Kalkulus

Sáfár Orsolya

Deriválás

Deriválhatóság és folytonosság

Definíció: Legyen $x \in D_f$ a D_f torlódási pontja. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x pontbeli deriváltjának. Jele: $f'(x)$.

Mivel a törtben a nevező 0-hoz tart, így a határérték csak akkor lehet véges, ha a számláló is 0-hoz tart, azaz $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, így a függvény mindenképpen folytonos kell legyen x-ben, ha létezik derivált.

Másrészről viszont az állítás nem megfordítható: láttuk, hogy az $|x|$ függvény nem deriválható 0-ban, hiába folytonos.

Ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a folytonosság a deriválhatóság szükséges feltétele.

Határozatlan határértékek

Tétel: /L'Hospital/ Tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ és $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ és $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Ekkor $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ és $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Példa: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = ?$

Mivel ha $x = 0$-t helyettesítünk mind a számláló mind a nevező 0-hoz tart, így teljesül a L'Hospital-szabály feltétele, azaz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{e^x} = 0$$

Példa

Megjegyzés: A L'Hostipal szabály alkalmazható akkor is, ha $\frac{\infty}{\infty}$ alakú a határozatlan határérték.

Példa 2: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is ∞-hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Ez még mindig $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú, így még egyszer alkalmazhatjuk a szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Megjegyzés: Csak a $\frac{0}{0}$ és a $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékekre alkalmazható közvetlenül a szabály, semmilyen más határértékre (legalábbis átalakítás nélkül).

Monotonitás

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Állítás: Ha az $f(x)$ deriválható és szigorú monoton nő I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ I-n. Ennek oka, hogy ilyenkor a húrok meredeksége pozitív, így a meredekségek határértéke pozitív vagy 0 lehet.

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $\left(x^3\right)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív. Így az állításban a $\geq$ nem cserélhető $>$-ra.

Monotonitás

Állítás: Ha az $f(x)$ deriválható és monoton nő I-n, akkor $f'(x) \geq 0$ I-n. Ha az $f(x)$ deriválható és monoton csökken I-n, akkor $f'(x) \leq 0$ I-n.

Bár a szigorú monotonitásból nem tudjuk meg f' előjelét (mert 0 még lehet), de érdekes módon fordítva működik a következtetés.

Állítás: Ha az $f(x)$ deriválható és $f'(x) \geq 0$ I-n, akkor f monoton nő I-n.
Ha az $f(x)$ deriválható és $f'(x) > 0$ I-n, akkor f szigorúan monoton nő I-n.

Lokális szélsőérték

Definíció: Ha egy x_0 pontnak van egy olyan környezete, amelyben $f(x_0) \leq f(x)$ minden olyan x pontra amely ebbe a környezetbe esik, akkor azt mondjuk, hogy f-nek lokális minimuma van x_0-ban.

A lokális maximumot vagy minimumot összefoglaló néven szélsőértéknek nevezik.

Példa: Az $f(x) = \sin(x)$ függvénynek lokális maximuma van $x = \frac{\pi}{2}$-ben és $x = \frac{5\pi}{2}$-ben is, mert például a π sugarú környezetben itt veszi fel a legnagyobb függvényértéket, egyet.

Állítás: Ha egy deriválható $f(x)$-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$. (Ellenkező esetben szigorú monoton lenne a függvény x_0 közelében és akkor nem lehetne szélsőérték).

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő, így nincs lokális szélsőértéke. Ugyanakkor $f'(0) = 0$. Ez mutatja, hogy az állítás nem megfordítható.

Lokális szélsőérték

Eddig az derült ki, hogy lokális szélsőértéke csak olyan pontban lehet egy függvénynek, ahol a deriváltja 0. Ugyanakkor a derivált gyökeinek egy része nem lokális szélsőérték.

Elégséges feltételt tudunk adni a lokális szélsőérték létezésére az első derivált segítségével.

Állítás: Ha deriválható $f(x)$ deriváltja előjelet vált x_0-ban, és pozitívból negatívba fordul, akkor lokális maximum van x_0-ban, míg ha negatívból pozitívba fordul, akkor lokális minimum van x_0-ban.

