Többváltozós függvények

Egy m-változós $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ függvény értelmezési tartománya egy $A \subset \mathbb{R}^m$

Def: Az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$

a) belső pontja, ha A tartalmaz egy $\underline{a}$ középpontú m-dimenziós gömböt

b) határpontja, ha minden $\underline{a}$ középpontú gömb belemetsz A-ba és A komplementerébe is

m-dimenziós gömb:

$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : |\underline{x} - \underline{a}| cr\}$ $\qquad |\underline{x} - \underline{a}| = \sqrt{((x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2)}$

Megj.: A belső pont mindig a halmazban van, de a határpont nem feltétlenül

Def: az A halmaz <u>belseje</u> a belső pontokból,
<u>határa</u> a határpontokból áll

Def: Az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz <u>nyílt</u>, ha egyik határpontját sem tartalmazza, <u>zárt</u>, ha minden határpontját tartalmazza

Pl.: Sem nyílt, sem zárt sok van.
Nyílt és zárt halmaz: Ø és $\mathbb{R}^m$

Áll: A zárt <=> A^C nyílt

Tétel: $A \subset \mathbb{R}^m$ zárt <=> bármely 0 $\underline{x}_n \in A$, $\underline{x}_n \to \underline{x}$ sorozatra $\underline{x} \in A$

Itt $\underline{x}_n \to \underline{x}$ <=> $\underline{x}_{n,1} \to \underline{x}_1$, $\underline{x}_{n,2} \to \underline{x}_2$, … , $\underline{x}_{n,m} \to \underline{x}_m$ <=> minden $\epsilon > 0$-ra létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$ esetén $|\underline{x}_n - \underline{x}| < \varepsilon$

Def: $A \subset \mathbb{R}^m$ <u>korlátos</u>, ha befoglalható egy véges sugarú m-dimenziós gömbbe

Def: Az $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ pont egy <u>környezete</u> bármely halmaz, amely tartalmaz $\underline{a}$ középpontú gömböt

<u>δ sugarú környezete</u> a δ sugarú $\underline{a}$ középpontú nyílt gömb

Def: <u>Függvényhatárérték</u>

Legyen $f(x_1, \ldots, x_m)$ m-változós, $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ és tegyük fel, hogy $\underline{a}$ bármely környezetében D_f-nek végtelen sok pontja van. Akkor $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = L$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$.
$\underline{x} \in D_f$

Ha $\underline{x}$ közel van $\underline{a}$-hoz, de $\underline{x} \neq \underline{a}$ és f(x) definiált, akkor f(x) közel van L-hez

$\underline{a} \subset b$ környezete $\underline{a}$-nak, ha egy $\underline{a}$ körüli gömb részhalmaza G-nek

Ha $\underline{a}$ bármely környezetében D_f-nek ∞ sok pontja van, akkor:

$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(x) = L$ <=> minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan δ, hogy $0 < |\underline{x} - \underline{a}| < \delta$,
$\underline{x} \in D_f$ => $|f(x) - L| < \varepsilon$

Def: Parciális határérték

Legyen $x \subset D_f$, $\underline{a}$ bármely környezetében végtelen sok eleme van x-nek

$\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(x) = L$ <=> minden ε > 0-hoz létezik olyan δ > 0, hogy 0 <|$\underline{x}$ – $\underline{a}$| < δ, $\underline{x} \in X$ esetén |f(x) – L| < ε

Tétel: Ha $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(x) = L$, akkor minden parciális határérték is = L

Pl.: $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{xy}{(x^2+y^2)} \right)$ parciális határértékei

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim 0 = 0$$

x = {(x,0) x=0}

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Ezért $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)$ nem létezik, mert a két különböző parciális határérték nem azonos

Tétel: Határérék és alapműveletek

Ha $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f_1(\underline{x}) = L_1$, $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f_2(\underline{x}) = L_2$, és ha $D_{f_1} \cap D_{f_2}$-nek végtelen sok pontja esik $\underline{a}$ bármely környezetébe, akkor:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} c \cdot f(x) = c \cdot L_1$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f_1(x) \cdot f_2(x) = L_1 \cdot L_2$$

és $L_2 \neq 0$ esetén $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}$

Pl.: $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} \underline{x}_i = \underline{a}_i$

Pl.: $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - 4} \right) = \frac{0 - 0 \cdot 0 + 3}{0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 - 4} = \frac{-3}{4}$

Megj.: $\lim\limits_{(x,y) \to (\alpha,\beta)} ()$ helyett $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ y \to \beta}} ()$

Tétel: Rendőrszabály:

Ha f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) az $\underline{a}$ egy környezetében, $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(x) = \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} h(x) = L$, akkor

Pl.: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2+y^2+x^2y}{x^2+y^2}\right) = 1$, mert $|x^2y| \le |x||xy| \le |x|\cdot \dfrac{x^2+y^2}{2}$ miatt

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{|x|}{2} & \le & \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| & \le & \dfrac{|x|}{2} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Pl.: Polárkoordináták bevezetése:

$x = r \cdot \cos(\varphi)$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$

Akkor $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\,)=\lim\limits_{\substack{r\to(+0)\\ \varphi=\varphi(r)}}(\,)$

Polárkoordináták:

$$\lim_{\substack{r\to(+0)\\ \varphi=\varphi(r)}}\left(1+\frac{r^3\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}{r^2}\right)=1+\lim\left(r\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)=1+0$$

$$\frac{\lim r^2\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}{r^2}=\lim\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)$$

Pl.: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}\right)$ nem létezik, mert

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\sin(xy)}\cdot\left(\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}\right)$$

$\downarrow$ nem lehet határértéke, mert $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ -nek sincs, és

0 ha $\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ -nek lenne, akkor $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ -nek is lenne

Pl.: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nem létezik $f(x,y) = x\cdot\ln(y^2)$ $y \neq 0$

$= 0$ $y = 0$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=c\cdot y}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} c\cdot y\cdot\ln(y^2)=c\cdot\lim\left(\frac{\ln(y^2)}{\frac{1}{y}}\right)=$$

$$= (\text{l'H}) = c\cdot\lim\left(\frac{\frac{2y}{y^2}}{-\frac{1}{y^2}}\right)=-c\cdot\lim 2y=0$$

$\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y)=0$, a vízszintes egyenesekre a függvény azonosan 0, a 0 függvények határértéke is 0

Ha y → 0, akkor $\frac{1}{\ln(y^2)} \to 0$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=\frac{1}{\ln(y^2)}}} f(x,y)=1$$

Def: $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(x)=+\infty;(-\infty)$, ha minden K > 0-hoz létezik olyan δ > 0, hogy
$0 < |\underline{x} - \underline{a}| < \delta$,
$\underline{x}\in D_f$ esetén f(x) > K; (f(x) < - K)

Pl.: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)} = +\infty$

Def: $\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to+\infty}} f(x,y)=L$ <=> minden ε >0-hoz létezik olyan δ > 0 és létezik olyan K > 0,
hogy $|x - \alpha| < \delta$, y > K, $(x,y)\in D_f$ esetén $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=L$ <=> minden ε > 0-hoz létezik olyan K > 0, hogy x < -K, y >K,
$(x,y)\in D_f$ esetén $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=-\infty$ <=> minden M >0-hoz létezik olyan K > 0, hogy x > K, y >K,
$(x,y)\in D_f$ esetén f(x,y) < -M

A rendőrszabály minden határérték-típusra érvényes

Pl.: $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right)=0$, mert $\frac{|x|}{x^2-xy+y^2} \le \frac{|x|}{\left(\frac{3}{4}x^2\right)} = \frac{4}{3|x|} \to 0$

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)^2=\frac{x^2}{4}-xy+y^2$$

Def: Legyen $\underline{a}\in D_f$. Az <u>f(x)függvény folytonos a-ban,</u> ha létezik a $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})=f(\underline{a})$
f(x) folytonos a $G\subset D_f$-n, ha G-re megszorítva folytonos G minden pontjában, azaz ha minden $\underline{a}\in G$-n $\lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in G}} f(\underline{x})=f(\underline{a})$

Pl.: f(x,y) = $\frac{x^2\cdot y^2}{xy}$, ha xy ≠ 0
= 0 , ha xy = 0 nem folytonos (0,0)-ban

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x>0,\,y>0}} =1$ $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} =0$

Tétel: f(x) folytonos $\underline{a}$-ban <=> minden $\underline{x}_n \to \underline{a}$, $\underline{x}_n \in D_f$ szorzatra $f(\underline{x}_n) \to f(\underline{a})$
Tétel: Ha f($\underline{x}$) és g($\underline{x}$) folytonos $\underline{a}$-ban és $D_f \cap D_g$ -nek $\underline{a}$ bármely környezetében ∞ sok pontja van, akkor $c \cdot f\,;\, f \pm g\,;$ és $g(\underline{0}) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos $\underline{a}$-ban

Tétel: Ha f(x) folytonos $\underline{a}$-ban és g(t) egyváltozós függvény folytonos t = f($\underline{a}$)-ban, akkor g(f(x)) is folytonos $\underline{a}$-ban

Sőt! Tétel: Ha $g_1(x), \dots, g_r(x)$ folytonos $\underline{a}$-ban, $f(n_1, \dots, n_r)$ folytonos $(g_1(\underline{a}); \dots; g_r(\underline{a}))$-ban , akkor az $f(g_1(\underline{x}); \dots; g_r(\underline{x}))$ függvény is folytonos $\underline{a}$-ban

