

1. fejezet

A modulált jelek általános leírása

1.1. A modulált jelek vektortérbeli leírása

Legyen a forrás által előállított szimbólumok sorozata $\{\xi_{k_i}\}$, amelyre igaz, hogy minden eleme egy M értékészletű ábécéből veszi fel az értékeit, azaz $k_i \in \{1, \dots, k, \dots, M\}$, és az i index az időbeli sorrendet jelöli. (Ha az eredeti forrás L értékészletű szimbólumsorozatot állít elő, és azokból K darabot összefogva állítjuk elő a ξ szimbólumokat, akkor $M = L^K$.) Jelöljük a szimbólumidőt T -vel, így módon az i -edik időrésben a ξ_{k_i} szimbólumot vesszük át, azaz, ha $k_i = h$, akkor a h -adik szimbólumot.

A $\{\xi_{k_i}\}$ szimbólumsorozat átviteléhez időben folytonos függvényeket használunk, ezeket $\{x_{k_i}(t)\}$ -vel jelöljük. A moduláció tehát egyszerű leképezés, miszerint a ξ_{k_i} szimbólumhoz az $x_{k_i}(t - iT)$ időben eltolts elemi jelet rendeljük hozzá.

Tételezzük fel, hogy az elemi jel csak a $[0, T)$ tartományban különbözik nullától, azaz

$$x_k(t) = \begin{cases} \text{tetszőleges,} & t \in [0, T) \\ 0, & t \notin [0, T) \end{cases},$$

vagyis az elemi jelek tartója a $[0, T)$ tartomány. (Természetesen ez a megkötés nem teljesül általában, de a tárgyalás egyszerűsítése érdekében célszerű bevezetni, így módon ugyanis az egyes időrészekben a jelek függetlenül kezelhetők, épp ezért a továbbiakban az i időindexet elhagyva csak ξ_k és $x_k(t)$ jelöléseket alkalmazunk.)

Vezessük be a $\{\varphi_j(t)\}$ ortonormált bázist az alábbi tulajdonságokkal:

- $\varphi_j(t)$ tartója a $[0, T)$ tartomány, $j = 1, \dots, N$;
- a skaláris szorzat

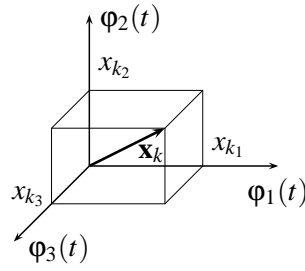
$$\langle \varphi_j(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

- a $\{\varphi_j(t)\}$ bázis teljes az $\{x_k(t)\}$ elemi jelekre, ami annyit jelent, hogy érvényesek az egyenletek

$$\left. \begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{j=1}^N x_{k_j} \varphi_j(t) \\ x_{k_j} &= \int_0^T x_k(t) \varphi_j(t) dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{általánosított} \\ \text{Fourier-sorfejtés} \end{array}$$

Megjegyzendő, hogy az ortonormáltság az ún. Gram–Schmidt-ortogonalizálással mindig biztosítható, azaz:

1. $x_1(t) \stackrel{!}{=} a \varphi_1(t)$



1.1. ábra. Jelek vektoros ábrázolása

$$\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{a}, \int_0^T \varphi_1^2(t) dt = 1 = \frac{1}{a^2} \int_0^T x_1^2(t) dt$$

$$a^2 = \int_0^T x_1^2(t) dt$$

$$2. x_2(t) \stackrel{!}{=} b\varphi_1(t) + c\varphi_2(t)$$

$\int_0^T x_2(t)\varphi_1(t) dt = b$, így $x_2(t) - b\varphi_1(t) = c\varphi_2(t)$, ahol a bal oldal ismert, tehát $\varphi_2(t)$ és c az 1. pontbeli eljárással meghatározható.

3. Ezután az eljárás folytatható.

Mindebből nyilvánvaló, hogy a teljes tér dimenziója $N \leq M$, ahol N az ortonormált bázis elemeinek a száma, M az elemi jelek (üzenetek) száma.

