

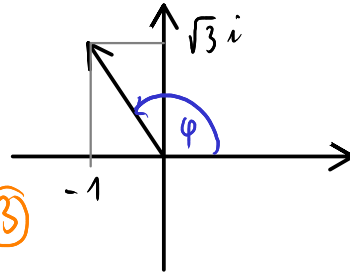
1. feladat (8+8+8=24 pont)

Legyen $w = -1 + \sqrt{3}i$.(a) Adja meg w exponenciális alakját!(b) Számolja ki w^{17} értékét, és az eredményt algebrai alakban adja meg!(c) Oldja meg a $z^2 - 1 = w$ egyenletet z -re! Az eredményt trigonometrikus alakban adja meg!

$$a, \quad r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad (3)$$

$$\text{tg } \varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \left. \begin{array}{l} \text{Re } w < 0 \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$\underline{w = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}}} \quad (2)$$



$$b, \quad w^{17} = (2 e^{i \frac{2\pi}{3}})^{17} = 2^{17} \cdot e^{i \frac{34\pi}{3}} = 2^{17} \cdot e^{i (10\pi + \frac{4\pi}{3})} =$$

$$= 2^{17} \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \underline{-2^{16} - 2^{16} \cdot \sqrt{3} i} \quad (2)$$

$$c, \quad z^2 - 1 = -1 + \sqrt{3} i$$

$$z^2 = \sqrt{3} i \quad (1) = \sqrt{3} e^{i \frac{\pi}{2}} \quad (2) \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt[4]{3} e^{i \frac{\pi}{4}} \quad (3) = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\underline{z_1 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \quad (1) \quad \underline{z_2 = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)} \quad (1)$$

2. feladat (13+10=23 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} + 3n^2}{5 + 6n}} = ?$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3^n}{n^2 \sin^5(n) + n^n} = ?$$

$$a, \quad \text{Rendőr-szabály} \quad (2)$$

$$\sqrt[n]{\frac{2}{11n}} \cdot 2 = \sqrt[n]{\frac{2 \cdot 2^n + 0}{5n + 6n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} + 3n^2}{5 + 6n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n}{0 + 6n}} = \sqrt[n]{\frac{5}{6n}} \cdot 2 \quad (5)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \quad 2 \quad 2$$

$$b, \quad n^2 \ll 3^n \ll n! \ll n^n \quad (4)$$

$$\sin^5(n) \text{ korlátos}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3^n}{n^2 \sin^5(n) + n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{n^n} + \frac{3^n}{n^n}}{\frac{n^2 \sin^5(n)}{n^n} + 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad (2)$$

3. feladat (6+15=21 pont)

(a) Mikor monjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$? Mondja ki a definíciót! ($x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$)

(b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{10}{2x-1} = 2. \quad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

a) D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, ha $x_0 \in \text{Tel } D_f$, és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,
melyre ha $x \in \dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap D_f$ (vagy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, és $x \in D_f$)
akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. ⑤

b,

$$\left| \frac{10}{2x-1} - 2 \right| = \frac{|10 - 4x + 2|}{|2x-1|} = \frac{4|3-x|}{|2x-1|} < \frac{4|x-3|}{3} < \varepsilon, \quad |x-3| < \frac{3\varepsilon}{4}$$

$\Rightarrow \delta(\varepsilon) = \min \left\{ 1, \frac{3\varepsilon}{4} \right\}$ ②

Ha $|x-3| < 1$,
 $2 < x < 4$, $3 < 2x-1 < 7$ ⑥ (Bessé)

4. feladat (12+10+10=32 pont)

Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{ch}(3-2x)}{e^{2x-1}} = ?$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+3}) = ?$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 (1 + \cos x) = 2$ ②

VAGY

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{(\frac{x}{2})^2}{x^2(\frac{x}{2})} = 2$$
 ② VAGY L'Hospital szabállyal.

b, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{ch}(3-2x)}{e^{2x-1}} = \frac{+\infty}{0+} = +\infty$ ②

c, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{(x^2-1) - (x^2+3)}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+3}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -2$$
 ②

Csak utolsó hiba: 7/10 pont

5. feladat (5+5=10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

(a) Adjon példát olyan valós számsorozatra, amelynek a valós torlódási pontjai a pozitív egész számok!