Pl.: f($\underline{x}$) = x_i folytonos $\mathbb{R}^m$ -en

Pl.: $\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ folytonos (0,0) kívül mindenhol, (0,0)-ban nem, mert nem létezik a határértéke

Pl.: f(x,y) = $\frac{x^3+y^3}{x \cdot y}$, ha xy ≠ 0
$= 0$, ha xy = 0 folytonos az xy ≠ 0 síknegyedben, mert a síknegyedek nyílt halmazok

$$(0,y_0)\text{-ban } f(0, y_0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{x^3+y^3}{x\cdot y} \underset{y_0\neq 0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{x^3+y^3}{x\cdot y} = \lim_{x\to 0} \Big(\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{\frac{x^2}{y_0}} + \underset{\substack{\downarrow\\ \text{divergens}}}{\frac{y^2}{x}}\Big) \text{ nem létezik}$$

Hasonló: $(x_0, 0)$-ban sem folytonos, ha $x_0 = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} = 0$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x\cdot y\neq 0}} \frac{x^3+y^3}{x\cdot y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^3+x^6}{x^3} = \lim_{x\to 0} 1+x^3 = 1$$

nincs határérték => nem folytonos a függvény

Pl.: f(x,y) = $(2x+3y)\cdot \ln(x^2+y^2)$
$= 0$, ha x = y = 0
folytonos-e (0,0)-ban?

$$0 = f(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0+\\ \varphi=\varphi(r)\\ x=r\cdot\cos(\varphi)\\ y=r\cdot\sin(\varphi)}} \Big(\underbrace{2\cdot\cos(\varphi)+3\cdot\sin(\varphi)}_{\text{korlátos}}\Big)\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\underbrace{r\cdot\ln(r^2)}} = 0$$

A függvény folytonos az origóban
Az (x,y) ≠ (0,0) pontokban is folytonos.

Tétel: <u>Bolzano-Waierstrass tétel:</u>
$\mathbb{R}^m$ -ben bármely korlátos pontsorozatból kiválasztható konvergens részsorozat

Tétel: Korlátos zárt halmazon folytonos m-változós függvények tulajdonságai:

Legyen f: A $\rightarrow$ $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ korlátos és zárt halmaz. Akkor:

a) f($\underline{x}$) korlátos

b) f($\underline{x}$) felveszi maximumát és minimumát A-n

Megj: A maximum és minimum megkeresése később

Def: Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f-nek. Az f függvény az i-edik változója szerint parciálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, ha létezik és véges a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \dots, a_m)-f(\underline{a})}{h}$$

Pl.: $f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h, b)-f(a,b)}{h}$

$f'_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a, b+h)-f(a,b)}{h}$

Pl.: $f'_y(a,b,c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h,c)-f(a,b,c)}{h} =$

Megj: $= g'(b)$, ahol $g(y) = f(a,y,c)$

Pl.: $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ $\qquad f'_x(1,2) = ?, f'_y(1,2) = ?$

$f'_x = \frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+y^3}}$; $\qquad f'_y(1,2) = \frac{3\cdot 1^2}{2\cdot\sqrt{1+8}}=\frac{1}{2}$

$f'_y = \frac{3y^2}{2\cdot\sqrt{x^3+y^3}}$; $\qquad f'_y(1,2) = \frac{3\cdot 4}{2\cdot\sqrt{1+8}}=2$

Pl.: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$= 0$, ha $x = y = 0$

$f'_x = \frac{y\cdot(x^2+y^2)-x\cdot y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-y\cdot x^2}{(x^2+y^2)^2}$, ha $(x,y) \neq (0,0)$

$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{0-0}{h}=0$

$f'_y = \frac{x\cdot(x^2+y^2)-x\cdot y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, ha $(x,y) \neq (0,0)$

$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$

Magasabb rendű parciális derivált

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f''_{yx}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}=f'''_{yxy}$$

$$f'''_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f'''_{xyz}=\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

Pl.: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ összes másodrendű parciális deriváltja:

$f'_x = 4x^3 - 8xy^2 \Rightarrow f''_{xx} = 12x^2 - 8y^2$

$\Rightarrow f''_{xy} = -16xy$

$f'_y = 4y^3 - 8x^2 y \Rightarrow f''_{yy} = 12y^2 - 8x^2$

$\Rightarrow f''_{yx} = -16xy$

Tétel: Young tétele – a parciális deriválások felcserélhetősége:

Ha f''_{xy} *és* f''_{yx} létezik (a,b) egy környezetében, és ha legalább az egyik folytonos (a,b)-ben, akkor:

$$f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b)$$

Pl.: $f(x,y) = \dfrac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}$

$= 0$, ha $x = y = 0$

Áll.: Erre a függvényre $f''_{xy}(0,0)=1\,;\, f''_{yx}(0,0)=0$

Differenciálhatóság:

$$f(\underline{x})=f(\underline{a})+A(\underline{x}-\underline{a})+\varepsilon(\underline{x}), \text{ ahol } \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{\varepsilon(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{a}|}=0$$

Def: Legyen $\underline{a} \in D_f$ belső pont. Az f(x) $\underline{a}$-ban (totálisan) differenciálható, ha létezik olyan A_i, hogy

$$f(\underline{x})=\underbrace{f(\underline{a})+\sum_{i=1}^{m} A_i\cdot(x_i-a_i)}_{g(x)}+\varepsilon(\underline{x}), \text{ ahol } \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{\varepsilon(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{a}|}=0$$

g($\underline{x}$) lineáris

Tehát $f(\underline{x})\approx f(\underline{a})+\sum_{i=1}^{m} A_i\cdot(x_i-a_i)$, a hiba sokkal kisebb $|\underline{x}-\underline{a}|$-nál

„ diffható => parciálisan diffható”

Tétel: Ha f(x) diffható $\underline{a}$-ban, akkor léteznek $f'_{x_i}(\underline{a})$ parciális deriváltak és $f'_{x_i}(\underline{a})=A_i$

Azaz: diffható függvény esetén

$$f(\underline{x})\approx f(\underline{a})+\sum f'_{x_i}(\underline{a})\cdot(x_i-a_i)$$

A hiba sokkal kisebb mint $|\underline{x}-\underline{a}|$

Biz:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\overbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \ldots, a_m)}^{x}-f(\underline{a})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{A_i\cdot h+\varepsilon(\underline{x})}{h}=A_i+\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(\underline{x})}{h}=$$

$$= A_i + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(\underline{x})}{\pm|\underline{x}-\underline{a}|}}_{0}$$

Azaz: $f'_{x_i}(\underline{a}) = A_i$

„diffható => folytonos”

Tétel: Ha f($\underline{x}$) diffható $\underline{a}$-ban, akkor folytonos a-ban

Biz: $$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum A_i \underbrace{(x_i - a_i)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\varepsilon(\underline{x})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \to f(\underline{a})$$ ha $\underline{x} \to \underline{a}$

Megj: „parc diffható ⟶ folytonos”

f(x,y) = $\frac{xy}{x^2+y^2}$

= 0 az origóban

Minden pontban parciálisan differenciálható x és y szerint. A függvény nem folytonos az origóban

f'_{x_i} folytonos $\to$ f differenciálható

Tétel: Ha minden f'_{x_i} folytonos $\underline{a}$-ban, akkor f (totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban

Pl.: f(x,y) = $ch\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

= 1 , ha x = y = 0

differenciálható-e (0,0)-ban?

$$f'_x = sh\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \frac{y\cdot\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = sh\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\frac{1-1}{x} = 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{f'_x(0,0)} \overset{?}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} sh\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0+\\ \varphi=\varphi(r)}} \underbrace{sh\underbrace{\left(\frac{\overbrace{r^2}^{0}\cdot\overbrace{\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}^{\text{korlátos}}}{r}\right)}_{0}}_{sh(0)=0}\cdot\underbrace{\sin^3(\varphi)}_{\text{korlátos}} = 0$$

f' folytonos (0,0)-ban

$$f'_y = sh\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\frac{1-1}{y} = 0$$

Megj: A feltétel nem szükséges

Pl.: $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$= 0$, ha $x = y = 0$

Akkor f'_x és f'_y nem folytonos (0,0)-ban, de diffható (0,0)-ban

Biz:

$$f'_x = \overbrace{2\cdot x\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{korlátos}}}^{\stackrel{0}{\uparrow}} + \quad (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos(\varphi)}\cdot\cos\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0+} -\cos(\varphi)\cdot\cos\left(\frac{1}{r}\right)$$

nincs határértéke a $\cos\left(\frac{1}{r}\right)$ egyre gyorsabb oszcillációja miatt

=> $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x$ nem létezik => f'_x nem folytonos (0,0) -ban

Pl.: kétváltozós függvény differenciálhatósága:

Ha f(x,y) differenciálható (a,b)-ben, akkor (a,b)-beli érintősík:

$$z - f(a,b) = f'_x(a,b)\cdot(x\text{-}a) + f'_y(a,b)\cdot(x\text{-}b)$$

Megj.: f differenciálható (a,b)-ben, akkor és csak akkor, ha grafikonja (a,b)-nél belesimul az érintősíkba

