nem ismerjük, ezért ezt az F_x és F_y komponenseivel vesszük figyelembe. Mivel a fal „sima”, a létra felső végén a súrlódás elhanyagolható; azaz a falon $F_y = 0$. A pozitív forgásirányt, az x és az



10-22 ábra

A 10-11 példához.

y tengelyeket, valamint azt a pontot, amelyikre a nyomatékokat számoljuk, a megfelelő szimbólumokkal jelöljük.

A második egyensúlyi feltételt alkalmazva:

$$\sum M = 0$$

(az alsó pontra)

$$[mg d \cos\theta - F_{fal} l \sin\theta] = 0$$

$$d = \frac{F_{fal} l \sin\theta}{mg}; \tag{10-17}$$

Az első egyensúlyi feltételt alkalmazva

x irányban:

$$\sum F_x = 0$$

$$(F_x - F_{fal}) = 0$$

$$F_x = F_{fal}$$

y irányban:

$$\sum F_y = 0$$

$$(F_y - mg) = 0$$

$$F_y = mg$$

Azt is tudjuk, hogy a lérrára ható F_x súrlódási erő

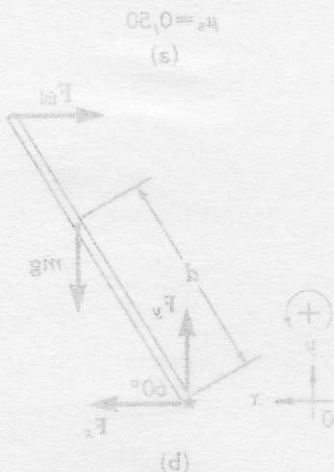
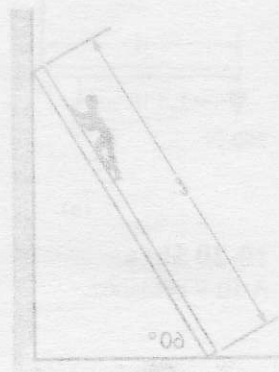
$$F_x = \mu_s F_y \quad (\text{a maximális statikus súrlódás esetén})$$

A fenti egyenletekből F_{fal} értéke kifejezhető, ezzel a (10-17) egyenlet a következő alakot ölti:

$$d = \frac{\mu_s mgl \sin\theta}{mg}$$

$$d = \mu_s l \sin\theta = (0,50)(\sin 60^\circ) = 0,866l$$

10-21 ábra.
A 10-10 példához.

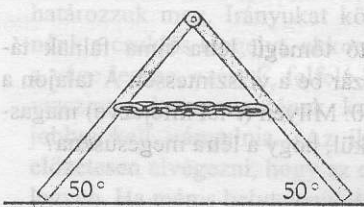


10-23 ábra

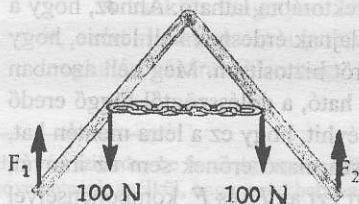
A 10-12 példához.

10-12 PÉLDA

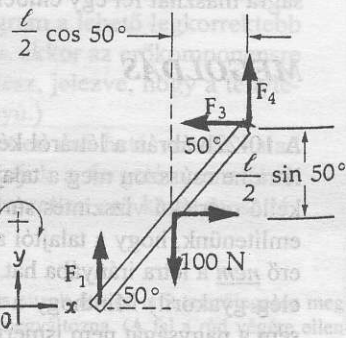
Két egyforma, 100 N súlyú deszka csuklós tengellyel csatlakozik egymáshoz, és súrlódásmentes, vízszintes felületre támaszkodik a 10-23 ábrán látható módon. A szétcsúszás megakadályozására a két deszka közepére elhanyagolható súlyú lánc van erősítve. Határozzuk meg (a) a láncban ébredő erőt, valamint (b) a csuklós tengely által a deszkákra ható erőt!



(a) Nincs súrlódás.



(b) A rendszer egészének vektorábrája.



(c) A bal oldali palló vektorábrája.

MEGOLDÁS

A talaj által az egyes deszkákra ható felfelé mutató erőt a 10-23b ábrán látható vektorokra tünteti fel. Ebben az esetben a csuklós tengelyre és a láncra ható belső erőket (mivel a testet és a környezetét elválasztó határon belül hatnak) figyelmen kívül hagyhatjuk. Szimmetria megfontolásból, és abból, hogy $\sum F_y = 0$, arra következtetünk, hogy

$$F_1 = F_2 = 100 \text{ N.}$$

A láncban ébredő erő meghatározásának céljából a láncot egy képzeletbeli „elkülönítő” határvonallal két részre osztjuk. (A több egységből álló tárgyak esetében gyakran hasznos egy vagy több egységet így „elkülöníteni”, hogy a meghatározandó erők egyetlen erődiagramban megjelenhessenek.) Ily módon a 10-23c ábrán csupán az egyik, l hosszúságú deszka erővázlatát adjuk meg. Minthogy a csuklós tengely által a deszkákra ható erő irányát nem ismerjük, azért ennek csak az F_3 -mal, illetve az F_4 -gyel jelölt x illetve y komponenseit tüntetjük fel. A forgás iránya, valamint x és y tengely pozitív iránya jelölve van. Az egyensúlyi feltételek alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ 100\text{N} - 100\text{N} + F_4 &= 0 \\ F_4 &= 0 \end{aligned}$$

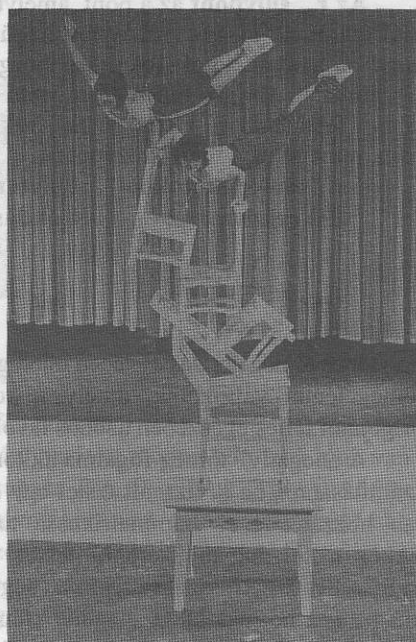
Hasonlóképpen
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ F_3 &= T \end{aligned}$$

Minthogy a csuklón ismeretlen erők haladnak át, ezért, ezt a \star pontot választjuk ki a forgatónyomatékok meghatározására, az erőkarokat a vázlat mutatja.

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} &= 0 \quad (\text{csúcsra}) \\ (100\text{N})(l \cos 50^\circ) - (100\text{N})\left(\frac{l}{2} \cos 50^\circ\right) - T\left(\frac{l}{2} \sin 50^\circ\right) &= 0 \\ 100\text{N} - 50\text{N} - \frac{T}{2} \text{tg } 50^\circ &= 0 \end{aligned}$$

vagy
$$T = \frac{100\text{N}}{\text{tg } 50^\circ} = \frac{100\text{N}}{1,1918} = 83,9\text{N.}$$

Abból hogy $F_3 = T$, a csuklós tengelyre ható erő:
 $F_3 = 83,9\text{N}$; (vízszintes, balra irányuló)



10-24 ábra

A Chongqing Akrobata Csoport tagjai. Amikor a kínai akrobaták felépítik ezt a tökéletesen kiegyensúlyozott tornyot, állandóan biztosítaniuk kell, hogy a súlyponton átmenő függőleges egyenes ne essen az asztal négy lábával meghatározott négyzetet kívül.

