Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2022 május 4.

1. A $G = (A, B; E)$ teljes páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén). Futtassuk G-re a maximális összsúlyú teljes párosítás keresésére tanult Egerváry-algoritmust és adjuk meg az eredményként kapott maximális összsúlyú teljes párosítást.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(A feladat tehát nem csak egy maximális összsúlyú teljes párosítás meghatározása, hanem az algoritmus futásának a dokumentálása a közben keletkező minden adat megadásával.)

2. Van-e az alábbi lineáris egyenletrendszernek olyan megoldása, amiben az x_1, x_2 és x_3 változók értéke nemnegatív? (Az x_4 változó értéke tehát tetszőleges valós szám lehet, csak az első három változó nemnegativitása van kikötve.)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

$$\begin{aligned} &\max\{7x_1 + 6x_2 + x_3\} \\ &\text{ha} \\ &x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 2 \\ &3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ &5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 2 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Egy hat csúcsú teljes gráf csúcsai a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számok, az $\{i, j\}$ él súlya $6 - |i - j|$ (minden $0 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ esetén). Hajtsuk végre és dokumentáljuk a Steiner-fa problémára adott approximációs algoritmust a gráfra $T = \{0, 1, 3\}$ mellett.

5. Adjunk meg olyan 6 csúcsú, 8 élű egyszerű G gráfot, mely éles példa a maximális páros részgráf problémára adott mindkét approximációs algoritmushoz. Állításunkat természetesen bizonyítsuk is.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató

2022. május 4.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

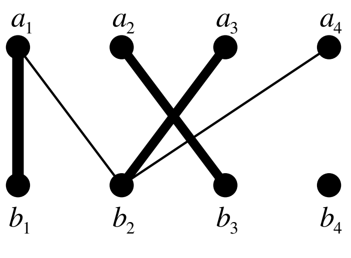
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

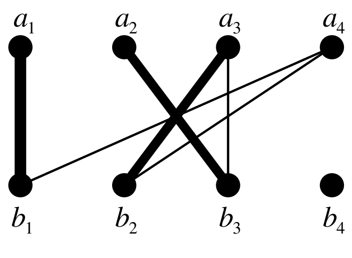
Az 1. feladat megoldása. Az algoritmus futtatását az inicializálással kezdjük: a kezdeti párosítás $M = \emptyset$, a kezdeti címkézésben pedig a B-beli csúcsok címkéje 0, az A-belieké pedig a rájuk illeszkedő élek súlyának maximuma:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	7	8	8	6	0	0	0	0

(1 pont)

Most meghatározzuk a c-re nézve szoros élek gráfját (vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket, amikre $w(e) = c(a) + c(b)$); lásd az alábbi, bal oldali ábrát. Majd a szoros élek gráfjában maximális párosítást keresünk (a javítóutas algoritmussal). A kapott M három élű, lásd (például) az alábbi, bal oldali ábrán vastagított éleket. (1 pont)





Rátérünk a címkézés módosítására. A párosítatlan A-beli, illetve B-beli csúcsok halmaza $A_1 = \{a_4\}$ és $B_1 = \{b_4\}$. Alternáló úton csak a b_2 és a_3 csúcsok érhetők el, ezért ezek közül az A-beliek, illetve B-beliek halmaza $A_2 = \{a_3\}$, illetve $B_2 = \{b_2\}$. Így a maradék (alternáló úton el nem érhető, de párosított) A, illetve B-beliek halmaza $A_3 = \{a_1, a_2\}$, illetve $B_3 = \{b_1, b_3\}$. (1 pont)
Az algoritmus működési szabálya szerint az $A_1 \cup A_2 = \{a_3, a_4\}$ és a $B_1 \cup B_3 = \{b_1, b_3, b_4\}$ halmazok halmazok közti élek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. Itt az a_3-ból induló (és $B_1 \cup B_3$-ba menő) élek fölöslegei rendre 3, 2 és 5, az a_4-ből induló élek fölöslegei pedig 2, 3 és 5. Ezeknek a minimuma tehát $\delta = 2$. (1 pont)
Ezek után a módosított címkézés meghatározásához $A_1 \cup A_2$ elemein δ-val csökkenteni, B_2 elemein pedig δ-val növelni kell a jelenlegi címkézést. Így a következőt kapjuk:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	7	8	6	4	0	2	0	0