Tétel: f,g differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor $c\cdot f\ ;\ f\pm g\ ;\ \textit{és}\ g(\underline{a})\neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható $\underline{a}$-ban

Pl.: A változók differenciálhatók: f(x, y) = x, f(x,y,z) = y

Tétel: Ha f differenciálható $\underline{a}$-ban, és g(t) differenciálható f($\underline{a}$) -ban, akkor d(f(x)) is differenciálható $\underline{a}$-ban

Pl.: x·ln(xy) érintősíkja (1, e)-ben

$$z - \underbrace{f(1,e)}_{1} = \underbrace{f'_x(1,e)}_{2}\cdot(x\text{-}1) + \underbrace{f'_y(1,e)}_{\frac{1}{e}}\cdot(y\text{-}e)$$

$$f'_x = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = 1+1 = 2$$

$$f'_y = \frac{x}{xy} = \frac{1}{e}$$

$$z - 1 = 2(x\text{-}1) + \frac{1}{e}\cdot(y\text{-}e)$$

Def: Az f($\underline{x}$) $\underline{a}$ pontbeli gradiense:

$$\nabla f(\underline{a}) = \textit{grad}\, f(\underline{a}) = \left(f'_{x_1}(\underline{a}), f'_{x_2}(\underline{a}), \ldots, f'_{x_n}(\underline{a})\right)$$

Megj: Diffhatóság:

$$f(\underline{x})=f(\underline{a})+\sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\underline{a})(\underline{x}_i-\underline{a}_i)+\varepsilon(\underline{x}) \qquad \lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{a}|}=0$$

$$f(\underline{x})=f'(\underline{a})+\nabla f(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})+\varepsilon(\underline{x})$$

<u>Közvetett függvény deriválás:</u>

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad \frac{d}{dt} f(g_1(t); g_2(t); \ldots; g_m(t))=?$$

Tétel: Láncszabály, közvetett, többváltozós függvény deriválása

Ha $g_1(t)$; … ;$g_m(t)$ differenciálható t_0-ban, $f(\underline{x})$ totálisan differenciálható a ($g_1(t_0)$; … ; $g_m(t_0)$) pontban, akkor $f(g_1(t), \ldots, g_m(t))$ differenciálható t_0-ban és

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t); \ldots; g_m(t))=f'_{x_1}(g(t_0))\cdot g'_1(t_0)+f'_{x_2}(g(t_0))\cdot g'_2(t_0)+\ldots+f'_{x_m}(g(t_0))\cdot g'_m(t_0)$$

Formálisan:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{d x_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{d x_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{d x_m}{dt}$$

Pl.: f(u,v)

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t))=f'_u(g(t), h(t))\cdot g'(t)+f'_v(g(t), h(t))\cdot h'(t)$$

Pl.: w = xy $\qquad$ x = cos(t), y = sin(t)

$$\frac{dw}{dt}=\underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{y=\sin(t)}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-\sin(t)}+\underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{x=\cos(t)}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\cos(t)}=\cos^2(t)-\sin^2(t)$$

Közvetlenül:

w = sin(t)·cos(t) => w'(t) = $\cos^2(t)$ +($-\sin^2(t)$)

Tétel: Ha $g_i(t_1; \ldots; t_r)$ totálisan differenciálható $t_0\in\mathbb{R}^r$-ben és $f(\underline{x})$ totálisan differenciálható a ($g_1(t_0)$; … ; $g_m(t_0)$)-ban, akkor $f(g_1(t); \ldots; g_m(t))$ is totálisan differenciálható t_0-ban és $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial t_j}=\sum_{i=0}^{m} f_{x_i}(g(\underline{t}_0)\cdot\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(\underline{t}_0))$

Pl.: w = xy + z^2 $\qquad$ $x=\frac{r}{s},\ y=r^2+\ln(s),\ z=2r$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{r^2\cdot\ln(s)}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\frac{1}{s}}+\underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{\frac{r}{s}}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{2r}+\underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{4r}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial r}}_{2}=\frac{r^2+\ln(s)}{s}+\frac{2r^2}{s}+8r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{r^2+\ln(s)}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial s}}_{-\frac{r}{s^2}}+\underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{\frac{r}{s}}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial s}}_{\frac{1}{s}}+\underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{4r}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial s}}_{0}=\frac{-r^3+\ln(s)}{s^2}+\frac{r}{s^2}+0$$

Pl.: f(x,y) differenciálható => $\displaystyle\frac{d}{dx} f(x,x)=\frac{\partial}{\partial x}\cdot f(x,x)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot f(x,x)$

$$\left[g(x)=x,\ h(x)=x \Rightarrow \frac{d}{dx}(x,x)=f'_x(x,x)+f'_y(x,x)\right]$$

$\frac{d}{dx}$ f(x,x) az x → f(x,x) deriváltja

$\frac{\partial}{\partial x}$ f(x,x) a t → f(t,x) deriváltja a t = x helyen

$\frac{\partial}{\partial y}$ f(x,x) az y → f(x,y) deriváltja az y = x helyen

Iránymenti deriválás

Legyen $\underline{e}\in\mathbb{R}^m, |\underline{e}|=1$ az f($\underline{x}$) $\underline{e}$ irányú iránymenti deriváltja $\underline{a}$-ban

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\underline{a}-t\cdot\underline{e})-f(\underline{a})}{t}$$

Megj: g(t) = f($\underline{a}$ – t$\underline{e}$) jelöléssel $\frac{f(\underline{a}-t\cdot\underline{e})-f(\underline{a})}{t}=\frac{g(t)-g(0)}{t}$

Ezért $D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = g_t'(0)$

Tétel: Ha f($\underline{x}$) totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor minden irány mentén is is differenciálható, és $D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \mathit{grad}\,(\underline{a})\cdot\underline{e}$

Biz:

$$g(t)=f(\underline{a}+t\cdot\underline{e})=f(a_1+t\cdot e_1+a_2+t\cdot e_2+\ldots+a_m+t\cdot e_m) \Rightarrow g'=f'_{x_1}\cdot\underbrace{x_1'}_{e_1}+f'_{x_2}\cdot\underbrace{x_2'}_{e_2}+\ldots+f'_{x_m}\cdot\underbrace{x_m'}_{e_m}=$$

$$= \mathit{grad}\, f(\underline{a}+t\cdot\underline{e})\cdot\underline{e} \Rightarrow g'(0)=\mathit{grad}\, f(\underline{a})\cdot\underline{e}$$

Pl.: f(x,y) = x·sin(y) $\underline{v}=3\underline{i}+4\underline{j}$ irány menti deriváltja az $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ helyen

f(x,y) totálisan differenciálható a $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$-ban ,

$$\underline{e}=\frac{3}{5}\cdot\underline{i}+\frac{4}{5}\cdot\underline{j} \Rightarrow D_{\underline{e}} f\left(1,\frac{\pi}{3}\right)=f'_x\left(1,\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}+f'_y\left(1,\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot\sqrt{3}+4}{10}$$

$$f'_x=\sin y \Rightarrow f'_x\left(1,\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_y=x\cdot\cos(y) \Rightarrow f'_y\left(1;\frac{\pi}{3}\right)=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

Pl.: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (0,0)-beli irány menti deriváltja

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\frac{|x|-0}{x} \Rightarrow \text{nem létezik}$$

$$D_{\underline{e}} f(0,0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(t\cdot e_1, t\cdot e_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{(t\cdot e_1)^2+(t\cdot e_2)^2}}{t}=\sqrt{e_1^2+e_2^2}=1$$

Adott pontban milyen irányban a legnagyobb/legkisebb az iránymenti derivált?

Tétel: Ha f(x) totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor $D_{\underline{e}} f(\underline{a})$ értéke $-|\mathit{grad}\, f(\underline{a})|$ és $|\mathit{grad}\, f(\underline{a})|$ között van,

maximális, ha $\underline{e}\,||\,\mathit{grad}\, f(\underline{a})$

minimális, ha $\underline{e}\,||\,-\mathit{grad}\, f(\underline{a})$

Biz: $D_{(\underline{e})} f(\underline{a})=\mathit{grad}\, f(\underline{a})\cdot\underline{e}=|\mathit{grad}\, f(\underline{a})|\cdot\cos(\alpha)$

Megj: $f'_{x_i}(\underline{a})=D_{\underline{e}_i} f(\underline{a})$ $\underline{e}_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$

Implicit megadású függvények

Egy F(x,y)=0 egyenletből kifejezhető-e y?
Azaz: létezik-e olyan y(x), hogy F(x, y(x)) = 0

1. Tétel: (létezés és folytonosság)
Legyen F($\underline{x}$, y) m+1 változós függvény. Tegyük fel:
a) F folytonos ($\underline{a}$, b) egy környezetében
b) F'_y létezik és ≠0 ($\underline{a}$,b) egy környezetében
c) F($\underline{a}$, b) = 0
Akkor az $\underline{a}$ egy környezetében létezik egy és csak egy y($\underline{x}$) folytonos függvény, amelyre y($\underline{a}$) = b és F($\underline{x}$, y($\underline{x}$)) = 0 az $\underline{a}$ egy környezetében

2. Tétel: (Differenciálhatóság)
Ha a), b), c)-n kívül az is igaz, hogy
d) F totálisan differenciálható ($\underline{a}$,b)-ben, akkor y(x) is totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban és

$$y'_{x_i}(\underline{a}) = \frac{F'_{x_i}(\underline{a}, b)}{F'_y(\underline{a}, b)}$$

