Algoritmuselmélet zárthelyi
2011. március 28.

1. Egy problémára két algoritmusunk van.

Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 db n - 1 méretűt készít, és ezeket oldja meg rekurzívan.

A $\mathcal{B}$ az $n \geq 2$ méretű problémából 3 lépéssel 4 db n - 1 méretűt készít, és ezeket oldja meg rekurzívan. Az $n = 1$ esetében mindkét eljárás 1 lépést használ.

Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre gyorsabb?

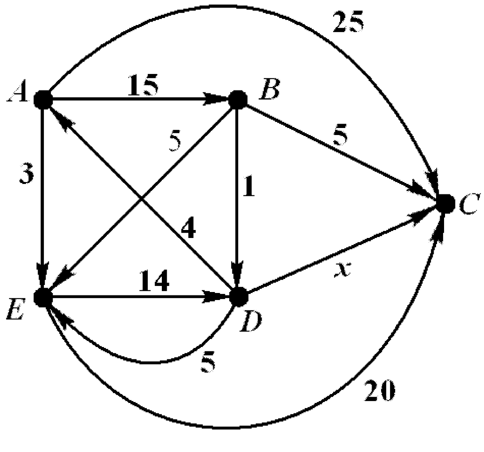
2. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk belerakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.

Legyen adott $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet $O(b^2)$ lépésben eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

3. Az A tömb n különböző egész számot tartalmaz, $A[1] < A[2] < ... < A[n]$. A B tömb is n egész számot tartalmaz, és tudjuk, hogy $A[i] \leq B[i] \leq A[i] + 2$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Hogyan lehet a B tömböt $O(n)$ összehasonlítással rendezni?

4. Egy játékban 4 számláló értékét lehet állítgatni. Mindegyik a $\{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ halmazból vesz fel értéket. Egy lépésben egyetlen számláló értékét tudjuk változtatni, az i értékből $i + 1 \pmod n$ vagy $i - 1 \pmod n$ lehet. Adott a kezdeti pozíció (A_1, A_2, A_3, A_4) és a cél (B_1, B_2, B_3, B_4), valamint tiltott pozícióknak egy listája. Adjon algoritmust, amely $O(n^4)$ időben meghatározza a minimális lépésszámot, amivel a kezdőpozícióból eljuthatunk a célba úgy, hogy közben egyetlen tiltott pozíciót sem érintettünk!

5. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfon az A pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében! Az algoritmus minden lépése után írja fel az úthosszakat tartalmazó tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit!



Milyen x értékre szerepel a neki megfelelő él valamelyik legrövidebb útban?

6. Egy kupacban 7 elemet tárolunk. Hol helyezkedhet el a rendezés szerinti középső elem?

7. Egy bináris keresőfában az 1, 2, 3, ..., 2^k - 2 elemeket tároljuk. Tudjuk, hogy a fa egy teljes bináris fa. Be akarjuk illeszteni a 0 számot is a fába úgy, hogy a végén megint olyan bináris keresőfát kapjunk, ami teljes bináris fa. Igazolja, hogy ehhez az összes elemet el kell mozgatni a fában!

8. Egy piros-fekete fában a 2010, 42, 100π, 1848, 3 elemeket tároljuk úgy, hogy a gyökérben lévő elem a 42. Hogyan nézhet ki a fa? (Adja meg az összeset, és indokolja meg, hogy más nincs!)