A jelek tehát kétféle módon ábrázolhatók:

- a) $x_k(t)$ időfüggvényekkel;
- b) $\mathbf{x}_k = \{x_{k1}, \dots, x_{kj}, \dots, x_{kN}\}$ vektorokkal;
- c) Illusztráció: 1.1. ábra ($N = 3$).

A jel energiájának kiszámítása:

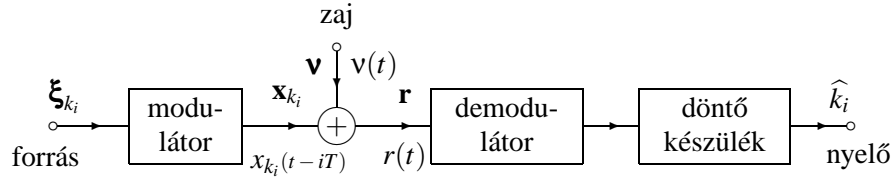
$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^T x_k^2(t) dt = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x_{kj} \varphi_j(t) \right) \left(\sum_{l=1}^N x_{kl} \varphi_l(t) \right) dt = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N x_{kj} x_{kl} \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_l(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^N x_{kj}^2 \end{aligned}$$

A jel energiája az \mathbf{x}_k vektor hosszának a négyzete.

A moduláció tehát nem jelent mást, mint a szimbólumok hozzárendelését időben folytonos jelekhez, vagy N dimenziós térbeli vektorokhoz, tehát:

$$\xi_{k_i} \implies x_{k_i}(t - iT) \quad \text{vagy} \quad \xi_{k_i} \implies \mathbf{x}_{k_i}.$$

A vizsgált csatorna az 1.2. ábrán látható. A csatorna ún. additív zajos csatorna. Az üzenetek visszaállítása nem jelent mást, mint minden időrészben a k_i becslését, azaz \hat{k}_i meghatározását. A továbbiakban a $v(t)$ zajról azt feltételezzük, hogy az fehér Gauss-zaj.



1.2. ábra. A csatorna modellje

1.2. A fehér Gauss-zaj leírása a vektortérben

A rendszer egységes kezelése érdekében írjuk le a fehér Gauss-zajt is az $\{x_k(t)\}$ által generált vektortérben. A fehér Gauss-zaj jellemző paraméterei:

- N_0 , egyoldalas teljesítménysűrűség $\left[\frac{W}{Hz}\right]$;
- $\frac{N_0}{2}$, kétoldalas teljesítménysűrűség $\left[\frac{W}{Hz}\right]$;
- $s_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{N_0}{2}$, kétoldalas teljesítménysűrűség $\left[\frac{W}{\text{rad/sec}}\right]$.

A fehér Gauss-zaj autokorrelációs függvénye

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} s(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Definiáljuk a \mathbf{v} zajvektort az N dimenziós térben

$$\mathbf{v}_j = \int_0^T \mathbf{v}(t) \varphi_j(t) dt; \quad \mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_N\}$$

Mivel $\mathbf{v}(t)$ sztochasztikus folyamat, \mathbf{v} valószínűségi vektorváltozó, melynek elemei az alábbi tulajdonságokkal jellemezhetők:

- v_j , Gauss-eloszlású valószínűségi változó, mivel $\mathbf{v}(t)$ -ből lineáris transzformációval állítottuk elő.
- $\mathbf{E}\{v_j\} = 0$, ugyanis

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^T \mathbf{v}(t) \varphi_j(t) dt\right\} = \int_0^T \mathbf{E}\{\mathbf{v}(t)\} \varphi_j(t) dt = 0$$

- korreláció

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{v_j v_k\} &= \mathbf{E}\left\{\left(\int_0^T \mathbf{v}(t) \varphi_j(t) dt\right) \left(\int_0^T \mathbf{v}(\rho) \varphi_k(\rho) d\rho\right)\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\int_0^T \int_0^T \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(\rho) \varphi_j(t) \varphi_k(\rho) dt d\rho\right\} = \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbf{E}\{\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(\rho)\} \varphi_j(t) \varphi_k(\rho) dt d\rho = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t - \rho) \varphi_j(t) \varphi_k(\rho) dt d\rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \\
&= \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

