Valószínűségszámítás vizsgadolgozat

Mérnök informatikus szak

2010. január 22.

Megoldás

1. Jelölje X a kör sugarát. $X \in U(0,1)$.
   $F_X(x) = x$, ha $x \in (0,1)$ (1 pont)
   A terület $T = \pi X^2$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbf{P}(T < t) = \mathbf{P}\left(\pi X^2 < t\right) && \text{(1 pont)} \\ &= \mathbf{P}\left(X < \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) && \text{(1 pont)} \\ &= \sqrt{\frac{t}{\pi}} \end{aligned}$$

   $f_T(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$ (1-1 pont)
   ha $0 < t < \pi$ különben 0. (1 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}\left(\pi X^2\right) = \pi \mathbf{E}\left(X^2\right) = \pi\left(\boldsymbol{\sigma^2} X + (\mathbf{E}X)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= \pi\left(\frac{(1-0)^2}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

   /**vagy** a várható értékre másképp $\mathbf{E}(T) = \int t f_T(t)dt$ (2 pont) = ... (2 pont)/

2. Definiáljuk a következő eseményeket:
   A: az a ágban megy áram, B: az b ágban megy áram, C: az c ágban megy áram, D: az d ágban megy áram, E: az e ágban megy áram
   Ezek független, $\frac{1}{2}$ valószínűségű események. (1 pont)
   Az izzó akkor világít, ha az AC, BD, BEC, ill. AED események közül legalább az egyik teljesül. (1 pont)
   Ennek valószínűsége $\mathbf{P}(AC + BD + BEC + AED)$ (1 pont)
   Ezt a Poincare-formula segítségével számolhatjuk ki:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(AC+BD+BEC+AED) &= \mathbf{P}(AC)+\mathbf{P}(BD)+\mathbf{P}(BEC)+\mathbf{P}(AED) \\
&\quad -\mathbf{P}(ACBD)-\mathbf{P}(ACBE)-\mathbf{P}(ACED) \\
&\quad -\mathbf{P}(BDEC)-\mathbf{P}(BDAE)-\mathbf{P}(BECAD) \\
&\quad +\mathbf{P}(ABCDE)+\mathbf{P}(ABCDE)+\mathbf{P}(ABCDE)
\end{aligned}
$$

$+\mathbf{P}(ABCDE)-\mathbf{P}(ABCDE)$

(3 pont)

Mivel egy esemény önmagával vett szorzata saját maga.

Az A, B, C, D, E események függetlenek, így a belőlük képzett szorzatesemények valószínűsége a valószínűségek szorzata. (2 pont)

$\mathbf{P}(AC+BD+BEC+AED) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5$ (1 pont)

$= \frac{1}{2}$ (1 pont)

3. Mivel független Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson-eloszlású és a paramétere az eredeti paraméterek összege, (3 pont)

   $X+Y \in Po(9)$ (1 pont)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y\le 2) &= \mathbf{P}(X+Y=2)+\mathbf{P}(X+Y=1)+\mathbf{P}(X+Y=0) \quad \text{(1 pont)} \\
&= e^{-9}\left(1+9+\frac{81}{2}\right) \quad \text{(2 pont)} \\
&= 50,5\cdot e^{-9}
\end{aligned}
$$

   Mivel X és Y független, ezért $5X$ és $-3Y$ független. (1 pont)

   Független valószínűségi változók korrelációs együtthatója 0,

   $R(5X, -3Y) = 0.$ (2 pont)

4. A keresett valószínűség az $x = \frac{1}{2}$, az $y = 0$ és az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesek által határolt háromszög valószínűsége: (1 pont)

$$
\begin{aligned}
p &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{3}{2}y^2\,dy\,dx \quad \text{(3 pont)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{y^3}{2}\right]_{-\frac{1}{2}x}^{0}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{16}dx = \frac{1}{1024} \quad \text{(2 pont)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad \text{(1 pont)} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}y^2 dy \qquad \text{(1 pont)} \\
&= 1 \qquad \text{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{2}y^2 dx = \frac{3}{2}y^2$ (1 pont)

5. A ϑ paraméter egy T becslése torzítatlan, ha $\mathbf{E}(T) = \vartheta$. (1 pont)
   Mivel $X_1^* = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, ezért
   $F_{X_1^*}(t) = 1 - (1 - F_{X_i}(t))^n$ (2 pont)

$$
\begin{aligned}
F_{X_i}(t) &= \int f_{X_i}(x)dx = \int_{\vartheta}^{t} e^{\vartheta - x}dx \qquad \text{(2 pont)} \\
&= \int_0^{t-\vartheta} e^{-y}dy = 1 - e^{\vartheta - t} \qquad \text{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

   Tehát $F_{X_1^*}(t) = 1 - e^{n(\vartheta - t)}$
   Deriválva: $f_{X_1^*}(t) = ne^{n(\vartheta - t)}$ (1 pont)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1^*) &= \int_{\vartheta}^{\infty} t f_{X_1^*}(t)dt = \int_{\vartheta}^{\infty} tne^{n(\vartheta - t)}dt \\
&= \left[-te^{n(\vartheta - t)}\right]_{\vartheta}^{\infty} + \int_{\vartheta}^{\infty} e^{n(\vartheta - t)}dt \\
&= \vartheta + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

   (2 pont)
   $\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(X_1^*) - \frac{1}{n} = \vartheta$, tehát T_1 torzítatlan. (1 pont)

6. Adja meg a p paraméterű geometriai eloszlást! (2 pont)
   Mit jelent az örökifjú tulajdonság? (3 pont)
   Bizonyítsa be, hogy a geometriai eloszlás rendelkezik ezzel a tulajdonsággal! (5 pont)