Biz: Csak a képlet

$$0 = F(\underline{x}, y(\underline{x})) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i} F(\underline{x}, y(\underline{x})) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m, y(\underline{x})) =$$

$$= F'_{x_i}(\underline{x}, y(\underline{x})) \cdot 1 + F'_y(\underline{x}, y(\underline{x})) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i}(\underline{x})$$

Speciel: ($\underline{x}$ = $\underline{a}$)

$$0 = F'_{x_i}(\underline{a}, b) + F'_y(\underline{a}, b) \cdot y'_{x_i}(\underline{a})$$

Pl.: $f(x,y,z) = arc\,tg\left(\frac{z}{y}\right) + e^{xz} - z - \frac{\pi}{4}$

a (0,1) pontnak van olyan környezete, és van olyan z(x,y) differenciálható függvény, amelyre z(0,1) = 1, F(x,y,z(x,y)) = 0
kérdés: $z'_x(0,1), z'_y(0,1)$
Biz: $\underline{a}$ = (0,1), b = 1
a) F folytonos (0,1,1) egy környezetében
b) F' ≠ 0, $F'_z = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{z^2}{y^2}} + x \cdot e^{xz} - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ x=0 \\ y=z=1}}{=} \frac{1}{2} + 0 - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$

F'_z folytonos => $F'_z \neq 0$ egy környezetben

c) $F(0,1,1) = arc\,tg\,1 + e^0 - 1 - \frac{\pi}{4} = 0$

d) F differenciálható (0,1,1)-ben
mind a 4 feltétel teljesül => létezik z(x,y)

$$z'_x(0,1) = -\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_y(0,1,1)}$$

$$z'_y(0,1) = -\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)}$$

Pl.: $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ ellipszis érintője (2,1)-ben?

$$\left.\begin{cases} F(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-2 \text{ diffható} \\ F(2,1)=0 \\ F'_x(2,1)=\frac{x}{2}=1\neq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (\text{y(x) diffható a 2 pontban}) \Rightarrow y'(2)=-\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)}=-\frac{1}{2}$$

=> érintő: $y-1=-\frac{1}{2}\cdot(x-2)$ $\qquad y'(\underline{a})=-\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}$

$$y-b=y'(a)\cdot(x-a)=\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}\cdot(x-a) \Rightarrow F'_x(a,b)\cdot(x-a)+F'_y(a,b)\cdot(y-b)=0$$

az F(x,y) = 0 görbe érintőegyenese (a,b)-ben

Tétel: Implicit megadású felület érintősíkja

Legyen Φ(x,y,z) totálisan differenciálható (a,b,c)-ben, Φ(a,b,c) = 0. Akkor a Φ(x,y,z) = 0 implicit egyenlettel megadott felület (a,b,c) pontbeli érintősíkja

$$\Phi'_x(a,b,c)(x-a)+\Phi'_y(a,b,c)(y-b)+\Phi'_z(a,b,c)(z-c)=0$$

Az érintősík normálvektora: $\underline{n}$ = grad Φ (a,b,c)

Pl.: Az $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ felület (ellipszoid)

$2x + 3y + 2z = 8$ síkkal párhuzamos érintősíkja?

grad Φ || (2,3,2), $\quad \Phi = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 9$

grad Φ = (2x, 6y, 4z)

$$\left.\begin{cases} 2x=2\lambda & x=\lambda \\ 6y=3\lambda & 2y=\lambda=x \\ 4z=2\lambda & 2z=\lambda=x \end{cases}\right\}\left(x,\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right) \text{ alakúnak kell lennie a keresett érintési pontnak}$$

$$0=\Phi\left(x\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)=x^2\cdot\left(\underbrace{1+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}_{\frac{9}{4}}\right)-9 \qquad x^2=4 \Rightarrow \begin{Bmatrix} (2,1,1) \\ (-2,-1,-1) \end{Bmatrix}$$

(2,1,1) pontbeli érintősík $\qquad 2(x-2)+3(y-1)2(z-1)=0$

(-2, -1, -1) pontbeli érintősík $\qquad 2(x+2)+3(y+1)2(z+1)=0$

Def: Differenciál

Ha f($\underline{x}$) diffható $\underline{a}$-ban, akkor $\underline{a}$ bázispontú <u>differenciálja</u> az $\underline{x}$ helyen:

$$df(\underline{a},\underline{x})=f'_{x_1}(\underline{a})(x_1-a_1)+\ldots+f'_{x_m}(\underline{a})(x_m-a_m)=grad\, f(\underline{a})(\underline{x}-\underline{a})$$

A differenciálhatóság definíciója szerint:

$$f(\underline{x})=f(\underline{a})+df(\underline{a},\underline{x})+\varepsilon(\underline{x}) \qquad \lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{a}|}=0$$

Azaz $f(\underline{x})-f(\underline{a})\approx df(\underline{a},\underline{x})$ $\qquad$ A hiba ε($\underline{x}$)

Milyen pontos a közelítés?

Tétel: Legyen $T=\{\underline{x}: |x_i-a_i|\le\delta_i\ \forall i\}$

Tegyük fel, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak T-n és

$$M=\max_{1\le i,j\le m}\ \max_{\underline{x}\in T}|f''_{x_i x_j}(\underline{x})|$$

Akkor $\left|f(\underline{x})-f(\underline{a})-df(\underline{a},\underline{x})\right| \le \frac{M}{2}\cdot m\cdot\left|\underline{x}-\underline{a}\right|^2$

Pl.: $f(x,y,z)=x^2-xy+3\sin(z)$
a) írjuk fel a (2,1,0) bázispontú differenciált
b) a differenciállal adjunk becslést f(2.01, 0.98, 0.01) értékére és becsüljük a közelítés hibáját

a) $$df((2,1,0),(x,y,z))=\underbrace{f'_x(2,1,0)}_{2x-y=3}(x-2)+\underbrace{f'_y(2,1,0)}_{-x=-2}(y-1)+\underbrace{f'_z(2,1,0)}_{3\cos(z)=3}\cdot z =$$
$$= 3(x-2)-2(y-1)+3z$$

b) $$f(2.01, 0.98, 0.01)\approx\underbrace{f(2,1,0)}_{2}+\underbrace{df((2,1,0),(2.01, 0.98, 0.01))}_{3\cdot 0.01+(-2)\cdot(-0.02)+3\cdot 0.01}=2.1$$

c) $$f''_{xx}=2,\ f''_{xy}=-1,\ f''_{yy}=0,\ f''_{xz}=0,\ f''_{yz}=0,\ f''_{zz}=-3\cdot\sin(z) \Rightarrow M\le 3,\ m=3$$
$$\text{hiba}\le\frac{m\cdot M}{2}\cdot|\underline{x}-\underline{a}|^2=\frac{9}{2}\cdot(\underbrace{0.01^2+0.02^2+0.01^2}_{6\cdot 10^{-4}})=0.0027$$
az eredmény 2.1 ± 0.0027

Def: magasabb rendű totális differenciálhatóság
f($\underline{x}$) r-szer differenciálható $\underline{a}$-ban, ha az összes (r-1)-ed rendű parciális deriváltja létezik $\underline{a}$ egy környezetében és differenciálható $\underline{a}$-ban

Pl.: f(x,y) kétszer differenciálható (1,2)-ben, ha f'_x és f'_y differenciálhatók (1,2)-ben
háromszor differenciálható, ha $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ differenciálhatók (1,2)-ben

Def: Magasabb rendű differenciálok
$$d^2f(\underline{a},\underline{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\underline{a})(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$
$$d^3f(\underline{a},\underline{x})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f'''_{x_i x_j x_k}(\underline{a})(x_i-a_i)(x_j-a_j)(x_k-a_k)$$

Áll: Ha g(t) = f($\underline{a}$ + t($\underline{x}$ – $\underline{a}$)), akkor $d^k(\underline{a},\underline{x})=g^{(k)}(0)$

Pl.: f(x,y) = sin(xy)
df, d^2f, d^3f az (1, π) bázispntban
$$df((1,\pi),(x,y))=\underbrace{f'_x(1,\pi)}_{y\cdot\cos(xy)=-\pi}\cdot(x-1)+\underbrace{f'_y(1,\pi)}_{x\cdot\cos(xy)=-1}\cdot(y-\pi)=-\pi(x-1)-(y-\pi)$$

$$d^2f((1,\pi),(x,y))=\underbrace{f''_{xx}(1,\pi)}_{-y^2\cdot\sin(xy)=0}\cdot(x-1)^2+\underbrace{2\cdot f''_{xy}(1,\pi)}_{\cos(xy)-xy\cdot\sin(xy)=-1}\cdot(x-1)(y-\pi)+\underbrace{f''_{yy}(1,\pi)}_{-x\cdot\sin(xy)=0}\cdot(y-\pi) =$$
$$= -2\cdot(x-1)(y-\pi)$$
$$d^3f((1,\pi),(x,y))=\underbrace{f'''_{xxx}(1,\pi)}_{y^3\cdot\cos(xy)=\pi^3}\cdot(x-1)^3+\underbrace{3\cdot f'''_{xxy}(1,\pi)}_{-2y\cdot\cos(xy)+xy^2\cdot\cos(xy)=-\pi^2}\cdot(x-1)^2\cdot(y-\pi) +$$
$$+ \underbrace{3\cdot f'''_{xyy}(1,\pi)}_{-2x\cdot\sin(xy)-x^2\cdot y\cdot\cos(xy)=\pi}\cdot(x-1)\cdot(y-\pi)^2+\underbrace{f'''_{yyy}(1,\pi)}_{-x^3\cdot\cos(xy)=1}\cdot(y-\pi)^3 =$$
$$= \pi^3\cdot(x-1)^3-3\cdot\pi^2\cdot(x-1)^2(y-\pi)+3\cdot\pi(x-1)(y-\pi)^2+(y-\pi)^3$$