- Az egyes időrésekben a \mathbf{v} vektorok függetlenek egymástól, így a \mathbf{v} vektor független Gauss-eloszlású valószínűségi vektorváltozó az alábbi sűrűségfüggvénnyel:

$$p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^N \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^N \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{N_0}\right)$$

Fontos megjegyezni, hogy

$$\mathbf{v}(t) \neq \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \varphi_j(t),$$

tehát a $\{\varphi_j(t)\}$ bázis a fehér Gauss-zajra nem teljes.

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \varphi_j(t) + \tilde{\mathbf{v}}(t),$$

ahol $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ a fehér Gauss-zaj azon összetevőinek az összessége, amelyek a hasznos jel által generált (kifeszített) téren kívül esnek.

A vevő bemenetére jutó jel az

$$r(t) = x_k(t) + \mathbf{v}(t),$$

feltéve, ha tudjuk, hogy a vizsgált időrészben a k -adik szimbólumot állította elő a forrás. A vevő bemenetére jutó jel leírható az általunk definiált vektortérben is, így létrejön az $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_j, \dots, r_M\}$ vektor, ahol

$$r_j = \int_0^T r(t) \varphi_j(t) dt = x_{k_j} + \mathbf{v}_j.$$

A korábbi vizsgálatból azonban nyilvánvaló, hogy

$$r(t) \neq \sum_{j=1}^N r_j \varphi_j(t),$$

hiszen

$$r(t) = \sum_{j=1}^N x_{k_j} \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \varphi_j(t) + \tilde{\mathbf{v}}(t).$$

Felvetődik tehát a kérdés, hogy az $r(t)$ vételéhez, pontosabban az $x_k(t)$ megfigyeléséhez elegendő-e csak az \mathbf{r} vektor elemeit meghatározni? A válasz erre a kérdésre igen, vagyis \mathbf{r} megfigyelése *elégséges statisztika* az üzenet vételéhez.

Érdemes megjegyezni, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \{r_j \tilde{\mathbf{v}}(t)\} &= \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}(t) \int_0^T r(\rho) \varphi_j(\rho) d\rho \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}(t) \int_0^T (x_k(\rho) + \mathbf{v}(\rho)) \varphi_j(\rho) d\rho \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left\{ \left(v(t) - \sum_{l=1}^N v_l \phi_l(t) \right) \int_0^T (x_k(\rho) + v(\rho)) \phi_j(\rho) d\rho \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ \left(v(t) - \sum_{l=1}^N v_l \phi_l(t) \right) (x_{k_j} + v_j) \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ \left(v(t) - \sum_{l=1}^N v_l \phi_l(t) \right) v_j \right\} = \\
&= \mathbf{E} \{ v(t) v_j \} - \sum_{l=1}^N \mathbf{E} \{ v_l v_j \} \phi_l(t) = \\
&= \mathbf{E} \left\{ v(t) \int_0^T v(\rho) \phi_j(\rho) d\rho \right\} - \frac{N_0}{2} \phi_j(t) = \\
&= \int_0^T \mathbf{E} \{ v(\rho) v(t) \} \phi_j(\rho) d\rho - \frac{N_0}{2} \phi_j(t) = \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T \delta(t - \rho) \phi_j(t) dt - \frac{N_0}{2} \phi_j(t) = 0,
\end{aligned}$$

azaz a $\tilde{v}(t)$ független az \mathbf{r} elemeitől, így nem hordoz semmiféle információt az \mathbf{x}_k vektorról.