Összefoglalás

A \star tengelyre vonatkoztatott M forgatónyomaték definíciója:

$$M = (\text{erő}) \cdot (\text{erőkar})$$

ahol az erőkar a forgástengelytől az \mathbf{F} erő hatásvonaláig húzott merőleges távolság. Az egyik forgásirányt a \oplus vagy a \ominus jellel pozitívnak kell választani, az ellentétes irányú forgás negatív előjelű.

A \star tengelyre vonatkozó \mathbf{M} forgatónyomaték-vektor definíciója:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

azaz

$$|\mathbf{M}| = r F \sin \theta,$$

ahol θ az \mathbf{r} és az \mathbf{F} vektorok iránya által bezárt szög. Az \mathbf{M} vektor az \mathbf{r} és \mathbf{F} által meghatározott síkra merőlegesen a **jobbkez-szabálynak** megfelelő irányban áll:

Jobbkez-szabály Forgassuk át az \mathbf{r} vektort az \mathbf{F} vektorba a közöttük lévő kisebbik szög mentén! Görbítsük be jobbkezünk ujjait ebbe a forgásirányba! Kinyújtott hüvelykujjunk most \mathbf{M} irányába mutat. Az \mathbf{M} vektort a \star tengely pontjában az \mathbf{r} és \mathbf{F} vektorok síkjára merőlegesen vesszük fel.

Az r_{SP} **súlypont** az a pont, amelybe a W gravitációtól származó összes erőt egyesíthetjük abból a célból, hogy a gravitációtól származó forgatónyomatékokat kiszámítsuk. Ha g mindenütt egyenlő (mint ahogyan e könyv feladataiban feltételezzük), akkor r_{SP} ugyanaz a pont, mint az r_{TKP} tömegközéppont.

m_k **tömegpontokból álló rendszerre:** **Folytonos tömegeloszlás esetére:**

$$r_{TKP} = \frac{\sum r_k m_k}{\sum m_k} \quad r_{TKP} = \frac{\int r dm}{\int dm}$$

Folytonos tömegeloszlás esetében mindig olyan $dm = \rho dV$ tömegelemet választunk, amely a koordináta-rendszer origójától teljes egészében azonos távolságra van.

A „negatív” tömeg fogalma akkor hasznos r_{TKP} kiszámításához, ha a vizsgált testet egy szimmetrikus darab hozzátételével szimmetrikussá tudjuk változtatni. Ekkor a feladatban szereplő testet úgy kezelhetjük, mintha két testet összegeznénk: a (nagyobb) szimmetrikus testhez hozzáadjuk a „negatív” tömegű részt, amely a felesleges többlet testet a számításból kiejti.

Kérdések

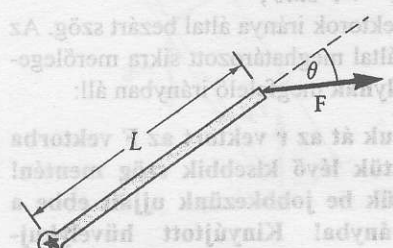
1. Keressünk egy olyan példát, amelyikben a testre ható erők összege zérus, de a test nincs statikai egyensúlyban!
2. Keressünk egy olyan példát, amelyben a test tömegközéppontjára számított forgatónyomatékok összege zérus, de a test nincs statikai egyensúlyban!
3. Egy létra a falnak támaszkodik. Egy asszony felmászik rá. Vajon mikor valószínűbb az, hogy a létra megcsúszik: amikor a legfelső fok vagy az alsó fok közelében van? Miért?

Feladatok

10.2 A forgatónyomaték

10.3 A forgatónyomaték-vektor

10.A-1 Egy három méter hosszú, egyenletes tömegeloszlású rúd az egyik végén vízszintes tengellyel van rögzítve úgy, hogy a rúd az xy síkban szabadon elfordulhat. A rúd szabad végére 16 N erő hat $\theta = 30^\circ$ szög alatt, ahogyan a 10-25 ábra mutatja. (a) Határozzuk meg az erő karját a tengelyre vonatkoztatva! (b) Mekkora forgatónyomaték hat a rúdra a tengelyben?



10-25 ábra
A 10A-1 feladathoz.

Egyensúlyi feltételek

ELSŐ FELTÉTEL	Transzlációs egyensúly	$\sum F_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = 0$
MÁSODIK FELTÉTEL	Rotációs egyensúly	$\sum M_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = 0$ (<i>tetszőleges</i> ★ tengely körül)

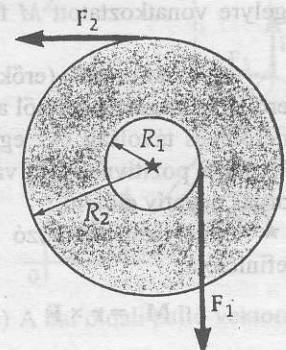
A testek egyensúlyának vizsgálatát az alábbi egységes eljárás szerint végezzük:

- (a) Vektorábrát készítünk, amelyen a testre ható összes erőt feltüntetjük. A pozitívnak választott irányokat kis nyilakkal, a pozitívnak vett forgási irányt \oplus vagy \ominus szimbólummal, azt a tengelyt, amelyikre a forgatónyomatékokat számoljuk, ★-gal jelöljük.
- (b) Alkalmazzuk a két egyensúlyi feltételt.

Gyakran előnyös a második, a $\sum M_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = 0$ feltételből kiindulni. Ha a ★ tengelyt célszerűen olyannak választjuk, hogy ismeretlen erők hatásvonala menjen át rajta, akkor ezzel elérjük, hogy a nyomatéki egyenletben a tengelyen átmenő ismeretlen erők nem szerepelnek.

4. Hogyan tudja magát egy 100 kilogrammnál nehezebb ember megmérni azon a fürdőszobai mérlegen, amelyeknek csak 95 kilogramm a méréshatára?
5. Támasszunk alá egy vízszintesen tartott méterrudat jobb- és balkezünk egy-egy ujjával! Fokozatosan közelítsük egymáshoz ujjainkat! A kezdő helyzettől függetlenül ujjaink mindig a méterrúd közepénél találkoznak. Magyarázzuk meg, miért!

10A-2 Egy fából készített orsó szabadon, elhanyagolható súrlódással foroghat vízszintesen rögzített tengely körül a 10-26 ábra szerint. A külső peremére (sugara $R_2 = 30$ cm) csavart fonál $F_2 = 4$ N erőt gyakorol rá, míg egy másik, a belső kerületre ($R_1 = 12$ cm) csavart fonál $F_1 = 12$ N erővel hat az ábrázolt módon. Az órajárásával ellentétes forgást pozitívnak választva határozzuk meg az orsóra ható, tengely körüli eredő forgatónyomatékokot!