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-1)^4(x+2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^6 + (x-1)^4 6(x+2)^5 =$$

$$(x-1)^3(x+2)^5(4x+8+6x-6) = (x-1)^3(x+2)^5(10x+2)$$

Innen $f'(x) > 0$ ha $x \in \left(-2, \frac{-1}{5}\right)$ vagy $(1, \infty)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton nő.

$f'(x) < 0$ ha $(\infty, -2)$ vagy $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton csökken.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$-ben a derivált pozitívból negatívba vált itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk: hogyan viselkedik a függvény nagy x-re (ezt megtudjuk a határértékből $\pm\infty$-ben). És hogy merre "görbül" két pont között. Ennek vizsgálatához bevezetjük a konvexitás fogalmát.

Konvexitás

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény konvex egy I intervallumon, ha bármely két pontban megrajzolva a húrját a függvény görbéje a húr alatt halad. Ha mindig felette halad, akkor konkávnak nevezzük a függvényt.

Azt, hogy a függvény konvex, formálisan úgy definiálhatjuk, hogy ha $c \in [0, 1]$, akkor $f(ca + (1 - c)b) \leq cf(a) + (1 - c)f(b)$ teljesül minden $a, b \in I$-re.

Állítás: Ha az $f(x)$ deriválható függvény konvex, akkor első deriváltja monoton nő, míg ha konkáv, akkor monoton csökken. Ennek következményeként a konvex függvény az érintője felett halad. Ugyanakkor a konkáv függvény az érintője alatt halad.

Definíció: Azon pontot ahol a függvény konvexitást vált inflexiós pontnak nevezzük.

Második derivált

Mivel a függvény deriváltjának monotonitásának vizsgálatával tudjuk a konvexitást vizsgálni, és pedig a monotonitást a derivált előjeléből, így érdekes számunkra egy függvény deriváltjának a deriváltja.

Ezt a mennyiséget második deriváltnak nevezzük, és $f''(x)$-el jelöljük. Ha létezik, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ kétszer deriválható, vagy kétszeresen sima.

Állítás: Ha $f(x)$ kétszer deriválható, és

- $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimum
- $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximum
- $f''(x) > 0$ I-n, akkor f konvex I-n.
- $f''(x) < 0$ I-n, akkor f konkáv I-n.

Teljes függvényvizsgálat lépései

- Határozzuk meg f értelmezési tartományát.
- Határozzunk meg a határértékeket az értelmezési tartomány határain.
- Számítsuk ki az első deriváltat, ennek vizsgálatával megtudjuk hol monoton a függvény, és hol lehetnek lokális szélsőértékei.
- Számítsuk ki a második deriváltat. Ebből megtudjuk a konvexitást és a szélsőértékek típusait.
- Innen már tudjuk az értékkészletet és meg tudjuk rajzolni a függvény grafikonját.
- Ha indokolt ellenőrizhetünk paritást és periodicitást.

A függvényvizsgálatnak nem része a gyökök megkeresése!

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$, azaz határértéket csak $\pm\infty$-ben kell számolni.

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Példa - folytatás

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)^2}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Innen $f'(x) = 0$, csak akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

$f'(x) < 0$ ha $x < 0$, itt a függvény szigorú monoton csökken,
$f'(x) > 0$, ha $x > 0$, itt a függvény szigorú monoton nő.

Így $x = 0$ lokális minimum, mert a derivált előjele negatívból pozitívba vált.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4+1) - 2x4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{-6x^4+2}{(1+x^4)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