A vevőbe jutó jelből származó \mathbf{r} vektor statisztikája a $p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_k)$ feltételes valószínűségi sűrűségfüggvénnyel adható meg. Ennek előállításához tudjuk:

- Az \mathbf{r} vektor feltételesen Gauss-eloszlású, feltéve azt, hogy a k -adik üzenetet küldték.
- Az \mathbf{r} vektor elemei feltételesen függetlenek egymástól.
- $\mathbf{E} \{ r_j | \mathbf{x}_k \} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T r(t) \phi_j(t) dt \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T (x_k(t) + v(t)) \phi_j(t) dt \right\} = x_{k_j}$
- Az r_j szórásnégyzete az alábbi kifejezéssel határozható meg:

$$\mathbf{E} \{ (r_j - x_{k_j})(r_l - x_{k_l}) | \mathbf{x}_k \} = \mathbf{E} \{ v_j v_l \} = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

Ezért az \mathbf{r} vektor elemei feltételesen független Gauss-eloszlású valószínűségi változók. Az \mathbf{r} elemeinek feltételes együttes eloszlása

$$p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_k) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left(-\frac{(y_j - x_{k_j})^2}{N_0} \right) = \prod_{j=1}^N p_{r_j}(y_j | x_{k_j}),$$

ahol

$$p_{r_j}(y_j | x_{k_j}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left(-\frac{(y_j - x_{k_j})^2}{N_0} \right).$$

1.3. Példák a modulált jelek vektortérbeli leírására

QPSK jel

$M = 4$, elemi jelek:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\omega_0 t) = -x_2(t) \\ x_3(t) &= \sin(\omega_0 t) = -x_4(t) \end{aligned} \quad t \in [0, T)$$

Az ortonormált bázisfüggvények előállítására:

$$x_1(t) = a\varphi_1(t),$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \int_0^T x_1^2(t) dt = \\ &= \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (1 + \cos(2\omega_0 t)) dt = \\ &= \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_0^T = \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

ha $2\omega_0 T = \pi + n\pi$. Ebből

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t), \quad x_{11} = \sqrt{\frac{T}{2}}, \quad x_{12} = 0,$$

és értelemszerűen

$$x_{21} = -\sqrt{\frac{T}{2}}, \quad x_{22} = 0.$$

A Gram–Schmidt-ortogonalizálás lépéseit követve:

$$x_3(t) = b\varphi_1(t) + c\varphi_2(t),$$

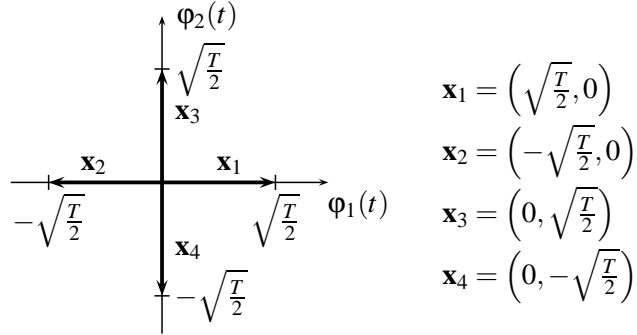
$$\begin{aligned} b &= \int_0^T x_3(t)\varphi_1(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \int_0^T \sin(2\omega_0 t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_0^T = 0, \end{aligned}$$

ha $2\omega_0 T = 2\pi + n2\pi$. Ezért $x_3(t) = c\varphi_2(t)$, amiből az előző lépésekhez hasonlóan

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_0 t), \quad x_{31} = 0, \quad x_{32} = \sqrt{\frac{T}{2}},$$

és értelemszerűen

$$x_{41} = 0, \quad x_{42} = -\sqrt{\frac{T}{2}}.$$



1.3. ábra. A QPSK jel vektoros ábrázolása

A vektorokat egy kétdimenziós térben lehet ábrázolni (1.3. ábra), tehát $N = 2 < M$. Az ábrázolás a szokásos, ún. konstellációs diagramra emlékeztet, tartalmilag azonban teljesen más értelmet hordoz. Érdemes azt is megemlíteni, hogy az ábráról a vektorok közötti távolság is leolvasható:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|^2 &= \|x_1(t) - x_3(t)\|^2 = \\
 &= \int_0^{T_s} (\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t))^2 dt = \\
 &= (x_{11} - x_{31})^2 + (x_{12} - x_{32})^2 = \\
 &= \left(\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 = T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 &= \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = \\
 &= \int_0^{T_s} (2\cos(\omega_0 t))^2 dt = \\
 &= (x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 = \\
 &= \left(2\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2 = 2T
 \end{aligned}$$