10-26 ábra
A 10A-2 feladathoz.

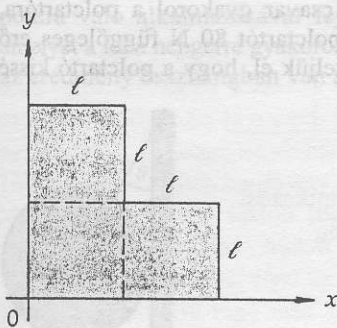
10A-3 Tekintsünk egy b oldalhosszúságú négyzetet! Minden sarkában egy F nagyságú erő hat. Az erők egy-egy oldallal párhuzamosak, és a középpont körül azonos értelmű forgást okozó forgatónyomatékokat fejtenek ki. (a) Határozzuk meg a négyzet középpontjára az eredő forgatónyomatékokat! (b) Számítsuk ki az eredő forgatónyomatékokat az egyik sarokra vonatkoztatva!

10B-4 Egy $\mathbf{F} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ (newtonban mért) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = 4\hat{x} + 5\hat{y} + 0\hat{z}$ (méterben mért) pontban támad. Határozzuk meg (a) a z tengely körüli teljes forgatónyomatékokat, (b) és az \mathbf{M} forgatónyomaték-vektor irányát!

10A-5 Mutassuk meg, hogy $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$, továbbá, hogy $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ és $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$!

10.4 A súlypont és a tömegközéppont

10A-6 Három azonos, homogén, l élhosszúságú tömör kocka „L” alakban van összeragasztva a 10-27 ábrán látható módon. Keressük meg a tömegközéppont x és y tengelyre vonatkoztatott koordinátáit!

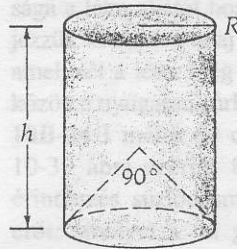


10-27 ábra

A 10A-6 feladathoz.

10A-7 Egy l hosszúságú homogén deszka végén egy ember ül. A deszka súrlódásmentes kerekeken vízszintes sínen nyugszik. A deszka és az ember tömege megegyező: m . Az ember most átsétál a deszka túlsó végére, és ott leül. Határozzuk meg azt a teljes (a talajhoz viszonyított) távolságot, amennyire a deszka a folyamat során elmozdult! (Útmutatás: megváltozik-e az ember+deszka rendszer tömegközéppontjának helyzete a folyamat során?)

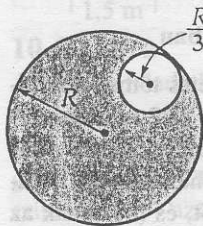
10B-8 Egy h magasságú és R sugarú acélhenger egyik végében kúpos üreg van kiesztergálva a 10-28 ábrán látható módon. A teljes kúpszög 90° . Határozzuk meg a hengeres test tömegközéppontjának helyét! (Útmutatás: használjuk fel a 10C-57 feladat eredményét és vonjuk ki a tömör kúp tömegét az eredeti kifuratlan henger tömegéből – „negatív” tömeg módszer.)



10-28 ábra

A 10B-8 feladathoz.

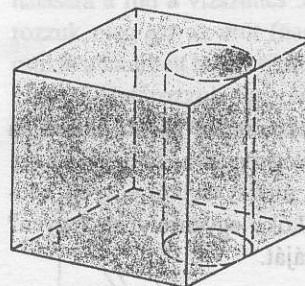
10B-9 Homogén fémlapból készített R sugarú körlepleből a 10-29 ábrán mutatott módon kör alakú lyuk van kivágva. A lyuk sugara $R/3$, és a lyuk érinti a körleple peremét. Milyen távolságra van a tömegközéppont az eredeti körleple középpontjától? (Útmutatás: Kezeljük a hiányzó anyagot úgy, mint az eredeti kivágtatlan körleplet kiegészítő „negatív tömeget”!)



10-29 ábra

A 10B-9 feladathoz.

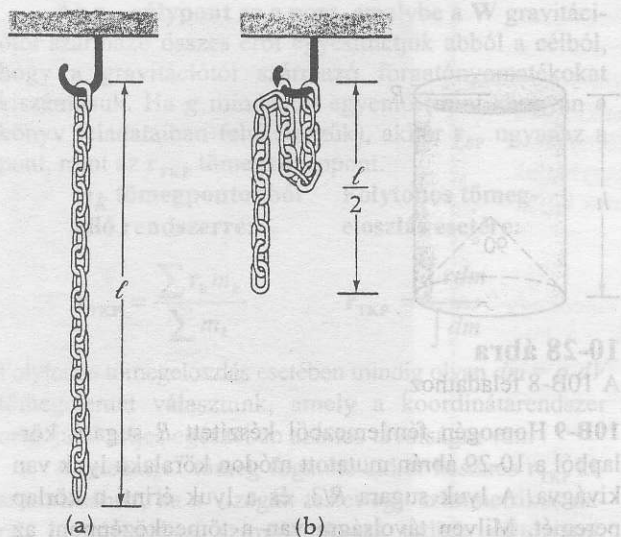
10B-10 Egy egyenletes ρ sűrűségű, b élhosszúságú kockába egy $b/4$ sugarú furatot készítünk, úgy, ahogyan a 10-30 ábra mutatja. A furat érinti az egyik kockalap szemközti oldalfelezőit összekötő egyenest. Ezután a furatot $\rho/3$ sűrűségű anyaggal töltjük ki. Határozzuk meg a test tömegközéppontját!



10-30 ábra

A 10B-10 feladathoz.

10B-11 Az m tömegű, l hosszúságú egyenletes lánc kampón lóg a 10-31a ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztásához szükséges! (Útmutatás: gondoljuk meg, mi történik a különböző láncrészek tömegközéppontjával!)

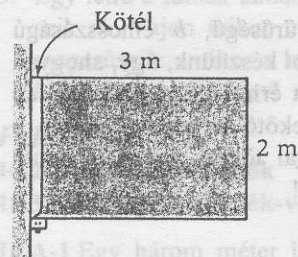


10-31 ábra

A 10B-11 és a 10C-50 feladathoz.

10.6 Merev testek statikus egyensúlyban

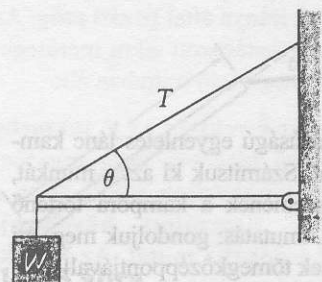
10A-12 A 10-32 ábrán látható egyenletes tömegeloszlású kapuszárny 300 N súlyú, 3 m széles és 2 m magas. A kapuszárny bal alsó sarkát egy csuklós tengely támasztja alá, bal felső sarkát vízszintes huzal tartja. Határozzuk meg (a) a huzalban ébredő erőt, és (b) annak az erőnek nagyságát és irányát, amelyet a csuklós tengely gyakorol az ajtószárnyra!



10-32 ábra

A 10A-12 feladathoz.

