

Kalkulus

Sáfár Orsolya

Sorozatok II

Részsorozat

Legyen (a_n) egy tetszőleges sorozat (n_k) pedig egy szigorú monoton növekedő, pozitív egészekből álló sorozat (indexsorozat). Ekkor az (a_{n_k}) sorozatot az (a_n) sorozat **részsorozatának** nevezzük.

Példa: Az $(-1)^n$ páros indexű részsorozata a konstans 1 sorozat, a páratlan indexű részsorozata a konstans -1 .

Ezt úgy jelöljük, hogy $(a_{2k}) = (1)$, illetve $(a_{2k+1}) = (-1)$.

Konvergens sorozatok részsorozata

Állítás: Konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és ha az eredeti sorozat határértéke A , akkor a részsorozaté is A .

Ezt az állítást egyrészt használhatjuk arra, hogy kiszámítsunk határértéket. Másrészt viszont azt is lehet részsorozatok segítségével igazolni, hogy egy sorozatnak nincsen határértéke.

Példa: Tekintsük az $\left(\frac{1}{3k^2 + 6}\right)$ sorozatot. Ez a $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat $3k^2 + 6$ indexsorozatú részsorozata, ezért ő is 0-hoz tart.

Példa 2: Tekintsük az $(\cos(n\pi))$ sorozatot, indirekt tegyük fel, hogy konvergens, ekkor minden részsorozatának ugyanoda kell tartania.

Viszont a páros indexű részsorozat a konstans 1, így a határértéke is 1. A páratlan indexű részsorozata a konstans -1 , és $1 \neq -1$, így ellentmondásra jutottunk, azaz $(\cos(n\pi))$ nem konvergens.

Végtelenhez tartó sorozatok részsorozata

Állítás: Ha a sorozat végtelenbe tart, sorozat minden részsorozata is a végtelenbe tart.

Állítás 2: Ha egy monoton növvő sorozat valamelyik részsorozata végtelenhez tart, akkor az eredeti sorozat is végtelenhez tart.

Ezen állítás felhasználásával elég egy részsorozat határértékét kiszámolni, ha tudjuk, hogy az eredeti sorozat monoton.

Példa

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$! (Megj.: a sorozat $n = 2$ -től értelmezett csak, első eleme legyen mondjuk 1).

Először megmutatjuk, hogy $(\frac{n}{\ln n})$ monoton nő, azaz $\frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$ -t kell igazolnunk. Ekvivalens átalakításokat fogunk végezni.

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Szorozzunk be a (nemnegatív) nevezőkkel:

$$(n+1) \ln n > n \ln(n+1)$$

A logaritmus azonosságát felhasználva:

$$\ln(n^{n+1}) > \ln((n+1)^n)$$

Példa - folyt.

Mivel a $\ln$ függvény szigorú monoton nő, így

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

Osszuk le mindkét oldalt n^n -el:

$$n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tudjuk, hogy az Euler-sorozat felső korlátja 4 így, így a 4. elemtől kezdve biztosan igaz a monotonitás.

Másrészt a 2^k indexű részsorozat végtelenbe tart, hiszen:

$$a_{2^k} = \frac{2^k}{\ln(2^k)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^k}{k},$$

amiről gyakorlaton láttuk, hogy végtelenbe tart.

Nagyságrendek

Definíció: Azt mondjuk, hogy (a_n) nagyságrendileg nagyobb (b_n) -nél, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Jele: $a_n \gg b_n$.

Összefoglalva az eddigi ismereteinket:

$$n^n \gg n! \gg 2^n \gg n \gg \ln n$$

Ennél erősebb állítás is igaz: ha $a > 1$ és $p > 0$ tetszőleges valós konstansok, akkor

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^p \gg \log_a n$$

Műveletek konvergens sorozatokkal - Alapműveletek

Tfh (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$! Ekkor:

- ▶ $(a_n + b_n)$ is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$.
- ▶ $(a_n - b_n)$ is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$.
- ▶ $(a_n b_n)$ is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$.
- ▶ Ha $b_n \neq 0$ semmilyen n -re és $B \neq 0$ akkor (a_n/b_n) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = A/B$.

Műveletek konvergens sorozatokkal - Hatványozás

Tfh (a_n) konvergens sorozat és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, ekkor:

- ▶ Ha $p > 0$ tetszőleges pozitív egész konstans akkor (a_n^p) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = A^p$.
- ▶ Ha $a_n \geq 0$ minden n -re akkor és q tetszőleges valós konstans és $A \neq 0$, akkor (a_n^q) is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = A^q$.

Az viszont sajnos nem igaz, hogy ha (a_n) és (b_n) is konvergensek, akkor $(a_n^{b_n})$ határértéke A^B lenne. Erre az $(e_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat ellenpélda, hiszen az alap 1-hez tart, egynek pedig minden hatványa 1. De a határérték biztosan nem lehet 1, hiszen a sorozat első eleme 2, és tudjuk, hogy monoton növekszik. Ezért a konstans szó nem elhagyható az állításokból.

Műveletek konvergens sorozatokkal - Abszolútérték

Állítás: Ha (a_n) konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, akkor $(|a_n|)$ is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$.

Az állítás nem megfordítható, elég csak a $(-1)^n$ sorozatra gondolnunk. Bár a $(|(-1)^n|)$ a konstans 1 sorozat, azaz konvergens, de a $(-1)^n$ sorozat nem konvergens.