FSK jel

$M = 2$ (bináris rendszer), elemi jelek:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \cos(\omega_1 t) \\
 x_2(t) &= \cos(\omega_2 t) \quad t \in [0, T)
 \end{aligned}$$

Az ortonormált bázisfüggvények előállítására:

$$x_1(t) = a\phi_1(t),$$

$$a^2 = \int_0^T x_1^2(t) dt = \frac{T}{2},$$

ha $2\omega_1 T = \pi + l\pi$. Ebből

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t), \quad x_{11} = \sqrt{\frac{T}{2}}, \quad x_{12} = 0.$$

A Gram–Schmidt-ortogonalizálás lépéseit követve:

$$x_2(t) = b\varphi_1(t) + c\varphi_2(t),$$

$$\begin{aligned} b &= \int_0^T x_2(t)\varphi_1(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_1 t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \int_0^T (\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t)) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((\omega_1 - \omega_2)t)}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{\sin((\omega_1 + \omega_2)t)}{\omega_1 + \omega_2} \right]_0^T \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \frac{\sin((\omega_1 - \omega_2)T)}{\omega_1 - \omega_2} \end{aligned}$$

ha $(\omega_1 + \omega_2)T = \pi + n\pi$. Bevezetve a $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ jelölést ($\omega_1 > \omega_2$)

$$b = \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} T \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} = \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T}.$$

Az ortogonalizálás következő lépése c meghatározása.

$$x_2(t) - b\varphi_1(t) = c\varphi_2(t),$$

$$x_2(t) - \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t) = c\varphi_2(t).$$

Ebből

$$\begin{aligned} c^2 &= \int_0^T (x_2(t) - b\varphi_1(t))^2 dt = \\ &= \int_0^T x_2^2(t) dt + b^2 \int_0^T \varphi_1^2(t) dt - 2b \int_0^T x_2(t)\varphi_1(t) dt, \end{aligned}$$

tagonként pedig

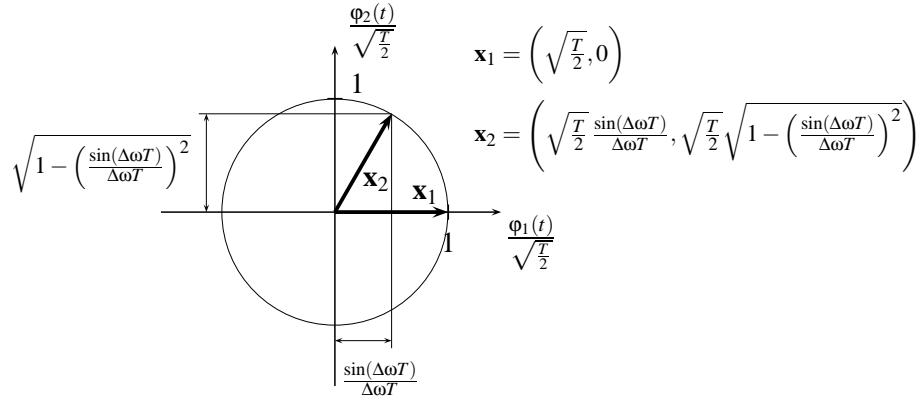
$$\int_0^T x_2^2(t) dt = \frac{T}{2},$$

ha $2\omega_2 T = \pi + h\pi$.

$$b^2 \int_0^T \varphi_1^2(t) dt = b^2,$$

és

$$\begin{aligned} 2b \int_0^T x_2(t)\varphi_1(t) dt &= 2b \int_0^T \cos(\omega_2 t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t) dt = \\ &= 2b \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_1 t) dt = 2b \cdot b, \end{aligned}$$



1.4. ábra. Az FSK jel vektoros ábrázolása

lásd korábban. Így a c értéke könnyen meghatározható:

$$c^2 = \frac{T}{2} - b^2 = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \left(\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right)^2,$$

vagyis

$$x_{21} = \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T}, \quad x_{22} = \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right)^2}.$$