Def: f($\underline{x}$) n-ed fokú Taylor-polinomja $\underline{a}$ bázisponttal

$$T_n(\underline{x})=f(\underline{a})+df(\underline{a},\underline{x})+\frac{d^2f(\underline{a},\underline{x})}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(\underline{a},\underline{x})}{n!}$$

Megj: Egyváltozós f-re

$$df(a,x)=f'(a)\cdot(x-a)$$
$$d^2f(a,x)=f^{(2)}(a)\cdot(x-a)^2$$
$$\vdots$$
$$d^nf(a,x)=f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$$

Tétel: Taylor-polinom hibája

Ha f (n+1) -szer totálisan differenciálható az [$\underline{a}$, $\underline{x}$] szakasz pontjaiban, akkor létezik olyan $\underline{c}$ pont az [$\underline{a}$, $\underline{x}$] szakaszon, hogy

$$f(\underline{x})-T_n(x)=\frac{d^{(n+1)}f(\underline{c},\underline{x}-\underline{a}+\underline{c})}{(n+1)!}\approx |\underline{x}-\underline{a}|^{n+1}$$

Szélsőérték keresés

Def: f($\underline{x}$)-nek $\underline{a}$-ban lokális minimum helye van, ha $\underline{a}$ egy környezetében $f(\underline{x})\geq f(\underline{a})$
(lokális maximum helye) $(f(\underline{x})\geq f(\underline{a}))$

Hogyan ismerhetők fel a lokális szélsőértékhelyek?

Pl.: m=1 változóban

1) a-ban lokális minimum van => f'(a) = 0, f''(a) ≥ 0
(maximum) (f'(a) =0, f'' (a) ≤ 0)

2) f'(a) = 0, f''(a) > 0 => a-ban lokális minimum van
(f'(a) = 0, f''(a) < 0) (maximum)

több változó: f' gradiensvektor

$$f=\left(f''_{x_i x_j}\right)_{i,j=1}^{m}$$ szimmetrikus mátrix

Def: Az $\underline{\underline{A}}$ mxm-es mátrix pozitív definit, ha $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}$ kvadratikus alak > 0, ha $\underline{x}\neq\underline{0}$
negatív definit < 0, ha $\underline{x}\neq\underline{0}$
pozitív szemidefinit, ha $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}\geq 0$, minden $\underline{x}$-re
negatív szemidefinit, ha $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}\leq 0$, minden $\underline{x}$-re
indefinit, ha $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}$ > 0 és < 0 értéket is felvesz

Tétel: Ha $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus, akkor az $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\underline{x}$ kvadratikus alak:

a) pozitív definit <=> minden $\lambda_i > 0$
b) negatív definit <=> minden $\lambda_i < 0$
c) pozitív szemidefinit <=> minden $\lambda_i \geq 0$
d) negatív szemidefinit <=> minden $\lambda_i \leq 0$
e) indefinit <=> létezik $\lambda_i > 0$ és $\lambda_j < 0$

Tétel: Legyen f($\underline{x}$) kétszer diffható $\underline{a}$-ban. Akkor

a) Ha $\underline{a}$-ban lokális minimum (maximum) van, akkor grad f ($\underline{a}$) = $\underline{0}$ és
$\underline{\underline{A}}=\left[f''_{x_i x_j}(\underline{a})\right]$ pozitív (negatív) szemidefinit

a') Ha grad f ($\underline{a}$) = $\underline{0}$ és $\underline{\underline{A}}$ pozitív (negatív) definit, akkor $\underline{a}$-ban lokális minimum (maximum) van

b) Ha $\underline{\underline{A}}$ indefinit, akkor $\underline{a}$-ban nincs lokális szélsőérték

Eldöntetlen eset: ha van $\lambda = 0$ sajátértéke $\underline{\underline{A}}$-nak és a többi sajátérték előjele egyforma

Spec: m = 2 változós f(x,y) függvény szélsőértékei $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$; det $\underline{\underline{A}} = \lambda_1\lambda_2$

Ezért indefinit <=> det < 0

poz. vagy neg. definit <=> det > 0

pozitív definit <=> det > 0 és $a_{11} > 0$

negatív definit <=> det > 0 és $a_{11} < 0$

csak kétváltozós fv-ekre

Pl.: $9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$ lokális szélsőértékhelyei

a) $0 = f'_x = 27x^2 - 4y$ $\qquad x = \frac{y^2}{4} = \frac{\left(\frac{27x^2}{4}\right)^2}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot x^4$

$0 = f'_y = y^2 - 4x$ $\qquad y = \frac{27}{4}x^2$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54x & -4 \\ -4 & 2y \end{bmatrix}$$

(0,0)-ban $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, det = -16, nincs lokális szélsőérték

$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$-ban $\begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -4 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$, det = 64-16 = 48 > 0, a_{11} = 24 > 0=>lokális minimum van

Def: f(x,y)-nak (a,b)-ben <u>nyeregpontja van</u>, ha $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, de nincs lokális szélsőértéke

<u>Tartományi szélsőérték</u>

$A \subset \mathbb{R}^m$ korlátos, zárt f: A $\to$ $\mathbb{R}$ folytonos => felveszi a maximumát és minimumát

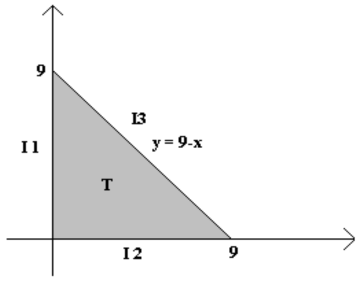
Hogyan keressük meg?

a) Ha a szélsőértékhely A belsejében van => lokális szélsőértékhely is => grad f = $\underline{0}$
Tehát a belső pontok közül a grad f = 0 megoldásai a szélsőértékhely jelöltek

b) Ha egy szélsőértékhely A határán van, akkor a határt alkalmasan paraméterezve felírható egy (m – 1) változós függvény, amelynek a pontban szélsőértéke lesz. Ezt megoldva adódnak a szélsőértékhely jelöltek

c) Az a), b)-ben talált pontokat beírjuk f-be

Pl.: $f(x,y) = 2x + 2y - x^2 + y^2$ szélsőértékei a $T = \{(x,y) : 0 \le x \le 9, 0 \le y \le 9 - x\}$ tartományban



a) belül $\left.\begin{cases} 0 = f'_x = 2 - 2x \\ 0 = f'_y = 2 + 2y \end{cases}\right\} (1, -1)$ nem elem T-nek

Ezért belül nincs szélsőértékhely

b) I_1-en $f(0,y) = 2y + y^2$, $\dfrac{d}{dy} = 2 + 2y$

(0,0), (0,9)

I_2-n $f(x,0) = 2x - x^2$, $\dfrac{d}{dx} = 2 - 2x$

(1,0), (0,0), (9,0)

I_3-on $f(x,9-x) = 2x + 2(9-x) - x^2 + (9-x^2) = 99 - 18x$

$\dfrac{d}{dx} = -18$ (9,0), (0,9)

$f(0,0) = 0$, $f(0,9) = 99 \to$ max
$f(9,0) = -63 \to$ min $f(1,0) = 1$

<u>Integrálszámítás</u>

Def: $A \subset \mathbb{R}^2$ $\displaystyle\int_A\int f(x,y)\,dx\,dy$

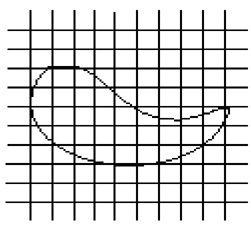
A-t lefedjük négyzetráccsal, minden Δ_i-vel jelölt négyzetlapon $m_i = \inf\limits_{\Delta_i \cap A} f$

$M_i = \sup\limits_{\Delta_i \cap A} f$

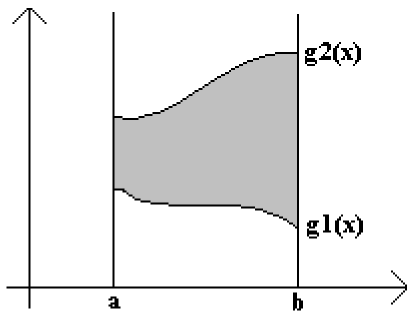
Alsó közelítő összeg $s = \sum m_i |\Delta_i|$

Felső közelítő összeg $S = \sum M_i |\Delta_i|$

Ha a négyzetháló finomításával s és S közös I határértékhez tartanak, akkor f <u>integrálható</u> A-n és $\displaystyle\int_A\int f(x,y)\,dx\,dy = I$