10A-13 Egy 25 kg-os gyermek 6 méter hosszú libikókán ül. A libikóka közepén van alátámasztva, tömege 45 kg. Milyen távol üljön a libikóka másik végétől egy 80 kilogrammos felnőtt, hogy a libikóka egyensúlyban legyen? Csatoljuk a libikóka vektorábráját.

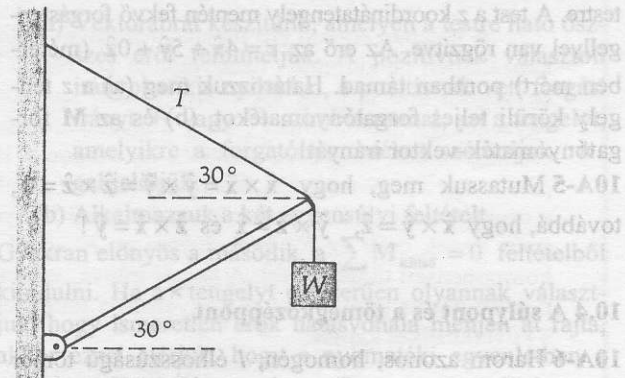


10-33 ábra

A 10A-14 és a 10B-25 feladathoz.

10A-14 A 10-33 ábrában a W teher 200 N súlyú, $\theta = 30^\circ$, és a rúd súlya elhanyagolható. Határozzuk meg (a) a kótélben ébredő feszítőerőt, (b) annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csapágtengely gyakorol a rúdra!

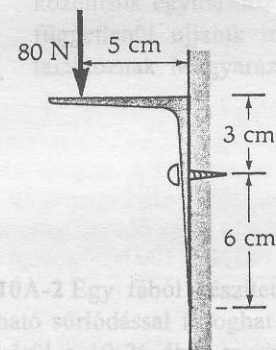
10A-15 A 10-34 ábrán a súly 200 N, és a rúd súlya elhanyagolható. Határozzuk meg (a) a kótélben ébredő erőt, (b) annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csukló gyakorol a rúdra!



10-34 ábra

A 10A-15 feladathoz.

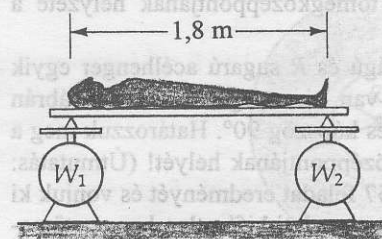
10A-16 Függőleges falra egyetlen csavarral polctartó van szerelve a 10-35 ábrán láthatóan. A polctartó súlyának elhanyagolásával számítsuk ki azt a vízszintes erőkomponenst, amelyet a csavar gyakorol a polctartóra, abban az esetben, ha a polctartót 80 N függőleges erő terheli. (Útmutatás: képzeljük el, hogy a polctartó kissé



10-35 ábra

A 10A-16 feladathoz.

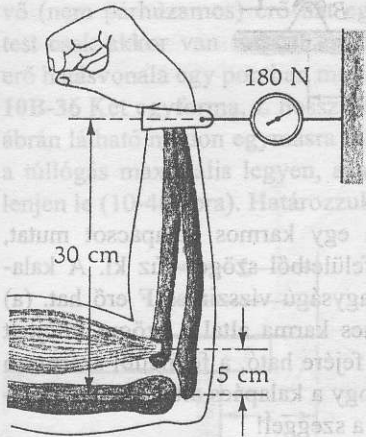
10A-17 A 10-36 ábrán a mérlegek 46 ill. 42 kg-ot mutatnak. A tartódeszka súlyát elhanyagolva számítsuk ki, hogy hol van a deszkán fekvő ember tömegközéppontja a lábától mérve!



10-36 ábra

A 10A-17 feladathoz.

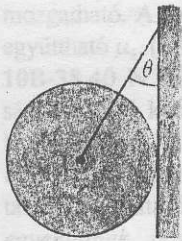
10A-18 Egy ember 180 N vízszintes irányú erőt gyakorol a 10-37 ábrán látható eszközre. Számítsuk ki azt a vízszintes erőt, amelyet az ember bicepsz izma fejt ki az alkarra! Az alkart egyetlen rúdnak képzelve készítsünk vektorábrát, amelyen minden erővektor végpontja az erő támadáspontjába van berajzolva!



10-37 ábra

A 10A-18 feladathoz.

10A-19 Egy m tömegű homogén henger két huzallal úgy van felfüggesztve, hogy sima függőleges falhoz támaszkodik (10-38 ábra). A huzalok a fallal θ szöget zárnak be. (a) A $\sum M = 0$ feltételnek a felfüggesztési pontra való alkalmazásával fejezzük ki azt az N erőt, amelyet a fal a hengerre gyakorol. (b) Mutassuk meg, hogy az eredmény összhangban van a $\sum F = 0$ feltétellel.



10-38 ábra

A 10A-19 feladathoz.

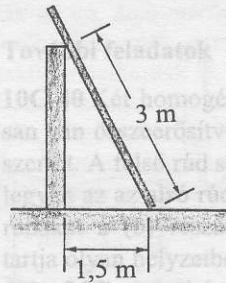
10A-20 Egy m tömegű gömb nyugszik egy sarokban, amelyet egy függőleges fal és egy, a vízszinteshez θ szög alatt hajló síklemez képez. Minden felület sima. Számítsuk ki azokat az erőket, amelyeket a fal és a lemez a gömbre gyakorol!

10B-21 Egy l hosszúságú létra sima falnak támaszkodik a vízszinteshez θ szög alatt dőlve. Egy ember a létrán olyan magasra mászik, hogy a legfelső foktól $l/4$ távolságra van és akkor a létra elkezd csúszni. Mutassuk meg, hogy a létra és a talaj közötti nyugalmi súrlódási együttható $3/4(\tan\theta)$! A létra súlya az ember súlyához viszonyítva elhanyagolható.

10B-22 Egy 90 kilogrammos ember egy létra kétharmad magasságáig mászik fel. A létra falnak támaszkodik, a fallal 20° -os szöget bezárva. A létra súlyának elhanyagolásával határozzuk meg (a) azt az erőt, amelyet a fal a létrára gyakorol, valamint (b) annak az erőnek nagyságát és irányát, amellyel a talaj hat a létrára!

10B-23 Egy egyenetlen tömegeloszlású létra sima függőleges falnak támaszkodik. Tömegközéppontjának a távolsága a létra aljától hosszának f -szerese, ahol $0 < f < 1$. Fejezzük ki azt – a talaj és a létra közötti – legkisebb szöveget, amelynél a létra még nem csúszik meg! A talaj és a létra között a nyugalmi súrlódási együttható μ_s .

10B-24 3 méter 60 centiméter hosszú, 10 kg-os létra a 10-39 ábra szerint falnak támaszkodik. A fal élén az érintkezés súrlódásmentes. Határozzuk meg (a) azt az erőt, amelyet a fal gyakorol a létrára, (b) azt az erőt, amelyet a talaj gyakorol a létrára! (Adjuk meg mindkét erő nagyságát és irányát!)