A $\varphi_2(t)$ függvény a fentiek alapján megadható, hiszen

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{c} (x_2(t) - b\varphi_1(t)) = \frac{\cos(\omega_2 t) - \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t)}{\sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right)^2}}.$$

A jeleket ismét egy kétdimenziós vektortérben tudjuk ábrázolni (1.4. ábra). Ez a vektortér azonban semmilyen kapcsolatban nem áll a fázisrésszel, amely a megszokott konstellációs diagramok ábrázolására szolgál. Az ábráról leolvasható a vektorok közötti távolság:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 &= \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = \\ &= (x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 = \\ &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(1 - \left(\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{T}{2} \left(2 - 2 \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right) = \\ &= T \left(1 - \frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} \right) \end{aligned}$$

Néhány speciális eset elemzése:

1. $\Delta\omega T = \pi, \Delta\omega = \frac{\pi}{T}$

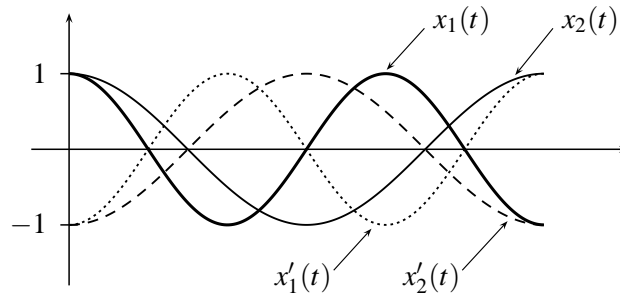
Ekkor a két jel ($x_1(t)$ és $x_2(t)$) ortogonális, pontosabban ez az a legkisebb frekvencialöket, amely-nél ez fennáll. Éppen ezért ennek a modulációnak Minimum Shift Keying (MSK) a neve.

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = T$$

2. $\Delta\omega T = 2\pi, \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

A két jel ekkor is ortogonális. A moduláció neve Fast Frequency Shift Keying (FFSK).

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = T$$



1.5. ábra. Az MSK jel időfüggvényei

3. $\Delta\omega T = k\pi$, $k = 3, 4, \dots$, $\Delta\omega = \frac{k\pi}{T}$
A jelek ortogonálisak.

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = T$$

4. Maximális a két jel közötti euklideszi távolság, ha

$$\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} = \text{minimális}$$

Ennek az értéke

$$\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega T} = -0.21723, \quad \Delta\omega T = 4.4934 \text{ [rad]}, \quad \Delta\omega = \frac{4.4934}{T}.$$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = 1.217T$$

5. $\Delta\omega T = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\omega = \frac{\pi}{2T}$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = T \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

Az MSK jel további elemzése

Az MSK jel időfüggvényei az 1.5. ábrán láthatóak, ha $T = \frac{1}{1200}$, $\omega_1 = 2\pi \cdot 1800$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 1200$, $\Delta\omega = 2\pi \cdot 600 = \frac{\pi}{T} = 1200\pi$.

A nem folytonos fázisú esetben csak $x_1(t)$ és $x_2(t)$ létezik. A jelek fázisváltását az ún. fázisfán ábrázolhatjuk (1.6. ábra, ahol a logikai „0”-t az $x_2(t)$, míg a logikai „1”-et az $x_1(t)$ jellel visszük át). Az ábrából jól látható, hogy a logikai „1” átvitele után π értékű fázisugrás van a jelben, ami spektrálisan előnytelen. A fázisváltást az