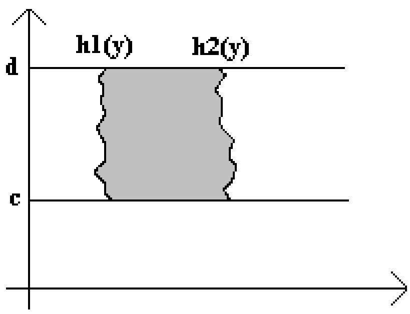


Def: Normáltartomány



$g_1(x) \leq g_2(x)$ $\qquad A=\{(x,y): a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

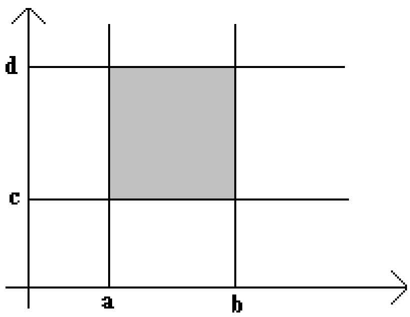
Tétel: Ilyenkor $\displaystyle \int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$



$A=\{(x,y): c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Tétel: Ilyenkor $\displaystyle \int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$

Spec:



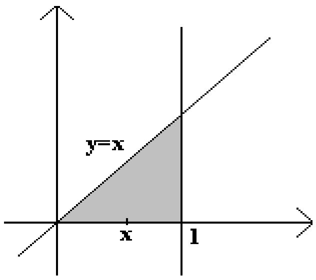
$$\int_{[a,b]}\int_{\times [c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Pl.: $\displaystyle \int\int_{[0,1]^2} \sin(x+y)\,dx\,dy = \int_{\substack{0\\(x)}}^1 \left(\int_{\substack{0\\(y)}}^1 \sin(x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[-\cos(x+y)\right]_{y=0}^1 dx =$

$\displaystyle = \int_0^1 \left(\cos(x) - \cos(1+x)\right) dx = \left[\sin(x) - \sin(1+x)\right]_{x=0}^1 = \sin(1) - \sin(2) - \left(\sin(0) - \sin(1)\right) =$

$= 2 \cdot \sin(1) - \sin(2)$

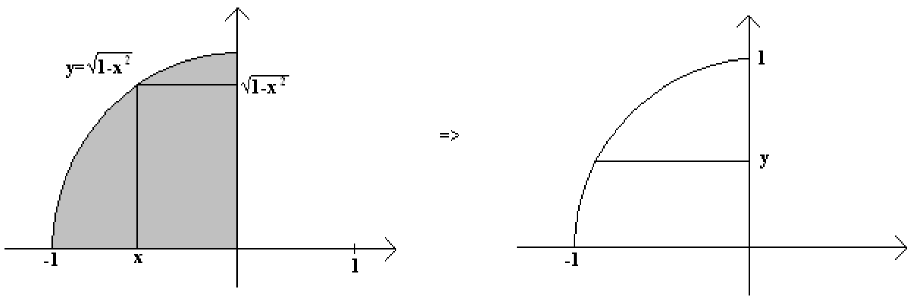
Pl.: $\int\int_A \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,dy \;=$ A az x tengely, az x=1 és az x = y által határolt tartomány



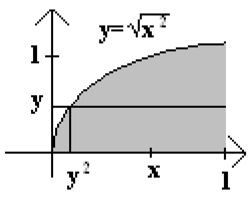
$$= \int_{\substack{0\\(x)}}^{1}\left(\int_{\substack{0\\(y)}} \frac{\sin(x)}{x}\,dy\right)dx=\int_0^1(\sin(x)\,dx)=[-\cos(x)]_0^1=1-\cos(1)$$

<u>Integrálások sorrendjének felcserélése</u>:

Pl.: $$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\substack{0\\(y)}}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx\right)dy$$



Pl.: $$\int_0^1\left(\int_{y^2}^{1} y\cdot e^{-x^2}\,dx\right)dy=\int_{\substack{0\\(x)}}^{1}\left(\int_{\substack{0\\(y)}}^{\sqrt{x}} y\cdot e^{-x^2}\,dy\right)dx=\int_0^1 \frac{x}{2}\cdot e^{-x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{4}\cdot e^{-x^2}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1-\frac{1}{e}}{4}$$



Pl.: $$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx=\ln(2) \quad ?$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx=\int_0^1\left(\underbrace{\int_0^1 x^y\,dy}_{\left[\frac{x^y}{\ln(x)}\right]_{y=0}^{1}}\right)=\int_0^1\left(\underbrace{\int_0^1 x^y\,dx}_{\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1-0}{y+1}}\right)=\int_0^1\frac{1}{y+1}\,dy=[\ln(y+1)]_0^1=\ln(2)$$

Tétel: Helyettesítéses integrálás:

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\varphi_1(u,v) \\ y=\varphi_2(u,v)}}{=} ?$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt}}{=} \int_{\varphi} (a) ¿ \varphi(b) f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$ egy változónál

$B, A \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{\varphi}: B \to A$ kölcsönösen egyértelmű, $\underline{\varphi} \in C^{1,}$ $f(x,y)$ integrálható A-n.

Akkor $\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_B f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)) \cdot |\det \underline{J}|\,du\,dv$, ahol

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \varphi_1' u & \varphi_1' v \\ \varphi_2' u & \varphi_2' v \end{bmatrix}$$ <u>Jacobi-mátrix</u>

$$\underbrace{\int\int_A f(x,y)}_{m} \underbrace{dx\,dy}_{\substack{\text{négyzetek} \\ \text{alapterülete}}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=\varphi_1(u,v) \\ y=\varphi_2(u,v) \\ dxdy=|\det \underline{J}|\,du\,dv}}{=} \underbrace{\int\int_B f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))}_{m} \cdot \underbrace{|\det \underline{J}|\,du\,dv}_{\substack{\text{alapparalelogramma} \\ \text{területe}}}$$

Biz: $\underline{\varphi}$ kicsiben lineáris, melynek mátrixa $\underline{\underline{J}}$, ezért itt minden terület |det $\underline{\underline{J}}$|-szeresére változik

Pl.: Polárkoordinátás helyettesítés

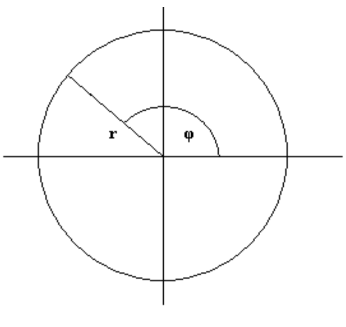
$$x = r\cdot\cos(\varphi) \qquad \underline{\underline{J}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} x_r' & x_\varphi' \\ y_r' & y_\varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$y = r\cdot\sin(\varphi)$$

det $\underline{\underline{J}} =$ $r\cdot\cos^2(\varphi) + r\cdot\sin^2(\varphi) = r$

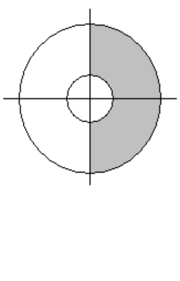
Pl.: Körlap területe

$$|T| = \int\int_T dx\,dy = \int_{x^2+y^2} \int_{¿\mathbb{R}^2} dx\,dy = \int_{[0,R]x} \int_{[0,2\pi]} r\,dr\,d\varphi = \int_{\substack{0 \\ (r)}}^{R} \left(\int_{\substack{0 \\ (\varphi)}}^{2\pi} r\,d\varphi \right) dr = \int_0^R 2\pi\cdot r\,dr = [\pi\cdot r^2]_0^R = 2\pi\cdot R^2$$



Pl.:

$$\int_{\substack{1\le x^2+ \\ x\ge 0}} \int_{y^2 \le 4} \frac{x-y}{x^2+y}\,dx\,dy = \int_{\substack{1 \\ (x)}}^{2} \left(\int_{\substack{-\frac{\pi}{2} \\ (\varphi)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cdot(\cos(\varphi)-\sin(\varphi))}{r^2} \cdot r\,d\varphi \right) dr = \underbrace{\int_1^2 [\sin(\varphi)+\cos(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,dr}_{2} = 2$$

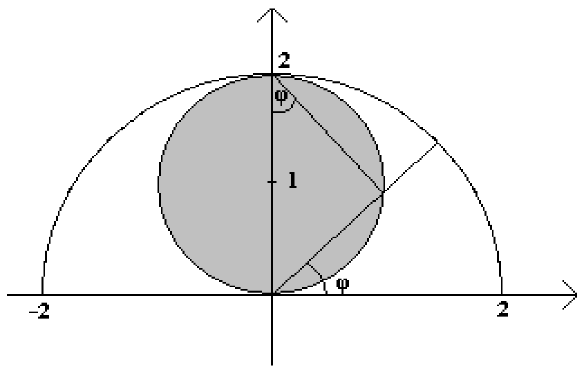


Pl.:

$$\iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{\substack{0\\(\varphi)}}^{\pi} \left(\underbrace{\int\limits_{\substack{0\\(r)}}^{2\sin(\varphi)} r^2\cdot r\,dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin(\varphi)}} \right) d\varphi \quad =$$

$$= \int_0^{\pi} 4\cdot\sin^4(\varphi)\,d\varphi \underset{\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \int_0^{\pi} (1-\cos(2\varphi))^2\,d\varphi = \int_0^{\pi} \Big(1-\cos(2\varphi)+\underbrace{\cos^2(2\varphi)}_{\frac{1+\cos(4\varphi)}{2}}\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2}-2\cos^2(\varphi)+\frac{1}{2}\cdot\cos(4\varphi)\right) d\varphi = \frac{3}{2}\cdot\pi + \left[\sin\frac{(4\varphi)}{8}-\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi} = 0$$