(b) Igazolja, hogy ha egy valós számsorozatnak minden pozitív egész szám torlódási pontja, akkor a $+\infty$ is torlódási pontja!

a, $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

⑤

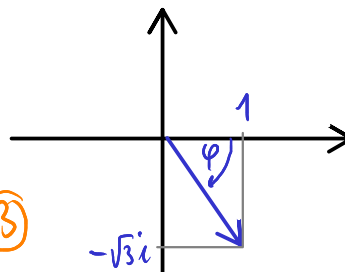
b, $\forall K > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}_+, n > K+1$, és n -nek az 1 -ig tartó környékén végtelen sok sorabelem van, mert n torlódási pont. De ez mind K -nél nagyobbak, így végtelen sok K -nél nagyobb elem van ($\forall K-n$). Tehát ∞ is torlódási pont. ⑤

1. feladat (8+8+8=24 pont)

Legyen $w = 1 - \sqrt{3}i$.(a) Adja meg w exponenciális alakját!(b) Számolja ki w^{19} értékét, és az eredményt algebrai alakban adja meg!(c) Oldja meg a $z^2 + 1 = w$ egyenletet z -re! Az eredményt trigonometrikus alakban adja meg!

$$a, \quad r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi = -\sqrt{3} &\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ \text{Re } w > 0 & \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} \quad (3) \\ w &= 2 e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b, \quad w^{19} &= (2 e^{-i\frac{\pi}{3}})^{19} = 2^{19} \cdot e^{-\frac{19\pi}{3}} = 2^{19} \cdot e^{i(-6\pi - \frac{\pi}{3})} = \\ &= 2^{19} \cdot \left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \underline{2^{18} - 2^{18} \cdot \sqrt{3} i} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c, \quad z^2 + 1 &= 1 - \sqrt{3}i \\ z^2 &= -\sqrt{3}i \quad (1) = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (2) \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt[4]{3} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right); \quad z_2 = \sqrt[4]{3} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

2. feladat (13+10=23 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő hatéértékeket!

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+2} + 2n^3}{2 + 7n}} = ?$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^n}{n^3 \cos^2(n) + n!} = ?$$

$$\begin{aligned} a, \quad \text{Rendőr-szabály} \quad (2) \\ \sqrt[n]{\frac{9}{9n}} \cdot 3 &= \sqrt[n]{\frac{9 \cdot 3^n + 0}{2n + 7n}} \leq \sqrt[n]{\frac{3^{n+2} + 2n^3}{2 + 7n}} \leq \sqrt[n]{\frac{9 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n}{0 + 7n}} = \sqrt[n]{\frac{11}{7n}} \cdot 3 \quad (5) \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad (1) \quad \quad \quad \downarrow \quad n \rightarrow \infty \\ &\quad 3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b, \quad n^3 &\ll 5^n \ll n! \ll n^n \quad (4) \\ \cos^2(n) &\text{ korlátos} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^n}{n^3 \cos^2(n) + n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n}{n^n} + 1}{\frac{n^3 \cos^2(n)}{n^n} + \frac{n!}{n^n}} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

3. feladat (6+15=21 pont)

(a) Mikor monjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$? Mondja ki a definíciót! ($x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$)

(b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15}{3x-1} = 3. \quad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

a) D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, ha $x_0 \in \text{Tel } D_f$, és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,
melyre ha $x \in K_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap D_f$ (vagy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, és $x \in D_f$)
akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. ⑤

b,

$$\left| \frac{15}{3x-1} - 3 \right| = \frac{|15 - 9x + 3|}{|3x-1|} = \frac{9|2-x|}{|3x-1|} < \frac{9|x-2|}{2} < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{2\varepsilon}{9}$$

$\Rightarrow \delta(\varepsilon) = \min \left\{ 1, \frac{2\varepsilon}{9} \right\}$ ②

Ha $|x-2| < 1$,
 $1 < x < 3$, $2 < 3x-1 < 8$ ⑥ (Bemérés)

4. feladat (12+10+10=32 pont)

Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(x) - 1} = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sh}(2+3x)}{e^{3x-1}} = ?$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}) = ?$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = -2$ ②

VAGY

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2 \sin^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \cdot \frac{(\frac{x}{2})^2}{\frac{x^2}{4}} = -2$$
 ② VAGY L'Hospital szabállyal.

b, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sh}(2+3x)}{e^{3x-1}} = -\infty$ ②

c, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{(x^2+1) - (x^2-2)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \frac{+3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = -\frac{3}{2}$$
 ②

Csak utolsó hiba: 7/10 pont