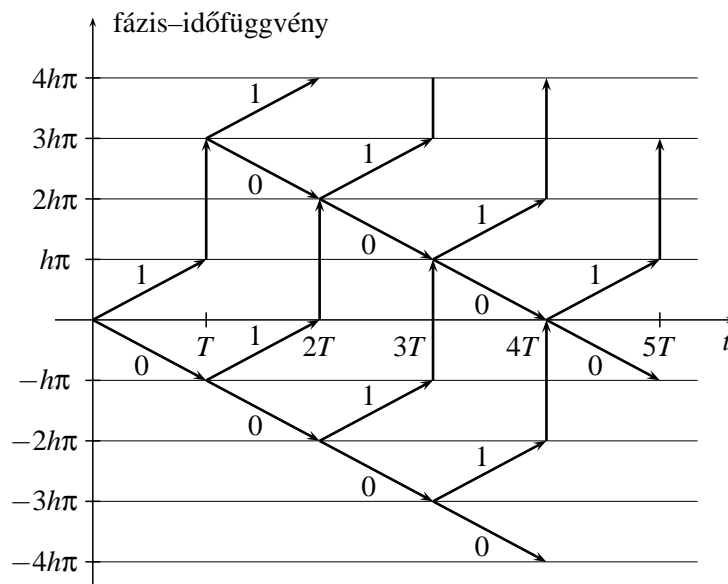
$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 2\pi \cdot 1500 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

elvi vivőhöz képest ábrázoltuk, azaz a T idő alatt az ω_1 frekvenciájú jel

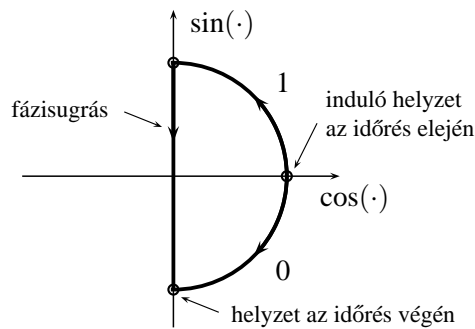
$$\Delta\varphi_1 = (\omega_1 - \omega_0)T = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T = 2\pi \cdot 300 \cdot \frac{1}{1200} = \frac{\pi}{2},$$

az ω_2 frekvenciájú jel pedig

$$\Delta\varphi_2 = (\omega_2 - \omega_0)T = -\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T = -\frac{\pi}{2}$$



1.6. ábra. A nem folytonos fázisú MSK jel fázisfája ($h = \frac{1}{2}$)



1.7. ábra. A nem folytonos fázisú MSK jel fázor diagramja

fázistolást okoz, ami azt jelenti, hogy az ábrában $h = \frac{1}{2}$ értékű.

A jelet a szokásos fázor diagramon ábrázolva az 1.7. ábrát kapjuk.

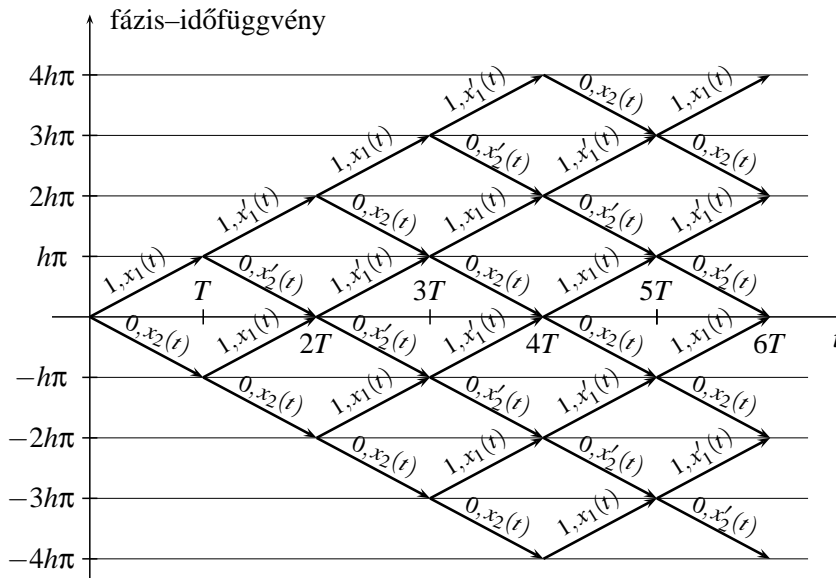
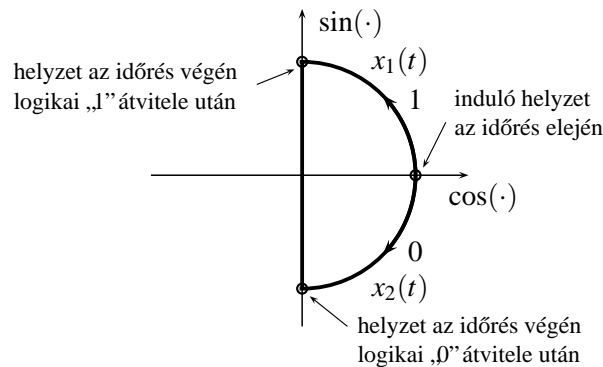
$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 t) &= \cos(\omega_0 t + (\omega_1 - \omega_0)t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}t\right) \\ \cos(\omega_2 t) &= \cos(\omega_0 t + (\omega_2 - \omega_0)t) = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}t\right) \end{aligned}$$