Pl.: $y^2=x \quad y^2=\frac{x}{2}$, $\quad y=\frac{x}{2} \quad y=\frac{x}{3}$ görbék közötti terület

$$\frac{1}{2}\le u=\frac{y^2}{x}\le 1 \qquad\qquad |T| = \iint\limits_{T} dx\,dy = \int\limits_{\substack{2\\(u)}}^{1}\left(\int\limits_{\substack{\frac{1}{3}\\(v)}}^{\frac{1}{2}} |det\,\underline{J}|\,dv\right)du$$

$$\frac{1}{3}\le v=\frac{y}{x}\le\frac{1}{2}$$

Pl.:

$$\frac{1}{2}\le u=\frac{y^2}{x}\le 1 \qquad \underline{J}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & -2\cdot\frac{u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\le v\le\frac{y}{x}\le\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{u}{v^2} \qquad det\,\underline{J}=-\frac{u}{v^4}+2\cdot\frac{u}{v^4}=\frac{u}{v^4}$$

$$y=\frac{u}{v}$$

$$|T|=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{u}{v^4}\,dv\right)du=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}u\cdot du\right)\cdot\left(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{v^4}\right)=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\cdot\left[-\frac{1}{3\cdot v^3}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3^2-2^2}{3}=\frac{9}{8}$$

Pl.: $\mathrm{T}=\left\{(x,y): -3\le x\le 3\,;\, 0\le y\le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right\}$

$$0$$
$$(r)$$

$$\int\limits_T\int x^2\cdot y\,dx\,dy=\int\limits_{\substack{-3\\(x)}}^{3}\left(\int\limits_{\substack{0\\(y)}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} x^2\cdot y\,dy\right)dx \underset{\substack{\uparrow\\ x=3\mathrm{r}\cdot\cos(\varphi)\\ y=2\mathrm{r}\cdot\sin(\varphi)\\ 0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ |det\,\mathrm{J}|=6\mathrm{r}}}{=} \int\limits_{¿} 1\left(\int\limits_{\substack{0\\(\varphi)}}^{\pi} 18\cdot r^3\cdot\cos^2(\varphi)-\sin(\varphi)\cdot 6\mathrm{r}\,d\varphi\right)dr =$$

$$=\left(\underbrace{\int_0^1 18\cdot 6\cdot r^4\,dr}_{\substack{\left[\frac{18\cdot 6}{5}\cdot r^5\right]_0^1=\\ =\frac{18\cdot 6}{5}=\frac{72}{5}}}\right)\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\pi}\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi}_{\left[-\frac{1}{3}\cdot\cos^3(\varphi)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}}\right)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\left(\iint\limits_{V_x} f\,dy\,dz\right)dx=\int\int\left(\int\limits_{V_{x,y}} f\,dz\right)dx\,dy$$

Pl.: $$\iiint\limits_{[a_1,b_1]x[a_2,b_2]x[a_3,b_3]} f\,dx\,dy\,dz=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

Pl.: $$\iiint\limits_{[0,1]x[1,2]x[2,3]}(xy+2\mathrm{z})\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_2^3(xy+2\mathrm{z})\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(\int_1^2[xy+5]\,dy\right)dx=\int_0^1\left(5+\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{2}\right)dx=5+\left[\frac{3}{4}\cdot x^2\right]_0^1=5+\frac{3}{4}$$

Pl.: $$\iiint\limits_{\substack{x\ge 0,\,y\ge 0\\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}}} x^2\cdot y\cdot z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0,\,y\ge 0}}\left(\underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2\cdot y\cdot z\,dz}_{x^2\cdot y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}}\right)dx\,dy =$$

$$=\int\limits_{\substack{0\\(r)}}^{1}\left(\int\limits_{\substack{0\\(\varphi)}}^{\frac{\pi}{2}}|r|\cdot r^3\cdot\frac{1-r^2}{2}\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi\right)dr=\underbrace{\int_0^1 r^4\cdot\frac{1-r^2}{2}\,dr}_{\left[\frac{r^5}{10}-\frac{r^7}{14}\right]_0^1}\ \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi}_{\left[-\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}}$$

Tétel: Helyettesítéses integrálás

$$x=\varphi_1(u,v,w)$$
$$y=\varphi_2(u,v,w)$$
$$z=\varphi_3(u,v,w)$$

$B, A\subset\mathbb{R}^3,\ \varphi: B\rightarrow A$ kölcsönösen egyértelmű, $\varphi\in C^1$ f integrálható A-n.

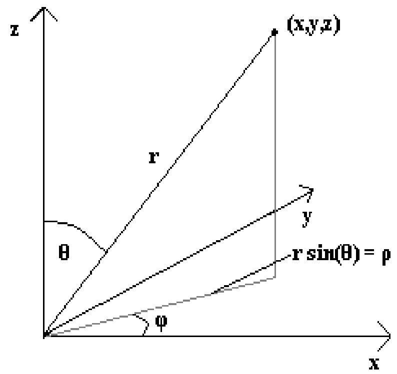
Akkor

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_B f(\varphi_1(u,v,w),\varphi_2(u,v,w),\varphi_3(u,v,w))\cdot|det\,\underline{\mathrm{J}}|\,du\,dv\,dw$$

ahol $\underline{\mathrm{J}}=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix}$ <u>Jacobi-mátrix</u>

<u>Gyakori helyettesítések:</u>

Pl.: gömbi koordináták



$$0\le r\le\infty \qquad x=\rho\cdot\cos(\varphi) \qquad x=r\,csot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)$$
$$0\le\varphi\le 2\pi \qquad y=\rho\cdot\sin(\varphi) \qquad y=r\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)$$
$$0\le\theta\le\pi \qquad z=r\cdot\cos(\theta)$$

a) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

b) xy sík => $\theta = \pi/2$

c) $\underbrace{x>0,\ y<0}_{\frac{\pi}{2}<\varphi<0},\ \underbrace{z<0}_{\theta>\frac{\pi}{2}}$

$$\underline{\mathrm{J}}=\begin{bmatrix} \sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) & -\text{¿}\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) & r\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) & r\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) & r\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\cdot\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

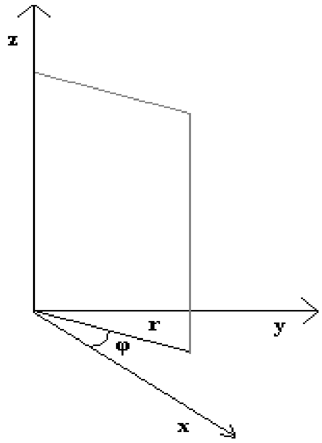
$$\underline{det\,\underline{\mathrm{J}}=\cos(\theta)}\ (-r^2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta))\cdot\underset{1}{(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}-r\cdot\sin(\theta)\cdot r\cdot\sin^2\underbrace{(\theta)\cdot(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}_{1} =$$

$$= \quad -r^2\cdot\sin(\theta)$$
$$|det\,\underline{\mathrm{J}}|=r^2\cdot\sin(\theta)$$

Pl.: Gömbtérfogat

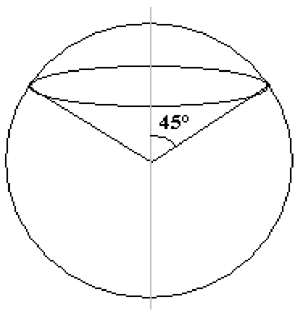
$$|\mathrm{V}|=\iiint_V dx\,dy\,dz=\int\limits_{\substack{0\\(r)}}^{R}\left(\int\limits_{\substack{0\\(\varphi)}}^{2\pi}\left(\int\limits_{\substack{0\\(\theta)}}^{\pi} r^2\cdot\sin(\theta)\,d\theta\right)d\varphi\right)dr=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}2\mathrm{r}^2\,d\varphi\right)dr=\int_0^R 4\pi\cdot r^2\,dr=4\pi\cdot\frac{R^3}{3}$$

Pl.: hengerkoordináták:



$$x = r\cdot\cos(\varphi) \qquad \underline{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |\det \underline{\underline{\mathrm{J}}}| = r$$
$$y = r\cdot\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

Pl.:



térfogata, hengerkoordinátákkal: r, z, φ

$r \le z$ => a 45° miatt

$r^2 + z^2 \le R^2$

$$|\mathrm{V}| = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_{\substack{r\le z \\ r^2+z^2\le R^2}} r\,dr\,d\varphi\,dz = \iint_{\substack{r^2+z^2\le R^2 \\ r\ge 0}} \left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right) dr\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ r=\rho\cdot\cos(\alpha) \\ z=\rho\cdot\sin(\alpha) \\ 0\le\rho\le R \\ \frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}}}{=} \int_0^R \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot\rho\cdot\cos(\alpha)\cdot\rho\,d\alpha\right) d\rho$$

$$= \int_0^R 2\pi\cdot\rho^2\cdot[\sin(\alpha)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\rho = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{R^3}{3}$$

