Valószínűségszámítás aláíráspótló zárthelyi megoldás
Műszaki informatikus BSc
2014. december 18.

1. András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül kivesznek egy-egy golyót egy dobozból, melyben eredetileg hét fehér és egy fekete színű golyó volt. Ha az első körben senki sem húzza ki a feketét, névsor szerint folytatják a húzást. Az veszít, aki a feketét húzza. A húzást addig folytatják, amíg valakihez nem kerül a fekete golyó. Kinek mennyi rá az esélye?

Megoldás: A : András fogja kihúzni a feketét; B: Béla fogja kihúzni a feketét; C: Csaba fogja kihúzni a feketét.

$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} + \frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$,

$\mathbf{P}(B) = \frac{7}{8}\frac{1}{7} + \frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{3}{8}$,

$\mathbf{P}(C) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$.

2. Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a második legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 10π helyen.

Megoldás: Jelölje X a második legkisebb kihúzott számot.

$$F_X(10\pi) = \mathbf{P}(X < 10\pi) = \mathbf{P}(X \leq 31) = \frac{1}{\binom{90}{5}}\sum_{i=2}^{31}(i-1)\binom{90-i}{3}.$$

3. Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk 10 pontot. Jelölje X azon pontok számát, melyek ezek közül beleesnek az $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ középpontú $\frac{1}{4}$ sugarú kör belsejébe is. Adja meg a $\mathbf{P}(X \leq 5)$ valószínűséget!

Megoldás: $X \in B(10, \frac{\pi}{16}), \mathbf{P}(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5}\binom{10}{i}(\frac{\pi}{16})^i(1 - \frac{\pi}{16})^{10-i}$

4. Ha X 3-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye és szórása az $Y = 9 - 3X$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $t < 9$: $F_Y(t) = \mathbf{P}(9 - 3X < t) = 1 - \mathbf{P}(X < \frac{9-t}{3}) = e^{t-9}$

$f_X(t) = e^{t-9}, t < 9.$

$\boldsymbol{\sigma} Y = \boldsymbol{\sigma}(9 - 3X) = \boldsymbol{\sigma}(-3X) = 3\boldsymbol{\sigma}(X) = 1$

5. Legyenek $X_1, X_2, X_3 \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Mennyi az $Y = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$ szórásnégyzete és $\mathrm{R}(X_1, Y)$?

Megoldás: $\boldsymbol{\sigma}^2 X_i = \frac{1}{12}, \boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2 X_i}{3} = \frac{1}{36}, \mathrm{cov}(X_1, Y) = \frac{1}{3}\mathrm{cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{36}$

$\mathrm{R}(X_1, Y) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{12}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$