10-39 ábra

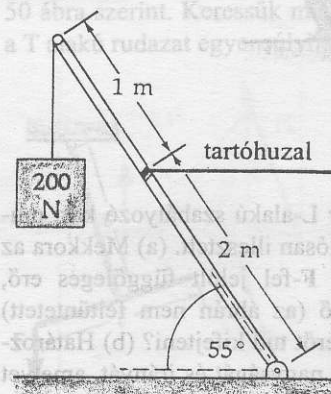
A 10B-24 feladathoz.

10B-25 A 10-33 ábrán $W = 370$ N, $\theta = 35^\circ$, és a homogén rúd súlya 420 N. Határozzuk meg (a) a huzalt feszítő erőt, (b) azt az eredő erőt (nagyságát és irányát), amelyet a csuklós tengely gyakorol a rúdra!

10B-26 Egy 3 m hosszú homogén palló sima falnak támaszkodik, másik vége vízszintes talajon nyugszik. A talaj és a palló között a nyugalmi súrlódási együttható 0,4. Határozzuk meg, hogy mekkora távolságra mozdíthatjuk el a palló alsó végét a faltól anélkül, hogy megcsúszna!

10B-27 Egy 300 N súlyú homogén rúd felső vége a mennyezetre erősített csuklón lóg. (a) Határozzuk meg a rúd alsó végére alkalmazandó vízszintes irányú erőt, amelynek hatására a rúd a vízszintes 35° -os szöveget zár be. (b) Határozzuk meg azt az erőt (nagyságát és irányát), amelyet a csukló a kitérített helyzetű rúdra gyakorol!

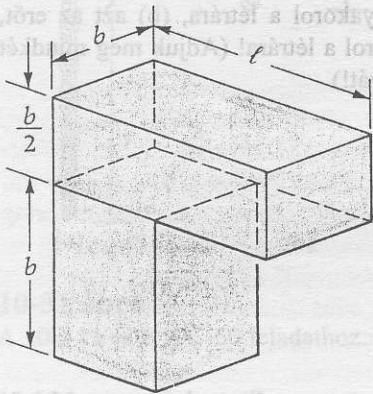
10B-28 Határozzuk meg, hogy mekkora erő feszíti a 10-40 ábrán látható vízszintes tartóhuzalt, valamint annak



10-40 ábra

A 10B-28 feladathoz

az erőnek nagyságát és irányát, amelyet a csukló a rúd alsó végére gyakorol! A rúd súlyát hanyagoljuk el!
10B-29 Két, azonos anyagból készült tömör tömb a 10-41 ábrán látható módon van összeragasztva. Az egyik tömb b élhosszúságú kocka, a másik $b \times b/2 \times l$ méretű derékszögű hasáb. Fejezzük ki b függvényében azt a legnagyobb l hosszúságot, amelynél az együttes még nem billen fel!

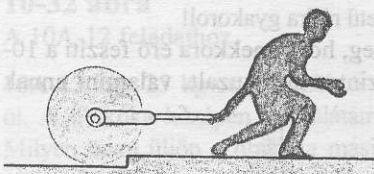


10-41 ábra

A 10B-29 feladathoz.

10B-30 A 10-34 ábrán látható teher 200 N súlyú, a homogén rúd súlya 100 N. Határozzuk meg (a) a húzó feszítő T erőt, és annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csuklós gyakorol a rúdra!

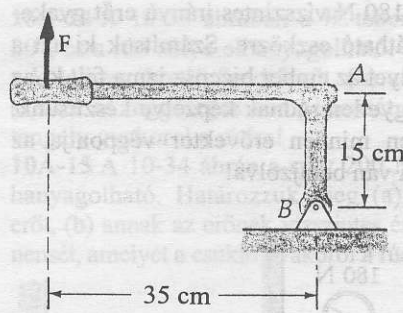
10B-31 A 10-42 ábrán a fiú egy 70 kg tömegű gyeplőhengert próbál egy 6 cm magas járdaszegélyen áthúzni. A henger sugara 30 cm. Mekkora az a legkisebb erő, ami ehhez szükséges? (Útmutatás: tekintsük azt a helyzetet, amidőn a henger a talajról éppen felemelkedve a járdaszegély sarkán nyugszik. A henger ebben a pozícióban az erő egy bizonyos kritikus értéke esetén marad meg, minden ennél nagyobb erő a henger átgördülését okozza.)



10-42 ábra

A 10B-31 feladathoz.

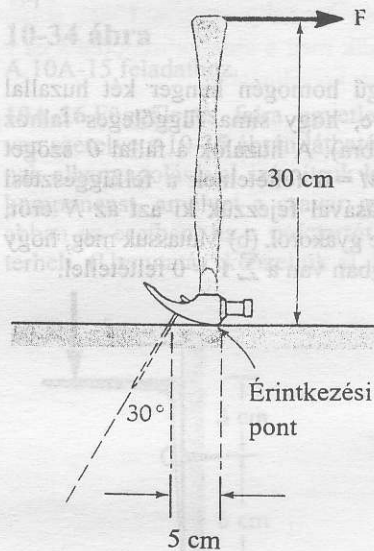
10B-32 A 10-43 ábra egy L-alakú szabályozó kart mutat, ami a B pontban csuklósan illesztett. (a) Mekkora az a fogantyúra merőleges, F -fel jelölt függőleges erő, amely az A pontban lévő (az ábrán nem feltüntetett) tárgyra 150 N vízszintes erőt tud kifejteni? (b) Határozzuk meg annak az erőnek nagyságát és irányát, amelyet ekkor a csuklós tengely a B pontban a szabályozó karra kifejti!



10-43 ábra

A 10B-32 feladathoz.

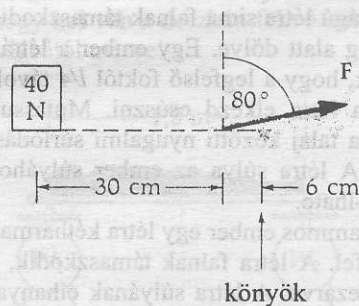
10B-33 A 10-44 ábra egy karmos kalapácsot mutat, amint egy vízszintes felületből szöveget húz ki. A kalapács nyelére 200 N nagyságú vízszintes F erő hat. (a) Számítsuk ki a kalapács karma által a szögre kifejtett erőt, és (b) a kalapács fejére ható, a felülettől származó erőt! Tételezzük fel, hogy a kalapács által a szögre gyakorolt erő párhuzamos a szeggel!



10-44 ábra

A 10B-33 feladathoz.

10B-34 Egy 40 N súlyú tárgyat kinyújtott vízszintes alkarral karhossznyira tartunk. Hivatkozással a 10-45 ábrára, határozzuk meg azt, az ábrán F -fel jelölt erőt, amelyet a felkar izom fejt ki! Tegyük fel, hogy a kéz és



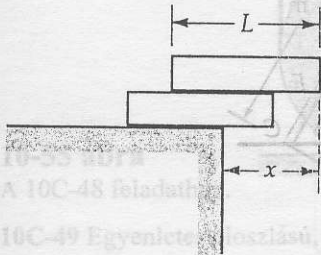
10-45 ábra

A 10B-34 feladathoz.

az alkar együttes tömege 1,5 kg és, hogy ezek tömegközéppontja a könyök és a tárgy közötti távolság felezőpontjában van! Készítsünk az alkart rúdként ábrázoló vektorábrát, amelyen az erővektorok vége az erők támadáspontjába van rajzolva!