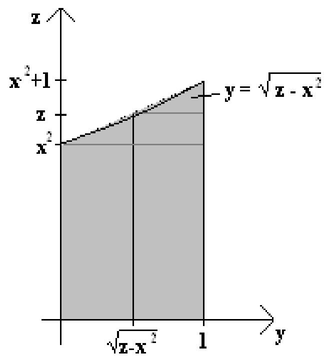
Pl.: Viviani-test térfogata

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}} \left(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy = \iint_{\left(x-\frac{q}{2}\right)+y^2\le\frac{1}{4}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\substack{-\frac{\pi}{2} \\ (\varphi)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\underbrace{\int_{\substack{0 \\ (r)}}^{\cos(\varphi)} 2\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr}_{\left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{\cos(\varphi)}}\right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(1-|\sin(\varphi)|^3\right) d\varphi = \frac{4}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1-\underbrace{\sin^3(\varphi)}_{\sin(\varphi)\cdot(1-\cos^2(\varphi))}\Big)\,d\varphi =$$

$$= \quad \frac{2}{3}\cdot\pi+\frac{4}{3}\cdot\left[\cos(\varphi)+\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{16}{9}$$

Pl.: $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^1 f\,dy\,dz\,dx+\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{x^2+1}\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f\,dy\,dz\,dx=?$



$z^2 = x^2 + y^2$ =>parabola ív

$$\int\limits_{\substack{0\\(x)}}^1\left(\int\limits_{\substack{0\\(y)}}^1\left(\int\limits_{\substack{0\\(z)}}^{x^2+y^2} f\,dz\right)dy\right)dx$$

Pl.: $\iiint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{3}{4}} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

<u>Improprius integrálok</u>

nemkorlátos halmazon

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=?$$

Def: $A\subset\mathbb{R}^2$ nem korlátos. Ha bármely $R_i\to+\infty$ sorozata és bármely $A\cap\{x^2+y^2\le R_i^2\}\subset A_i$ korlátos tartománya $\iint\limits_{A_i} f(x,y)\,dx\,dy\to I$ $\quad(i\to\infty)$

(minden R_i és A_i esetén ugyanazon I-vel), akkor az $\iint\limits_A f\,dx\,dy$ improprius integrál konvergens, $\iint\limits_A f=I$

Tétel: Majoráns kritérium

Ha $|f|\le g$ az A-n és $\iint\limits_A g\,dx\,dy$ konvergens, akkor $\iint\limits_A f\,dx\,dy$ is konvergens és $|\iint\limits_A f|\le\iint\limits_A g$

Tétel: Minoráns kritérium

Ha $0\le g\le f$ az A-n, $\iint\limits_A g$ divergens, akkor $\iint\limits_A f$ is divergens

Tétel: Legyen f ≥ 0. Akkor $\iint_A f = I$ <=> van olyan $A_i \subset A$ korlátos halmazsorozat, amely

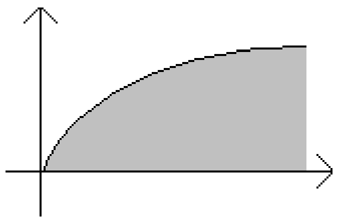
a) bővítő: $A_i \subset A_{i+1}$

b) kitölti A-t: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$

c) $\iint_{A_i} f \to I$, I véges

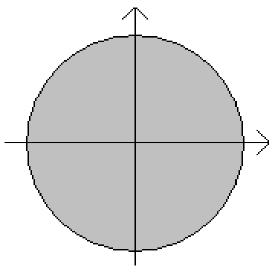
Pl.: $$\iint_{\substack{0\le y\le\sqrt{x}\\ 0\le x}} y\cdot e^{-x}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\iint_{\substack{0\le y\le\sqrt{x}\\ 0\le x\le R}} y\cdot e^{-x}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{\substack{0\\(x)}}^{R}\left(\int_{\substack{0\\(y)}}^{\sqrt{x}} y\cdot e^{-x}\,dy\right)dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{x}{2}\cdot e^{-x}\,dx = \left[-\frac{x}{2}\cdot e^{-x}\right]_0^R + \underbrace{\int_0^R \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\,dx}_{\frac{1-e^{-R}}{2}} = 0+\frac{1}{2}$$



Pl.: $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr}_{2\pi\cdot r\cdot e^{-r^2}} =$$

$$= \underbrace{\lim \int_0^R 2\pi\cdot r\cdot e^{-r^2}\,dr}_{\left[-\pi\cdot e^{-r^2}\right]_{r=0}^{R}} = \lim \pi\left(1-e^{-R^2}\right) = \pi$$



Pl.: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = I = ?$$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot e^{-y^2}\,dy = \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$$

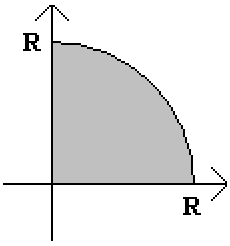
$$I = \sqrt{\pi}$$

Pl.: $$\iint_{y\ge x\ge 0} e^{-y^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty}\iint_{R\ge y\ge x\ge 0} e^{-y^2}\,dx\,dy = \lim\int_{\substack{0\\(y)}}^{R}\left(\int_0^y e^{-y^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \lim\int_0^R y\cdot e^{-y^2}\,dy = \lim\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-y^2}\right]_0^R = \frac{\lim 1-e^{-R^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pl.: $$\iint\limits_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0}} e^{-x-y}\,dx\,dy=\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq R\\ 0\leq y\leq R}} e^{-x-y}\,dx\,dy=\lim\Big(\underbrace{e^{-x}\,dx}_{1-e^{-R}}\Big)^2=\lim\,(1-e^{-R})^2=1$$

Pl.: $$\iint\limits_{\substack{y\geq 0\\ x\geq 0}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\lim\iint\limits_{\substack{x,\,y>0\\ x^2+y^2\leq R^2}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\lim\int_0^R\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot e^{-r^2}\,d\varphi\right)dr=\ldots$$



Pl.: $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geq 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^4}=\lim_{R\to\infty}\iiint\limits_{1\leq x^2+y^2+z^2\leq R}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{gömbi koordináták}}}{=}\int\limits_{\substack{1\\(r)}}^{R}\left(\int\limits_{\substack{0\\(\varphi)}}^{2\pi}\left(\int\limits_{\substack{0\\(\theta)}}^{\pi}\frac{1}{r^8}\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,d\theta\right)d\varphi\right)dr=$$

$$=\lim\int_1^R 4\pi\cdot r^{-6}\,dr=\frac{\lim 4\pi}{5}\left[-r^{-5}\right]_1^R=\frac{\lim 4\pi}{5}(1-R^{-5})=\frac{4\pi}{5}$$

<u>Alkalmazások</u>

Pl.: ρ(x,y) tömegsűrűségű síklap tömege $\iint\limits_A \rho\,dx\,dy$, súlypontja $\left(\dfrac{\iint\limits_A x\rho}{\iint\limits_A \rho};\dfrac{\iint\limits_A y\rho}{\iint\limits_A \rho}\right)$

Pl.: ρ(x,y,z) tömegsűrűségű test tömege $\iiint\limits_V \rho\,dx\,dy\,dz$,

súlypontja $\left(\dfrac{\iiint\limits_V x\rho}{\iiint\limits_V \rho};\dfrac{\iiint\limits_V y\rho}{\iiint\limits_V \rho};\dfrac{\iiint\limits_V z\rho}{\iiint\limits_V \rho}\right)$

Pl.: A V test nyomatéka a z tengelyre $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$

Pl.: α_0 félnyílásszögű gömbcikk nyomatéka a forgástengelyre

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R\cdot\sin(\alpha_0)}\left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\cdot ctg(\alpha_0)}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz\right)dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2\cdot\sin(\alpha_0)}\frac{1}{2}\left(R^2-x^2-y^2-(x^2+y^2)\cdot ctg^2(\alpha_0)\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^{R\cdot\sin(\alpha_0)}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(R^2-r^2-r^2\cdot ctg^2(\alpha_0))\,r\,d\varphi\right)dr$$

Paraméteres integrálok

$$F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dt$$

folytonos?
Deriválás?
Integrálás?

1.Tétel: Ha f(x,y) folytonos [a,b]x[α,β]-n, akkor $F(x)\in C[a,b]$

2.Tétel: Ha f(x,y), f'(x,t) folytonos [a,b] x [α, β]-n, akkor F differenciálható és

$$F'(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f'(x,t)\,dt$$

3. Tétel: Ha f(x,t) integrálható [a,b] x [α, β]-n, akkor F(x) is integrálható és

$$\int_{a}^{b} F(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(x,t)\,dx\,dt$$

Pl.: $f(x)=\int_{0}^{1}\sin(t^2x^2)\,dt$ akárhányszor differenciálható és $f^{(k)}(x)=\int_{0}^{1}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\cdot\sin(t^2x^2)\,dt$

$$f'(x)=\int_{0}^{1}\left[2xt^2\cdot\cos(t^2\cdot x^2)-4x^2\cdot t^4\cdot\sin(t^2\cdot x^2)\right]dt$$

Pl.: $\int_{0}^{1}\frac{\sin(\alpha\cdot t)}{t}\,dt=F(\alpha)$ => $F'(\alpha)=\int_{0}^{1}\frac{t\cos(\alpha\cdot t)}{t}\,dt$