A folytonos fázisú esetben használjuk az $x_1'(t)$ és az $x_2'(t)$ jeleket is oly módon, hogy a fázisugrások eltűnjenek. Ez annyit jelent, hogy

$$\begin{aligned} &x_1(t) \text{ után } x_1'(t) \text{ vagy } x_2'(t), \\ &x_2(t) \text{ után } x_1(t) \text{ vagy } x_2(t), \\ &x_1'(t) \text{ után } x_1(t) \text{ vagy } x_2(t), \\ &x_2'(t) \text{ után } x_1'(t) \text{ vagy } x_2'(t) \end{aligned}$$

következhethet, és a logikai „1” értéket az $x_1(t)$ vagy $x_1'(t)$, a logikai „0” értéket az $x_2(t)$ vagy $x_2'(t)$ hordozza. Ebben az esetben a fázisfa az 1.8. ábrán látható.

Az 1.9. ábrán szereplő fázor diagramból is egyértelműen eltűnik a π értékű fázisugrás.

1.8. ábra. A folytonos fázisú MSK jel fázisfája ($h = \frac{1}{2}$)

1.9. ábra. A folytonos fázisú MSK jel fázor diagramja

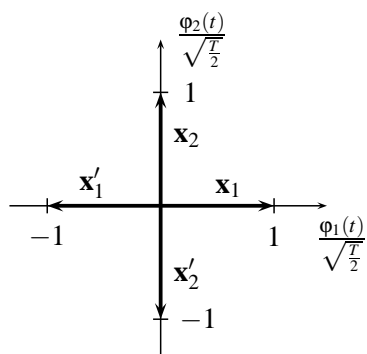
Természetesen mindkét esetre igaz az, hogy a jel burkolója állandó (constant envelop, állandó burkolójú moduláció). Ennek az a fő előnye, hogy az ilyen jel modulációs tartalma nem változik meg egy memóriamentes nemlineáris torzítás hatására, azaz a jelet nemlineáris erősítő fokozattal is lehet erősíteni. Az ilyen erősítőnek jobb a hatásfoka a lineáris erősítőkéénél.

A folytonos fázisú eset vektortérbeli jellemzéséhez két újabb elemi jelet kell ábrázolni (1.10. ábra), azaz

$$\text{„1”} \implies \mathbf{x}_1 = \left(\sqrt{\frac{T}{2}}, 0 \right) = -\mathbf{x}'_1$$

$$\text{„0”} \implies \mathbf{x}_2 = \left(0, \sqrt{\frac{T}{2}} \right) = -\mathbf{x}'_2$$

A vektortérbeli elrendezés lényegében azonos a QPSK esetével, de tudjuk, hogy itt a rendszer bináris. Ez annyit jelent, hogy a forrás logikai értékeihez az elemi jeleket nem direkt módon rendeljük hozzá, hanem ez a hozzárendelés függ a modulátor korábbi állapotaitól is. A rendszer tehát *memóriával rendelkezik*.



1.10. ábra. A folytonos fázisú MSK jel vektoros ábrázolása