Műveletek 0-hoz tartó sorozatokkal

Van azonban egy speciális eset, amikor $(|a_n|)$ konvergenciájából mégis következik (a_n) -é, akkor ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Ilyenkor ugyanis egy $|a_n|$ elem távolsága a határértéktől, azaz 0-tól, megegyezik az a_n elem távolságával.

A 0-hoz tartó sorozatoknak van még egy speciális tulajdonsága: ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és (b_n) egy tetszőleges korlátos sorozat, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. Ehhez az sem szükséges, hogy (b_n) konvergens legyen.

Innen lehet például tudni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Rendőr-elv

Rendőr-elv: Tfh (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, továbbá (c_n) egy olyan sorozat, amelynek elemeire teljesül, hogy $a_n \leq c_n \leq b_n$ minden olyan n indexre, amely nagyobb mint valamilyen küszöb. Ekkor (c_n) is konvergens, és a határértéke A .

A rendőr-elvet alkalmazhatjuk sorozatok határértékének meghatározására, amennyiben ismerünk néhány nevezetes határértéket.

Rendőr-elv alkalmazása

Legyen $(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$. Ekkor:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Az alsó és felső becslés is 0-hoz tart, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ és az alsó becslés az $\frac{1}{n}$ sorozat $\frac{1}{2}$ -szerese, ezért az ő határértéke is 0. Azaz a rendőrelv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Nevezetes határértékek - Euler-féle sorozat

Euler-féle sorozat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Azt már láttuk, hogy $(e_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ korlátos és monoton nő, azaz van határértéke. A határértékét e -nek jelöljük. Erről a konstansról meg lehet mutatni, hogy irracionális szám, értéke megközelítőleg 2.718281....

Ha x tetszőleges valós, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Ennek indoklásához átírjuk a sorozatot:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x$$

Majd felhasználva, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}$ az eredeti (e_n) sorozat egy-egy részsorozatával alulról és felülről is becsülhető a rendőrelvből következik az állítás.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat

Ha $a > 1$ valós konstans, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

Ennek igazolásához írjuk fel a -t $1 + r$ alakban. Mivel $a > 1$, így $r > 0$. Innen a Bernoulli egyenlőtlenség miatt:

$$(1 + r)^n \geq 1 + r \cdot n,$$

ami a speciális rendőrelv miatt végtelenhez tart, így a^n is.

Ha $|a| < 1$ valós konstans, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

Írjuk fel $|a|$ -t $\frac{1}{b}$ alakban. Mivel $|a| < 1$, így $b > 1$, azaz $b = 1 + r$ valamilyen pozitív r -el. Ismét Bernoulli-val:

$$0 \leq \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{1 + nr} < \frac{1}{nr}$$

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat

Mivel $\frac{1}{n}$ határértéke 0, a felső becslés pedig ennek konstansszorosa, így a rendőrelv miatt $|a|^n$ tart 0-hoz, így a^n is tart 0-hoz.

Ha $|a| < 1$ valós konstans, és k tetszőleges egész, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$$

Ezt az állítást nem bizonyítjuk.

Nevezetes határértékek - n -edik gyök

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk az $\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n}, 1, \dots, 1$ összesen n darab számra.

Mértani közepük: $\sqrt[n]{n}$.

Számtani közepük: $\frac{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + n - 2}{n}$.

Innen:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}}.$$

Így az $\sqrt[n]{n}$ sorozatot alulról-felülről becsülhetjük egy-egy 1-hez tartó sorozattal, azaz a rendőr-elvből következik az állítás.

Legyen p tetszőleges pozitív valós szám, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$ (Nem bizonyítjuk.)

Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$! Ekkor:

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$.

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

▶ Ha $p > 0$ tetszőleges pozitív egész konstans akkor
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \infty$.

▶ Ha $a_n \geq 0$ minden n -re akkor és q tetszőleges pozitív valós konstans, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = \infty$.

Határozatlan határértékek: $\infty - \infty$

Tfh (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$! Ekkor $(a_n - b_n)$ határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \infty,$$

ugyanis $n^n - n > n^2 - \frac{n^2}{2}$, ha $n > 2$, így a speciális rendőr-elvből következik az állítás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - (n^2 - 1) = 1,$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - n^2 = -\infty$$

(akkor mondjuk, hogy (a_n) határértéke mínusz végtelen, ha $(-a_n)$ határértéke végtelen).

Határozatlan határértékek: ∞/∞

Tfh (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$! Ekkor (a_n/b_n) határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

Ezen határértékek igazolás úgy történik, hogy külön-külön kiemeljük a legnagyobb nagyságrendű tagot a számlálóból és nevezőből is, majd alkalmazzuk a konvergens sorozatok közötti műveletek szabályait.

Határozatlan határértékek: bármi/0

Bár az igaz, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0$, de ez nem megfordítható.

Vegyünk például a $(a_n) = ((-1)^n \frac{1}{n})$ sorozatot. Egyrészt (a_n) határértéke 0, mert egy korlátos és egy 0-hoz tartó sorozat szorzata.

Másrészt viszont $(\frac{1}{a_n}) = (-1)^n n$. Ez nem tart a végtelenhez, hiszen minden második eleme negatív, így nem fog teljesülni a feltétel, hogy egy bizonyos küszöb után az elemei nagyobbak lennének egy (sőt, bármelyik) pozitív számnál.

Határozatlan határértékek: $\infty \cdot 0$

Tfh (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$!
Ekkor $(a_n b_n)$ határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{n} = 1.$$