10B-35 Mutassuk meg, hogy ha három, egy síkban fekvő (nem párhuzamos) erő hat egy merev testre, úgy a test csak akkor van forgási egyensúlyban, ha a három erő hatásvonalára egy pontban metszi egymást!

10B-36 Két egyforma, L hosszúságú homogén téglát az ábrán látható módon egymásra rakunk oly módon, hogy a túllógás maximális legyen, azaz a rakás még ne biltenjen le (10-46 ábra). Határozzuk meg az x távolságot!

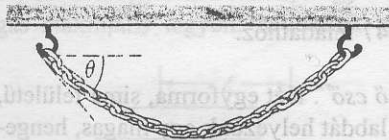


10-46 ábra

A 10B-36 feladathoz.

10B-37 Egy ember seprőt tol a padlón, miközben a seprőnyél irányában lefelé mutató erőt fejt ki. Határozzuk meg azt a (seprőnyél és a függőleges irány által bezárt) legkisebb θ szöveget, amely mellett a seprő állandó sebességgel mozgatható. A padló és a seprő között a csúszási súrlódási együttható μ_k . (A seprő súlyát hanyagoljuk el.)

10B-38 40 N súlyú hajlékony lánc két azonos magasságban lévő kampó között lóg (10-47 ábra). Mindkét kampónál a láncot húzott érintő a vízszintessel $\theta = 42^\circ$ szöveget zár be. (Azt az egyenletet, amely gravitációs erő hatására lógó lánc görbáját leírja, *láncgörbe egyenletnek* nevezzük. A feladat megoldásához az egyenlet ismerete nem szükséges.) (a) Határozzuk meg a kampó által a láncra gyakorolt erő nagyságát! (b) Határozzuk meg a láncot feszítő erőt a lánc középpontjában! [Javaslat a (b) részfeladathoz: készítsünk vektorábrát a lánc feléről!]

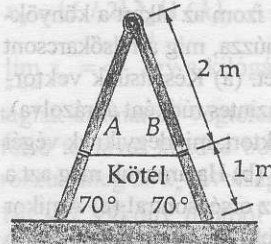


10-47 ábra

A 10B-38 feladathoz.

10B-39 Két egyforma, egyenként 60N súlyú palló egy-egy végén csuklós tengellyel csatlakozik egymáshoz. (10-48 ábra.) Sima vízszintes felületen állnak, és szétcsúszásukat az ábrázolt vízszintes huzal akadályozza. Határozzuk meg azt az N_A és N_B normális irányú erőt, amelyet a talaj fejt ki a pallókra! (b) Határozzuk meg a

huzalban ébredő T feszítőerőt! [Javaslat a (b) részfeladathoz: készítsünk vektorábrát csak az egyik pallóról!]

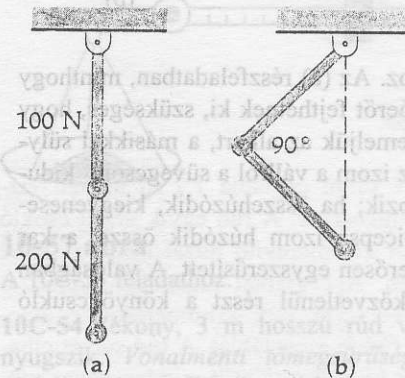


10-48 ábra

A 10B-39 feladathoz.

További feladatok

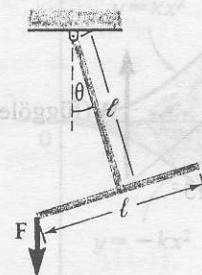
10C-40 Két homogén, egyenlő hosszúságú rúd csuklósan van összeerősítve és függőlegesen lóg a 10-49 ábra szerint. A felső rúd súlya 100 N, az alsóé 200 N. Milyen legyen az az alsó rúd végére ható egyetlen erő, amely a rudakat a (b) részábrán látható módon nyugalomban tartja olyan helyzetben, midőn a rúd alsó vége közvetlenül a felfüggesztési pont alatt van?



10-49 ábra

A 10C-40 feladathoz.

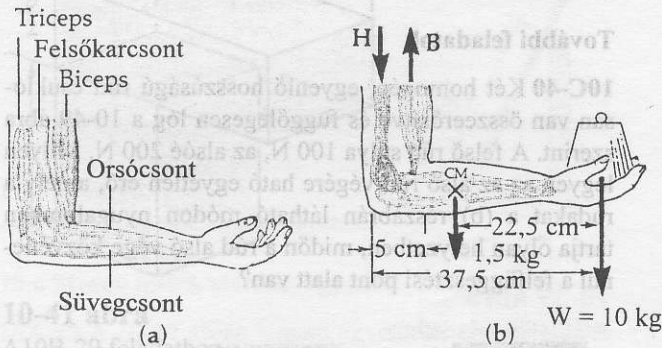
10C-41 Két homogén, vékony rúd T alakban van összehegesztve. Mindkét rúd hossza l , tömege m . A T alakú rudazat egyik végét csukló tartja, míg a másik végét függőlegesen lefelé irányuló $F = 2mg$ erő terheli a 10-50 ábra szerint. Keressük meg azt a θ szöveget, amelynél a T alakú rudazat egyensúlyban van!



10-50 ábra

A 10C-41 feladathoz.

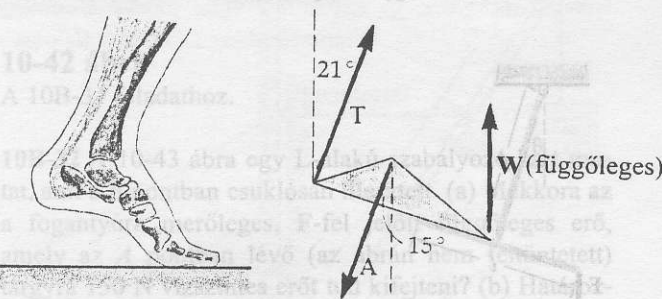
10C-42 A 10-51b ábrán egy ember vízszintes alkarral 10 kg-os terhet tart. Az alkar 1,5 kg-os, tömegközéppontjának helyét az ábra mutatja. A bicepsz izom az alkart a könyöktől 5 cm-re függőlegesen felfelé húzza, míg a felsőkarcsont H erővel lefelé nyomja az ízületet. (a) Készítsünk vektorábrát az alkarról (egyszerűen vízszintes rúdként ábrázolva), tüntessük fel rajta az összes erővektort, mindegyiknek végét az erő támadáspontjába helyezve! (b) Határozzuk meg azt a B erőt, amelyet a bicepsz fejt ki az orsócsontra! (c) Amikor a kéz a terhet tartja, akkor a felsőkarcsont kompresszió (összenyomás) alatt van. Határozzuk meg azt a H erőt, amelyet a felsőkarcsont a könyökizületre gyakorol!



10-51 ábra

A 10C-42 feladathoz. Az (a) részfeladatban, minthogy az izmok csak húzóerőt fejthetnek ki, szükséges, hogy az egyik izommal emeljük az alkart, a másikkal súlylyesszük. A tricepsz izom a vállról a süvegcsont kidudorodására csatlakozik; ha összehúzódik, kiegyenesedik a kar. Ha a bicepsz izom húzódik össze, a kar behajlik. (Az ábra erősen egyszerűsített. A valóságban nyolc izom vesz közvetlenül részt a könyökcsukló működtetésében.)

