Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. november 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy négyszeresen élösszefüggő gráfhoz hozzáveszünk egy új csúcsot, melyet a gráf tetszőleges öt pontjával összekötünk.

a) Igaz-e, hogy a kapott gráf mindig négyszeresen élösszefüggő?

b) Igaz-e, hogy a kapott gráf mindig ötszörösen élösszefüggő?

* * * * *

Legyen az eredeti gráf G, a pont és az öt él hozzávételével kapott gráf G'.

a) Megmutatjuk, hogy bárhogy hagyunk el G'-ből legfeljebb három élet, a kapott gráf összefüggő lesz, azaz G' négyszeresen élösszefüggő. (1 pont)
G'-ből legfeljebb három élet elhagyva a G által feszített részgráfból is legfeljebb három élet hagytunk el, így G összefüggő marad, hiszen tudjuk, hogy G négyszeresen élösszefüggő. (3 pont)
Az újonnan felvett csúcs a legfeljebb három él elhagyása után is csatlakozik a G által feszített részgráfhoz, hiszen az öt csatlakozó él között lesz olyan (legalább kettő is), amelyet nem hagytunk el. (2 pont)

b) Ez nem lesz igaz, ennek igazolására elég egy ellenpéldát mutatni: legyen G (mondjuk) az a gráf, amit egy hat csúcsú teljes gráfból egy él elhagyásával kapunk, az új pontot pedig kössük össze G öt fokú csúcsaival és a két négy fokú csúcs közül az egyikkel. (2 pont)
A kapott gráf nem lehet ötszörösen élösszefüggő, hiszen van 4 fokú csúcsa, az ehhez csatlakozó négy élet elhagyva tehát szétesik. (2 pont)

2. Egy G gráf a és b csúcsai közt létezik három éldiszjunkt út, teljesül továbbá, hogy a gráf bármely c csúcsából az a és b csúcsokba vezet összesen legalább három éldiszjunkt út. Igaz-e, hogy G bármely két csúcsa közt is létezik három éldiszjunkt út?

* * * * *

Az 5. Menger-tétel szerint G bármely két csúcsa közt létezik három éldiszjunkt út akkor éa csak akkor, ha a gráf háromszorosan élösszefüggő. (2 pont)
Annak eldöntéséhez, hogy ez teljesül-e, hagyjunk el legfeljebb két élet a gráfból. (1 pont)
Ekkor tetszőleges c csúcsra igaz lesz, hogy vagy a-val vagy b-vel azonos komponensben van, (1 pont)
hiszen a három éldiszjunkt útból legalább egy megmaradt a két él elhagyása után. (2 pont)
Igaz továbbá, hogy az a és b csúcsok azonos komponensben vannak, (1 pont)
hiszen volt köztük három éldiszjunkt út, s ezek közül is legalább egy megmaradt a két él elhagyása után. (2 pont)
Ezzel beláttuk, hogy a gráf valamennyi csúcsa egy komponensben lesz a két él elhagyása után, vagyis a gráf csakugyan háromszorosan élösszefüggő, s így a feladat kérdésére a válasz igenlő. (1 pont)

Menger-tétel használata nélkül az állítás bizonyítása elég macerás, c-ből (mondjuk) a-ba, majd onnan d-be menő éldiszjunkt utakat találni nem olyan egyszerű. Aki ebbe az irányba próbálkozik, de érdemi előrelépés nélkül, az 1-2 pontnál ne kapjon többet.

3. Határozzuk meg az $n^5 - n^4 - n^2$ és $n^3 - n^2 + 1$ számok legnagyobb közös osztóját minden n egész számra.

* * * * *

Jelöljük d-vel a kérdéses lnko-t. Ekkor nyilván $d \mid n^2(n^3 - n^2 + 1) = n^5 - n^4 + n^2$, (2 pont)
ahonnan $d \mid (n^5 - n^4 + n^2) - (n^5 - n^4 - n^2) = 2n^2$. (2 pont)
Mivel $n^3 - n^2 + 1$ páratlan (hiszen n^3 és n^2 azonos paritású), (2 pont)
d is páratlan kell hogy legyen, ezért $d \mid n^2$ is teljesül. (1 pont)
Így $d \mid (n^3 - n^2 + 1) + n^2 = n^3 + 1$ (1 pont)
és $d \mid n \cdot n^2 = n^3$, (1 pont)
ahonnan $d \mid n^3 + 1 - n^3 = 1$, azaz $d = 1$. (1 pont)

4. Egy szám 464-szerese 8 maradékot ad 50-nel osztva. Milyen maradékot ad maga a szám 50-nel osztva?

* * * * *

A feladat a $464x \equiv 8 \pmod{50}$ kongruencia mod 50 megoldásainak meghatározása. (1 pont)
464 és 50 lnko-ja 2, ez osztja 8-at, tehát lesz megoldás (ha valaki csak eddig jut el, arra adhatunk 1 pontot), éspedig 2 darab modulo 50 (erre is adhatunk 1 pontot, ha valaki nem oldja meg a lineáris kongruenciát). A kongruenciát 2-vel osztva és $225x$-et a bal oldalról elvéve az eredetivel ekvivalens

$$7x \equiv 4 \pmod{25}$$

kongruenciát kapjuk. (2 pont)
A jobb oldalról 25-öt elvéve a

$$7x \equiv -21 \pmod{25}$$

kongruencia adódik. (2 pont)
Mivel 7 és 25 relatív prímek, (1 pont)
7-tel osztva az eredetivel ekvivalens

$$x \equiv -3 \equiv 22 \pmod{25}$$

kongruenciát nyerjük. (2 pont)
Innen a megoldások 22 és 22+25=47 modulo 50. (2 pont)

5. Határozzuk meg az összes olyan n számot, melyre $\varphi(n) = 2$.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Használjuk az előadáson tanult $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \ldots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1})$ képletet. (Idáig még nem jár pont.) A szorzat tényezői mind pozitív egészek, így egyikük sem lehet nagyobb 2-nél, (2 pont)
azaz n-nek nem lehet 3-nál nagyobb prímosztója, (2 pont)
a 3 csak az első hatványon szerepelhet, (2 pont)
a 2 pedig legfeljebb a második hatványon. (2 pont)
Az n szám tehát osztója a 12-nek, a hat osztó közül könnyen látható, hogy a 3, a 4 és a 6 tesznek eleget a feltételnek. (2 pont)

6. Határozzuk meg $23^{25^{24}}$ utolsó három számjegyét a hatos számrendszerben.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A feladat megoldásához $23^{25^{24}}$ 216-tal vett osztási maradékát kell meghatározni. (1 pont)
Mivel 23 és 216 relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $23^{\varphi(216)} \equiv 1 \mod 216$. (1 pont)
$216 = 2^3 3^3$, így $\varphi(216) = 4 \cdot 18 = 72$. (1 pont)
Most tehát a 25^{24} szám 72-vel vett osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 25 és 72 is relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $25^{\varphi(72)} \equiv 1 \mod 72$. (1 pont)
$72 = 2^3 3^2$, így $\varphi(72) = 4 \cdot 6 = 24$, tehát 25^{24} 72-vel osztva 1 maradékot ad. (1 pont)
Így $23^{25^{24}} \equiv 23^{72k+1} \mod 216$ valamely k egészre. (1 pont)
Mivel $23^{72k} \equiv 1 \mod 216$, a $23^{25^{24}}$ szám 216-tal vett osztási maradéka 23. (1 pont)
23 a hatos számrendszerben felírva 35, tehát az utolsó három számjegy 035 lesz. (1 pont)