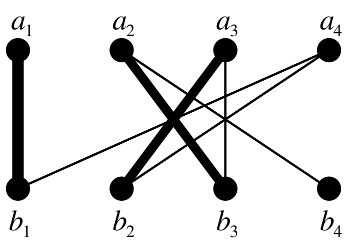
(1 pont)

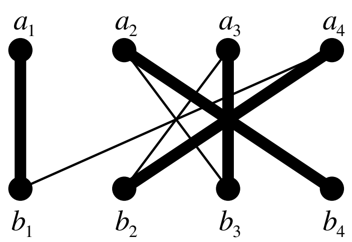
Ezzel az algoritmus egy teljes ciklusát végrehajtottuk, ismét a (már módosított c-hez tartozó) szoros élek meghatározásával folytatjuk. A korábbi szoros részgráfhoz képest három változás történik: egyrészt $\{a_1, b_2\}$ megszűnik szorosnak lenni, (1 pont)
másrészt $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_1\}$ új szoros élek (lásd az fenti, jobb oldali ábrát). (1 pont)
(Ezek a változások egyrészt a címkézésből és a megadott élsúlyokból közvetlenül is kiolvashatók, de a fentiekből is következik: $\{a_1, b_2\}$ volt az egyetlen A_3 és B_2 közötti él, a δ meghatározásakor pedig a minimum az $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_1\}$ éleken vétetett föl.)
Az új szoros részgráfban a javítóutas algoritmus nem talál javítóutat (hiszen b_4-re nem illeszkedik él), így most nem változik az M párosítás és a párosítatlan csúcsok halmaza sem: $A_1 = \{a_4\}$ és $B_1 = \{b_4\}$. Viszont most már minden más csúcs elérhető alternáló úton (hiszen $a_4 - b_1 - a_1$ és $a_4 - b_2 - a_3 - b_3 - a_2$ is alternáló utak), így $A_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$ és $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ (valamint $A_3 = B_3 = \emptyset$). (1 pont)
Ezért δ meghatározásához most az $A_1 \cup A_2 = A$ és a $B_1 \cup B_3 = \{b_4\}$ halmazok halmazok közti élek fölöslegeit vizsgáljuk: 3, 2, 3, 3. Így ismét $\delta = 2$. (1 pont)
A címkézés újbóli módosításához pedig az $A_1 \cup A_2 = A$ halmazon csökkentünk δ-val, $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ elemein pedig növelünk δ-val:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	5	6	4	2	2	4	2	0

(1 pont)

A szoros részgráfban most csak egyetlen változás történik: $\{a_2, b_4\}$ szorossá változik (lásd az alábbi, bal oldali ábrát). (1 pont)





Így viszont a javítóutas algoritmus már talál javítóutat: $a_4 - b_2 - a_3 - b_3 - a_2 - b_4$. Ementén javítva (vagyis a párosított és párosítatlan élek szerepét felcserélve) a fenti, jobb oldali ábrán látható M párosítást kapjuk. Mivel ez már teljes párosítás, ezért az algoritmus itt megáll. (1 pont)

A 2. feladat megoldása. A rendszer $Ax \leq b$ alakba írható, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 & 9 \\ -4 & -2 & -13 & -9 \\ 3 & 1 & 10 & 7 \\ -3 & -1 & -10 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2 \text{ pont})$$

A Farkas-lemma értelmében ez a rendszer akkor és csak akkor megoldható, ha nem létezik olyan $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ sorvektor, amelyre $yA = 0$, $y \geq 0$ és $yb < 0$. (1 pont)
Ezt részletesen kiírva a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{array}{lr} (1) & 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_5 = 0 \\ (2) & 2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 - y_6 = 0 \\ (3) & 13y_1 - 13y_2 + 10y_3 - 10y_4 - y_7 = 0 \\ (4) & 9y_1 - 9y_2 + 7y_3 - 7y_4 = 0 \\ (5) & y_1 - y_2 + y_3 - y_4 < 0 \\ (6) & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0,\ y_5 \geq 0,\ y_6 \geq 0,\ y_7 \geq 0 \end{array} \qquad (2 \text{ pont})$$