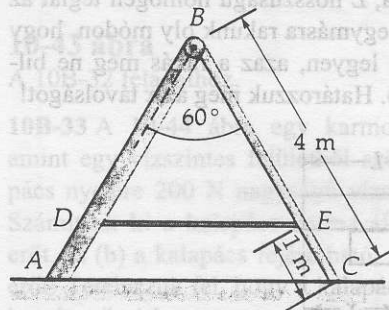
10C-43 A lábujjhegyre állás – amint ezt a 10-52 ábra mutatja – tekintélyes T húzóerőt létesít a sarokcsontoz csatlakozó Achillesz ínban. A lábfejre ható három erő (T , A , és W) egyensúlyban van; vagyis összegük zérus. Tehát az erők grafikus összegezése zárt háromszöget eredményez. Határozzuk meg azt a T feszítőerőt, amely az ínban ébred, ha egy 90 kg-os ember ily módon egy lábujjhegyre áll! (Útmutatás: lásd az általános háromszögre vonatkozó D függelékét!)



10-52 ábra

A 10C-43 feladathoz.

10C-44 A 10-53 ábrán bemutatott lépcsős létra mindkét szára 4 m hosszú, és csuklója a B pontban van. A létra súrlódásmentes vízszintes talajon áll, szétcsúszását az ábrázolt módon felerősített DE huzal akadályozza. Mindkét szár tömegközéppontja a szár közepében van. Az AB szár súlya 80 N, a BC száré 40 N. Határozzuk meg a létra aljára ható, talajtól származó erőt (a) az A pontban és (b) a C pontban! (c) Határozzuk meg a huzalban ébredő T erőt!

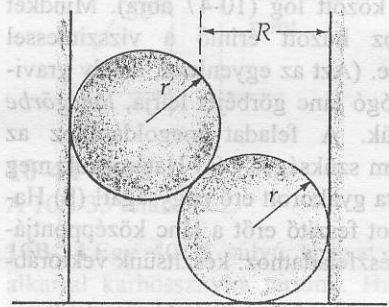


10-53 ábra

A 10C-44 feladathoz.

10C-45 Bizonyítsuk be a következő állítás helyességét: Ha egy test translációs egyensúlyban van, akkor a testre ható forgatónyomatékok eredője bármely pontra vonatkoztatva azonos.

10C-46 R belső sugarú hengerbe két egyforma, homogén gömböt helyezünk a 10-54 ábrán látható módon. A gömbök r sugara az $(R/2) < r < R$ tartományba esik. Minden felület sima. Készítsünk vektorábrát az alsó gömbről, jelöljük be minden erő nagyságát a gömbök W súlyának és az r , R sugarak függvényében!



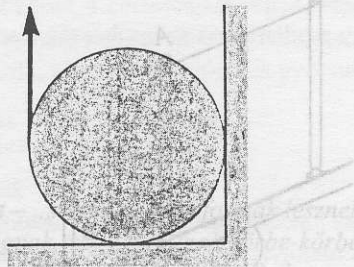
10-54 ábra

A 10C-46 és a 10C-47 feladathoz.

10C-47 A „felbillenő cső”. Két egyforma, sima felületű, m tömegű, r sugarú labdát helyezünk egy magas, hengeres, R sugarú csőbe, (lásd a 10-54 ábrát). [Megjegyezzük, hogy $(R/2) < r < R$.] A cső függőlegesen áll. Úgy hihetnénk, hogy ha a csövet rövidítjük és így súlypontját süllyesztjük, akkor az egység stabilabb egyensúlyi helyzetbe kerül. Azonban, ha a henger magasságát egy kritikus érték alá csökkentjük, akkor a cső felbillen! Mutassuk meg, hogy a henger akkor marad meg álló helyzetben, ha tömege legalább $M = 2m(1-r/R)$! (Útmutatás: próbáljuk a forgatónyomatékot kiszámítani a két

gömb érintkezési pontjára, amikor a cső éppen a felbillenés határán van.)

10C-48 A 10-55 ábra egy W súlyú homogén hengerre függőleges érintő irányában ható F erőt mutat. A henger és a felületek között a nyugalmi súrlódási együttható 0,50. Fejezzük ki W függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását! (Útmutatás: Ha a henger éppen a csúszás határán van, akkor *mindkét* súrlódási erő maximális értéket vesz fel. Miért?)



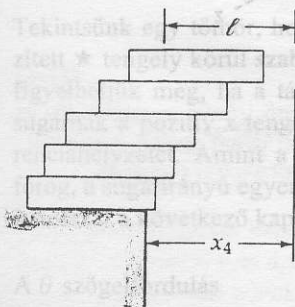
10-55 ábra

A 10C-48 feladathoz.

10C-49 Egyenletes eloszlású, 74 cm magas asztal nyugszik a talajon. 1,2 m átmérőjű kör alakú lapja és három, szimmetrikusan elhelyezett, az asztallap szélétől 10 cm-rel beljebb lévő lába van. Az asztal és a lábak együttes súlya 60 N. (a) Határozzuk meg azt a legkisebb függőlegesen felfelé irányuló erőt, amely úgy hat az asztal szélén, hogy az kissé megbillen! (b) Mekkora az asztal szélére függőlegesen lefelé ható minimális erő, amely az asztalt megbillenti? (c) Mekkora, és milyen irányú az asztal szélére gyakorolt legkisebb erő ami az asztal megbillenését okozza? Mindegyik esetben tüntessük fel vázlaton az erők támadáspontjának az asztallábakhoz viszonyított helyét!

10C-50 Homogén, m tömegű, l hosszúságú lánc lóg le egy kampóról, a korábban már bemutatott 10-31 ábra szerint. (a) Fejezzük ki az y távolság függvényében azt az $F(y)$ erőt, amely a középső láncszem kampóra emeléséhez szükséges! (b) Igazoljuk $\int F \cdot dy$ kiszámításával, hogy a végzett munka megegyezik a különböző láncrészek tömegközéppontjának gravitációs energianyeresésével! (10B-11 feladat).

10C-51 Tekintsünk öt azonos téglát a 10-56 ábra szerint oly módon egymásra rakva, hogy a borulásmentes kilógás maximális legyen! Mutassuk meg, hogy n számú



10-56 ábra

A 10C-51 feladathoz.

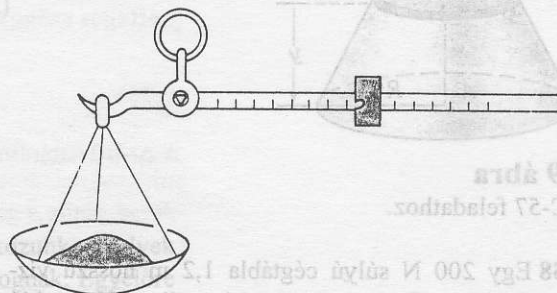
tégla esetében az x_n távolságra felírható, hogy:

$$x_n = (L/2) \sum_{k=1}^n (1/k).$$

A sorozat lassan divergál; azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Így a kilógási távolság a végtelenhez tart a téglák számának végtelen növelésével! (Javaslat: a legfelső téglával kezdve bontsuk le a rakást, és úgy határozzuk meg az x_n távolságot!)