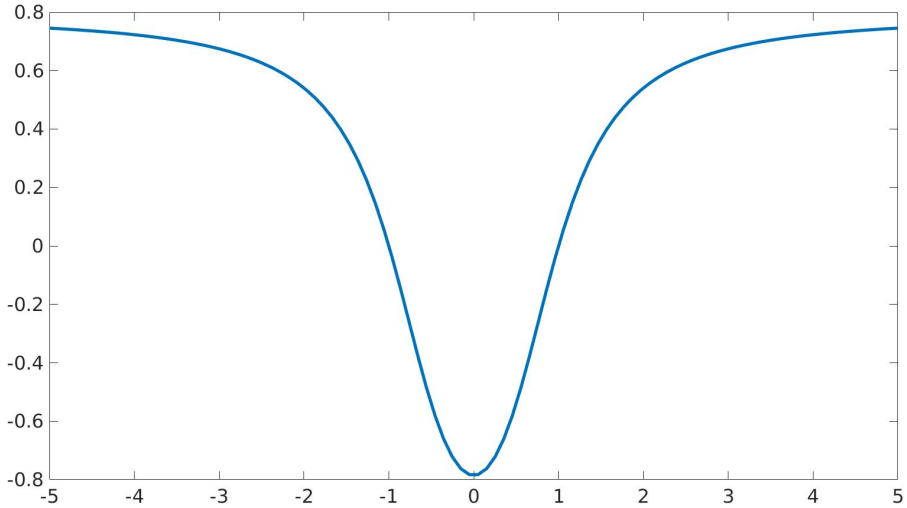
$f''(x) > 0$ ha $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$, itt a függvény konvex.

$f''(x) < 0$ ha $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty\right)$ itt a függvény konkáv.

Ezek szerint $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ inflexiós pontok.

Példa - folytatás

Innen az értékkészlet: $\left[f(0), \frac{\pi}{4}\right) = \left[\arctan(-1), \frac{\pi}{4}\right) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Továbbá $f(-x) = \arctan\left(\frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1}\right) = f(x)$, azaz f páros.

Nem lehet periódikus, mert az egész pozitív félegyenesen szigorú monoton.

Magasabbrendű deriváltak

Hasonlóan az előbbiekhez definiálhatjuk $f(x)$ harmadik deriváltját, mint $f''(x)$ deriváltját, sőt...

Definíció: $f^{(k+1)}(x) := f^{(k)}(x)$ módon f akárhányadik deriváltját értelmezni tudjuk. Azt mondjuk, hogy f akárhányszor deriválható, ha minden deriváltja létezik.

Láttuk, hogy ha $f(x)$ egyszer deriválható az x_0 pontban, akkor húzható hozzá érintőegyenes, amelynek egyenlete:

$$y_e(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sőt, még az is teljesül, hogy erre az egyenesre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y_e(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

azaz az $y_e(x)$ jól közelíti a függvényt, ha x közel van x_0-hoz. A magasabbrendű deriváltakkal még jobb közelítést adhatunk.

Taylor-polinom

Egy n-szer deriválható függvény x_0 körüli, n-edrendű Taylor-polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Ez a képlet $n = 1$-re pont az érintőegyenest adja, egyébként egy n-edfokú polinomot. Ez x_0 közelében jó közelítése lesz a függvénynek, egészen pontosan ha $f(x)$ legalább $n + 1$-szer deriválható, akkor valamely $c \in (x, x_0)$-ra:

$$f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

A jobboldalon álló kifejezést nevezik Lagrange-féle maradéktagnak. Ezt az állítást nem bizonyítjuk.

Példa

Határozzuk meg a $\sin(x)$ negyedrendű, 0 körüli Taylor-polinomját! Mekkora hibát vétünk, ha $\sin(0.1)$-t ezzel a polinommal közelítjük?

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & \sin(0) &= 0 \\
\sin'(x) &= \cos(x) & \cos(0) &= 1 \\
\cos'(x) &= -\sin(x) & -\sin(0) &= 0 \\
-\sin'(x) &= -\cos(x) & -\cos(0) &= -1 \\
-\cos'(x) &= \sin(x) & \sin(0) &= 0
\end{aligned}$$

Innen

$$T_4(x) = 0 + 1(x-0) + 0\frac{(x-0)^2}{2} - 1\frac{(x-0)^3}{6} + 0\frac{(x-0)^4}{24} = x - \frac{x^3}{6}$$

Példa - folytatás

Másrészt

$$\sin(0.1) - T_4(0.1) = \frac{\cos(c)}{5!}(0.1-0)^5,$$

ahol $c \in (0, 0.1)$ Mivel $|\cos(x)| \leq 1$, így a hiba becsülhető:

$$\left|\frac{\cos(c)}{5!}(0.1-0)^5\right| \leq \frac{1}{120}10^{-5},$$

így 7 jegyre pontos közelítést kaptunk.

A Taylor-polinomok felhasználásával minden sima függvény közelítését meg tudjuk határozni csak alapműveletek segítségével.