A tanult, egyszerű átalakításokkal a fenti rendszer jóval egyszerűbb alakra hozható: egyrészt vezessük be az $y_{12} = y_1 - y_2$ és $y_{34} = y_3 - y_4$ változókat, másrészt alakítsuk az (1), (2) és (3) egyenleteket egyenlőtlenséggé az y_5, y_6 és y_7 változók elhagyásával:

$$\begin{array}{lr} (1) & 4y_{12} + 3y_{34} \geq 0 \\ (2) & 2y_{12} + y_{34} \geq 0 \\ (3) & 13y_{12} + 10y_{34} \geq 0 \\ (4) & 9y_{12} + 7y_{34} = 0 \\ (5) & y_{12} + y_{34} < 0 \end{array} \qquad \text{(2 pont)}$$

(Valóban, egyrészt az y_{12} és y_{34} változók tetszőleges valós értéket felvehetnek, mert minden valós szám felírható két nemnegatív szám különbségeként. Másrészt y_5, y_6 és y_7 „szerepe" abban merült ki, hogy az egyenlőtlenséggé alakított (1), (2) és (3) feltételek bal oldalából egy nemnegatív számot kivonva nullát kaphatunk – ami épp ezeknek az egyenlőtlenségeknek a fennállását jelenti.) (0 pont)
(4)-ből: $y_{34} = -\frac{9}{7}y_{12}$. Legyen ezért $y_{12} = 7\alpha$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ értékre; ebből tehát $y_{34} = -9\alpha$.(1 pont)
Ezeket az (1), (2), (3) és (5) feltételekbe helyettesítve:

$$\begin{array}{ll} (1) & 28\alpha - 27\alpha = \alpha \geq 0 \\ (2) & 14\alpha - 9\alpha = 5\alpha \geq 0 \\ (3) & 91\alpha - 90\alpha = \alpha \geq 0 \\ (5) & 7\alpha - 9\alpha = -2\alpha < 0 \end{array} \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezek a feltételek együttesen tehát bármilyen $\alpha > 0$ értékre fennállnak. (1 pont)
Így például az $y_{12} = 7$, $y_{34} = -9$ választással a fenti rendszer megoldását kapjuk. Ez tehát bizonyítja, hogy az $yA = 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$ rendszer megoldható és így az egyenletrendszernek nem létezik olyan megoldása, amiben az első három változó értéke nemnegatív. (2 pont)
Az $yA = 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$ rendszernek tehát megoldása például az $y = (7, 0, 0, 9, 1, 5, 1)$ vektor, amit az $y_{12} = 7$ és $y_{34} = -9$ értékekből a fenti átalakítások visszafordításával kaphatunk; egy ilyen y közvetlen megadása azonban nem szükséges egy teljes értékű megoldáshoz. A fenti megoldás (az előadáson látotthoz hasonlóan) leírható azon az elemi módon is, hogy ha a feladatbeli első egyenlet 7-szereséből kivonjuk a második 9-szeresét, akkor az $x_1 + 5x_2 + x_3 = -2$ egyenletet kapjuk, ami nyilván nem megoldható az $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ feltételek mellett; így az eredeti rendszer sem megoldható ezekkel a feltételekkel. Természetesen a megoldás ebben a formában leírva is teljes értékű.

A 3. feladat megoldása. a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(2 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{array}{l} \min\{2y_1 + 5y_2 + 2y_3\} \\ \text{ha} \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 = 7 \\ y_1 + 3y_2 + 6y_3 = 6 \\ -4y_1 + 2y_2 + 7y_3 - y_4 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(4 pont)}$$

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A primál feladat rendszere megoldható: például $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ megoldás. (0 pont)
Így a tanultak szerint a primál feladat célfüggvényének a felülről korlátossága ekvivalens $yA = c$, $y \geq 0$, vagyis a duális rendszerének a megoldhatóságával. (1 pont)
A duális rendszerének második egyenletéből az elsőt kivonva: $y_3 = -1$. (1 pont)
Mivel ez ellentmond az $y_3 \geq 0$ feltételnek, ezért a duális rendszere nem megoldható. (3 pont)
Így a fentiek szerint a primál feladat célfüggvénye nem felülről korlátos a megoldáshalmazán.(1 pont)