10C-52 Vékony drótból készített R sugarú gyűrű egy-negyedét kivágják. Határozzuk meg a megmaradt rész tömegközéppontját R függvényében!

10C-53 Századokon át a kereskedők világszerte használták az ún. *kofa-mérleget*. (10-57 ábra.) Az árut a serpenyőbe helyezték, a mutatóval ellátott csúsztatható testet addig mozdították el, amíg a rúd vízszintes helyzetű lett. Ezután a rúdra gravírozott skáláról leolvasták az áru súlyát. Mutassuk meg, hogy a rúdra gravírozott skálának az áru súlyával lineárisan kell változnia! Ne feledkezzünk el arról, hogy a rúd és a serpenyő súlya állandó.

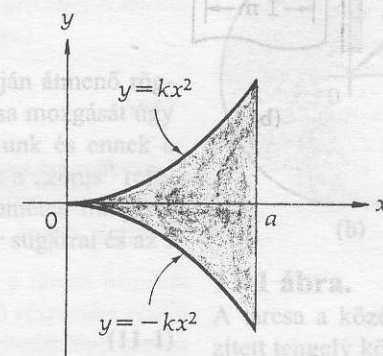


10-57 ábra

A 10C-53 feladathoz.

10C-54 Vékony, 3 m hosszú rúd vízszintes felületen nyugszik. *Vonalmenti tömegsűrűsége* (tömeg/hosszúság) lineárisan változik a rúd hossza mentén: egyik végén zérus, a másik végén 50 kg/m. (a) Határozzuk meg a rúd tömegét! (b) Mekkora munkával lehet a rúd nehezebb végét 1,5 méterrel függőlegesen feljebb emelni úgy, hogy a másik vége a felületen maradjon?

10C-55 Egyenletes vastagságú vékony fémlemezből az $x = a$ és az $y = \pm kx^2$ görbékkel határolt idom készült. (10-58 ábra.) Határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit!

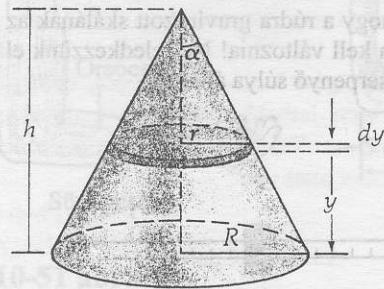


10-58 ábra

A 10C-55 feladathoz.

10C-56 Vékony, egyenletes vastagságú fémllemezből R sugarú körlemezelt vágtak ki, majd az átmérője mentén kettévágták. Határozzuk meg az egyik darab tömegközéppontját! (Javaslat: Válasszuk dm elemi tömegnek az egyenes oldallal párhuzamos sávot.)

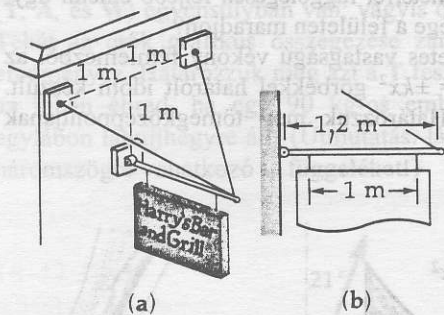
10C-57 Mutassuk meg, hogy az R alapkör-sugarú, h magasságú, állandó ρ sűrűségű egyenes kúp tömegközéppontja a szimmetria-tengelyen, az alaptól $h/4$ távolságra van! [Javaslat: tekintsük a 10-59 ábrán látható az alaptól y távolságra lévő dy vastagságú, tárcsát, mint elemi tömeget, amelyre $dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dy$, ahol $r = (h - y) \tan \alpha = (h - y)(R/h)$.]



10-59 ábra

A 10C-57 feladathoz.

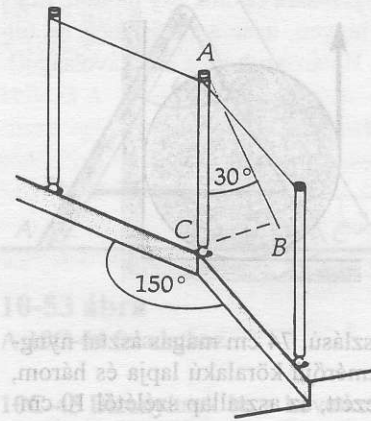
10C-58 Egy 200 N súlyú cégtábla 1,2 m hosszú vízszintes rúdra van függesztve. A rúd egyik végét csukló rögzíti, másik végét két merevítő huzal tartja a 10-60 ábrán vázolt módon. A cégtáblát függesztő két huzal egymástól 1 m távolságra van, szimmetrikusan elhelyezve a vízszintes rúdon a cégtáblát. A rúd súlyát elhanyagolva számítsuk ki a feszítő erőt minden egyes merevítő huzalban.



10-60 ábra

A 10C-58 feladathoz.

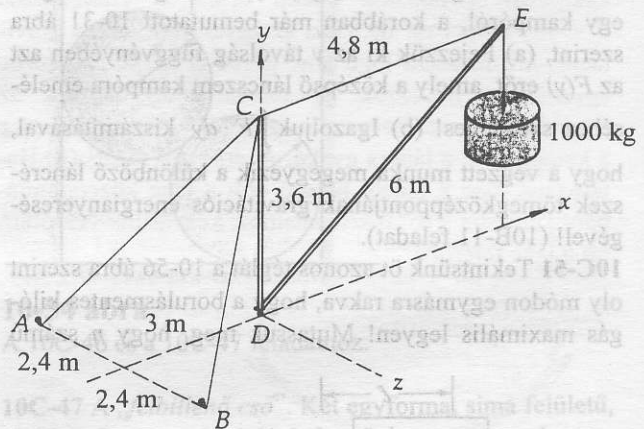
10C-59 Villanyvezeték húzódik egy 30° -os útkanyar fölött. A vezetéket az út töréspontjában egy függőleges AC pózna tartja, amelynek alsó vége gömbcsuklón nyugszik. Az A pontban a póznához erősített vezetékek vízszintesek. A pózna feldőlésének megakadályozására az AB feszítőhuzal szolgál, amelyet a 10-61 ábrán látható módon szimmetrikusan, a póznához 30° -os szögben illesztve helyeztek el (tehát a BC egyenes felezi a 150° -os szöget). Ha a vezetékeket T erő feszíti, mekkora a feszítőhuzalban ébredő erő?



10-61 ábra

A 10C-59 feladathoz.

10C-60 A 10-62 ábrában a függőleges CD árbocot és a DE rudat a D pontban rögzített gömbcsukló tartja. Az árboc és a rúd súlyának elhanyagolásával számítsuk ki külön-külön a szimmetrikusan elhelyezett AC és BC kábeleket feszítő erőt! (A rúd és a vízszintes CE kábel a függőleges xy síkban vannak.)



10-62 ábra

A 10C-60 feladathoz.