Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2013. május 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 20\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 3-mal vagy 5-tel (vagy mindkettővel).

a) Van-e G-ben Hamilton-út?

b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

* * * * *

G-ből elhagyva a 3-mal vagy 5-tel osztható számokat csupa izolált pontból álló gráfot kapunk. (3 pont)
Ezzel 9 pontot hagyunk el (3,5,6,9,10,12,15,18,20) és a maradék gráfnak 11 komponense lesz, (3 pont)
ezért a tanult tétel értelmében nincs benne Hamilton-út, (3 pont)
így Hamilton-kör sem. (1 pont)

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{100, 101, \dots, 200\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $(x, y) \geq 10$ (ahol (x, y) az x és y legnagyobb közös osztóját jelöli). Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

* * * * *

A $100, 110, 120, \dots, 190, 200$ csúcsok 11 pontú klikket alkotnak G-ben, hiszen közülük bármely kettőnek a 10 közös osztója. (4 pont)
11 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők. Ugyanis színezzük a $100, 101, \dots, 109$ csúcsokat egy színnel, a $110, 111, \dots, 119$ csúcsokat egy következővel, stb., a $190, 191, \dots, 199$ csúcsok kapják a tizedik színt, végül egyedül a 200 kapja a tizenegyedik színt. (2 pont)
Ez a színezés jó lesz, hiszen azonos színnel színezett csúcsok különbsége mindig legföljebb 9, így nem lehet 9-nél nagyobb közös osztójuk. (2 pont)
Mivel G-ben van 11 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 11$, (1 pont)
másrészt mivel G csúcsai 11 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 11$. (1 pont)

3. Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát!

* * * * *

Jelölje a kör csúcsait sorrendben körbe haladva $v_1, v_2, \dots, v_6$, a kör komplementerét G.
G-ben minden pont foka 3, így $\chi_e(G) \geq 3$. (3 pont)
Másrészt 3 színnel G éleit könnyű megszínezni: a $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_6\}$ élek legyenek pirosak, a $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_5\}$ élek kékek és a $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$ élek zöldek. (6 pont)
Tehát $\chi_e(G) = 3$. (1 pont)

4. A G perfekt gráf tartalmaz 2013 csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3 csúcsú kört?

* * * * *

Mivel G-ben van páratlan (2013 csúcsú) kör, ezért a tanult tétel értelmében nem páros gráf, (2 pont)
így $\chi(G) \geq 3$. (2 pont)
G perfekt, ezért $\chi(G) = \omega(G)$, (2 pont)
így $\omega(G) \geq 3$ is igaz. (2 pont)
Ezért G-ben van 3 pontú klikk, vagyis 3 pontú kör, így az állítás igaz. (2 pont)

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az $\{a_1, a_4, a_7, b_2, b_5, b_6, b_9\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető). (4 pont)
G-ben könnyű mutatni 7 élű párosítást: például az $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_6\}$, $\{a_3, b_9\}$, $\{a_4, b_3\}$, $\{a_5, b_2\}$, $\{a_6, b_5\}$ és az $\{a_7, b_1\}$ élek. (3 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 7$, illetve $\nu(G) \geq 7$. Ebből a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés miatt következik, hogy $\nu(G) = \tau(G) = 7$, vagyis a megadott lefogó ponthalmaz minimális és a megadott párosítás maximális. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti nem az egyetlen 7 elemű lefogó ponthalmaz: $\{a_1, a_3, a_4, a_7, b_2, b_5, b_6\}$ is ilyen. A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni.

6. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ csúcs és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $m(v)$ az s-ből a v-be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $m(t) = 100$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $m(v) > 100$. Mutassuk meg, hogy ekkor a t-be érkező élek összkapacitása 100.

* * * * *

Mivel az s-ből t-be vezető maximális folyam értéke 100, ezért a Ford-Fulkerson tétel miatt a minimális st-vágás kapacitása is 100. Legyen C egy 100 kapacitású st-vágás. (2 pont)
Ha volna olyan $v \neq t$ csúcs, amely a C-beli élek elhagyása után t-vel egy oldalon van, akkor C egyben 100 kapacitású sv-vágás is volna, amiből $m(v) \leq 100$ következne. Ez ellentmond a feladatban írt feltételnek, így ilyen v nem lehet. (5 pont)
Így C kapacitása definíció szerint a t-be érkező élek összkapacitása, amivel az állítást beláttuk. (3 pont)