A 4. feladat megoldása. A bemenet nem metrikus, mert pl. a $\{0,1\}$ él súlya 5, míg a $\{0,5\}$ és $\{5,1\}$ élek súlyöszege csak 3. (1 pont)
Az első lépésünk tehát a metrizálás kell legyen. (1 pont)
Az első 2 pontot adjuk meg annak is, aki nem vizsgálja, hogy metrikus-e a bemenet, hanem automatikusan a metrizálással kezdi az algoritmust (ez ugyanis semmiképp sem lehet hiba, legfeljebb fölösleges) feltéve, hogy az nagyjából helyes.
Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)
de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)
(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá az előző 2 pont.)
A kérdéses úthosszak a $0,1$ pár esetén 3, a $0,3$ pár esetén szintén 3, az $1,3$ pár esetén 4 (az utóbbi kettő azonos a csúcsok közti él súlyával). (1 pont)
A metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)
így az algoritmus következő lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, a két 3 súlyú élet kell kiválasztanunk, vagyis a $\{0,1\}$-et és a $\{0,3\}$-at. (1 pont)
Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $0-5-1$ és $0-3$, (2 pont)
végül ezen utak éleinek uniójában (1 pont)
kell egy minimális összsúlyú feszítőfát keresnünk, (1 pont)
ami persze a $\{0,5\}, \{5,1\}, \{0,3\}$ élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)
Az utolsó előtti pont akkor jár, ha a megoldó tisztában van vele, hogy a kapott élhalmaz egy (minimális) feszítőfáját kell megadni (nem pedig magát az élhalmazt). A legrövidebb utak és a minimális összsúlyú feszítőfa meghatározásakor elvileg megfelelő algoritmusokat (pl. Dijkstra és Kruskal) kéne használni, de a kis méret miatt ezek most ránézésre is meghatározhatók. Számolási hibáért darabonként 1 pontot vonjunk le, de ha a számolási hiba a legrövidebb utak meghatározásánál a számunkra érdektelen (vagyis nem T által feszített) élek súlyaival kapcsolatos, akkor nem kell érte pontot levonni. Győződjünk meg ugyanakkor arról, hogy valóban csak számolási és nem elvi hibáról van szó.

Az 5. feladat megoldása. Az órán látottak szerint éles példa csak páros gráf lehet. 6 csúcsú, 8 élű, egyszerű páros gráf pedig csak kettő létezik: $K_{2,4}$ és a $K_{3,3}$-ból egy él törlésével kapott gráf. Az utóbbi nem lesz jó, mert (szintén az órán látottak szerint) a gráf minden fokának párosnak kell lennie. Ezekre a megállapításokra persze nem feltétlen van szükség egy teljes megoldáshoz, ezért pontokat nem rendelünk hozzá, de ha valaki nem kap maximális pontszámot a feladatra, akkor a fenti megállapításokért kaphat pontokat (melyekkel a maximális pontot természetesen nem lépheti át): mindhárom állításért adhatunk 1-1 pontot.

A (6 csúcsú és 8 élű) $K_{2,4}$ teljes páros gráf éles példa lesz mind a két algoritmushoz. (1 pont)
Mivel $K_{2,4}$ páros gráf, az optimum értéke az élszám. (1 pont)
Elképzelhető, hogy a második algoritmus futtatásakor az elsőként és a másodikként elhelyezendő csúcs is a kételemű osztályból való (1 pont)
és az is, hogy az egyiküket A-ba, másikukat B-be rakjuk, hiszen nincs köztük él. (2 pont)
A maradék csúcsok elhelyezésekor azoknak mindig egy A-beli és egy B-beli szomszédja lesz, így bármelyik osztályba kerülhetnek és a belőlük kiinduló éleknek (ami persze az összes él) éppen a fele fog A és B között futni, (2 pont)
így $K_{2,4}$ éles példa a második algoritmushoz. (1 pont)
Ahhoz, hogy belássuk, hogy $K_{2,4}$ az első algoritmushoz is éles példa, kezdjük a futtatást a második algoritmus iménti futtatása során kapott kettéosztással. (2 pont)
Ebben minden csúcsból ugyanannyi él megy keresztbe, mint belülre, így az (első) algoritmus azonnal le is áll és ugyanazt a kimenetet adja, mint a második algoritmus. (2 pont)