

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
20	30	20	14	12	96/100

8/10

A szigorlaton semmilyen segédeszköz nem használható!

1. (20 pont)

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

függvényen és vázolja fel a függvényt!

2. (10+10+10 pont)

Határozza meg a következő integrálokat!

(a)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx,$$

(b)

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y} dy dx,$$

(c)

$$\iint_T xy dx dy,$$

ahol T az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körök által határolt korlátos tartomány $y = 0$ és $y = x$ közötti része.

3. (20 pont)

Elemezze, hogy **a** és **b** paraméterek értékei mellett, mikor hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek!

$$ax + bz = 2$$

$$ax + ay + 4z = 4$$

$$ay + 2z = b.$$

4. (7+8 pont)

(a) Határozza meg az

$$(1 - i)^4 + \frac{\overline{(2 + i)}^2}{3 - 4i}$$

komplex szám algebrai alakját!

(b) Oldja meg a komplex számok körében a $z^6 + 16z^2 = 0$ egyenletet!

5. (15 pont)

Az $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \leq 0$ egyenlőtlenségekkel megadott fémlemez adott (x, y) pontjában a hőmérsékletet a vizsgált időpillanatban a $T(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1$ függvény írja le. Hol található a lemez leghidegebb, illetve legmelegebb pontja?

$$1. f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

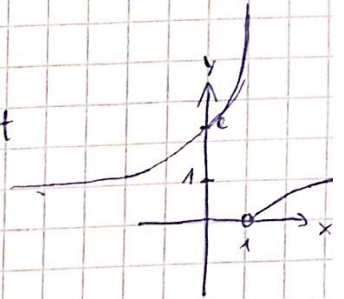
$$f(-x) = e^{\frac{1}{1+x}} \neq \pm f(x) \rightarrow \text{nem páros, nem páratlan}$$

$$D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

tengelymetszetek:

$$f(x) \neq 0 \rightarrow \text{nem metszi az } x \text{ tengelyt}$$

$$f(0) = e$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1; \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \infty; \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ szig. mon. nö}$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f	↗	X	↗
f'	+	X	+

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} \cdot (1-x)^2 - e^{\frac{1}{1-x}} (2x-2)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}} (1-2x+2)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x < \frac{3}{2}: f''(x) > 0$$

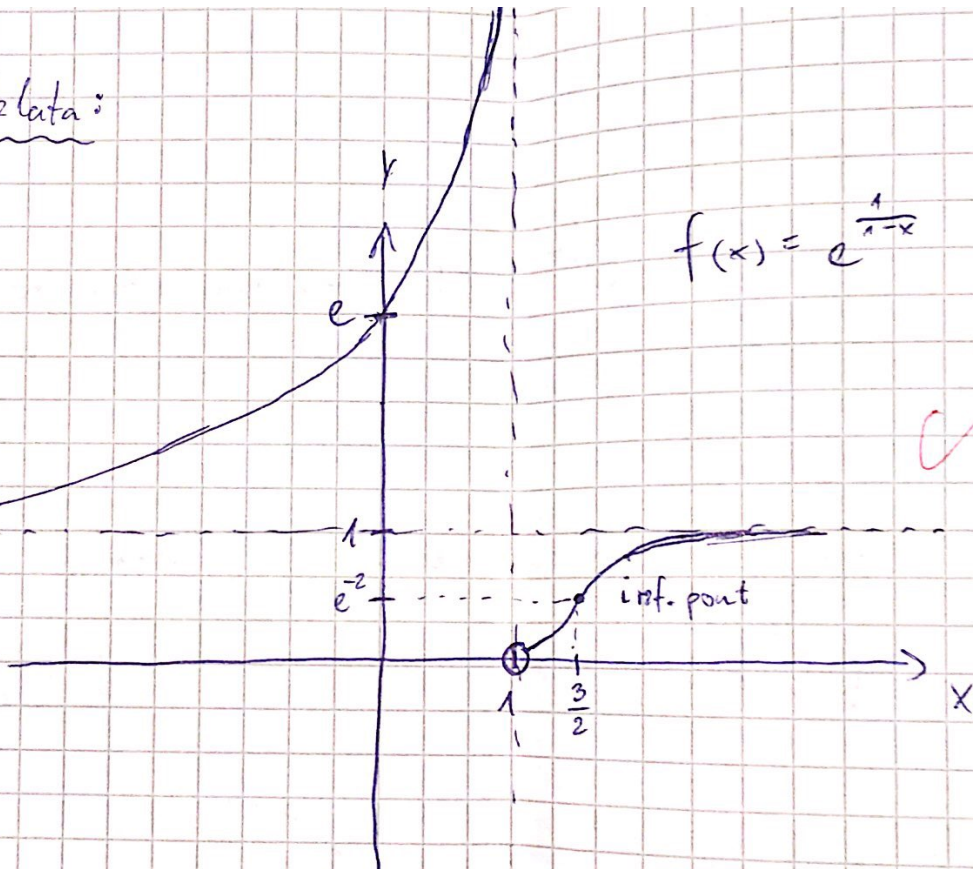
$$x > \frac{3}{2}: f''(x) < 0$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
f	↗	X	↗	inf. p.	↘
f'	+	X	+	+	+
f''	+	X	+	0	-

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-2}$$

A függvény vizsgálata:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-x}}$$



$$\textcircled{2} \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{e^t} \frac{t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} dt \quad \textcircled{=}$$

$$\left((\arctan(x))' = \frac{1}{x^2 + 1} \right) \quad \star$$

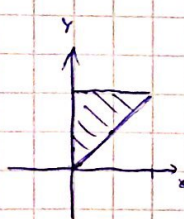
$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

$$0 \leq x \leq t \Rightarrow 1 \leq t \leq e^t$$

$$\textcircled{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{e^t} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan(t)]_1^{e^t} \stackrel{t = \ln x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan(e^x)]_0^t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{\pi}{4}$$

10



$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_0^y \frac{x \sin y}{y} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{x \sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y \cdot \sin(y) dy = \frac{1}{2} \left\{ \left[y \cos(y) \right]_0^1 + \int_0^1 \cos(y) dy \right\} \quad \textcircled{=}$$

$$u = y \quad v' = \sin(y)$$

$$u' = 1 \quad v = -\cos(y)$$

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} (-\cos(1) + \sin(1)) = \frac{\sin(1) - \cos(1)}{2}$$

10

$$e) \iint_T xy \, dx \, dy$$

$$T: (x-1)^2 + y^2 = 1, (x-2)^2 + y^2 = 4, y=0, y=x$$

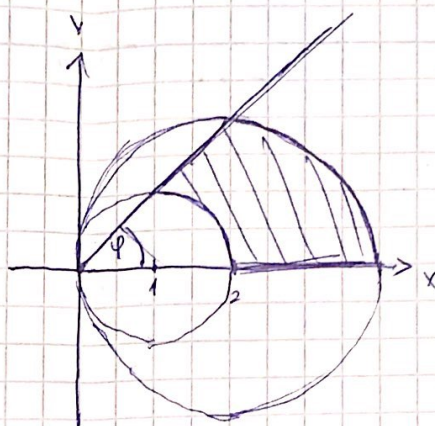
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$|z| = r$$

$$2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$



$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{10}{8}$$

$$\frac{4^4}{4} = 64 \quad \frac{2^4}{4} = 4$$

$$\iint_T xy \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= 60 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 60 \left[-\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 10 - \frac{10}{8} = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

$$\int f^n \cdot f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} \quad \cos \varphi = -\sin \varphi$$

10

③

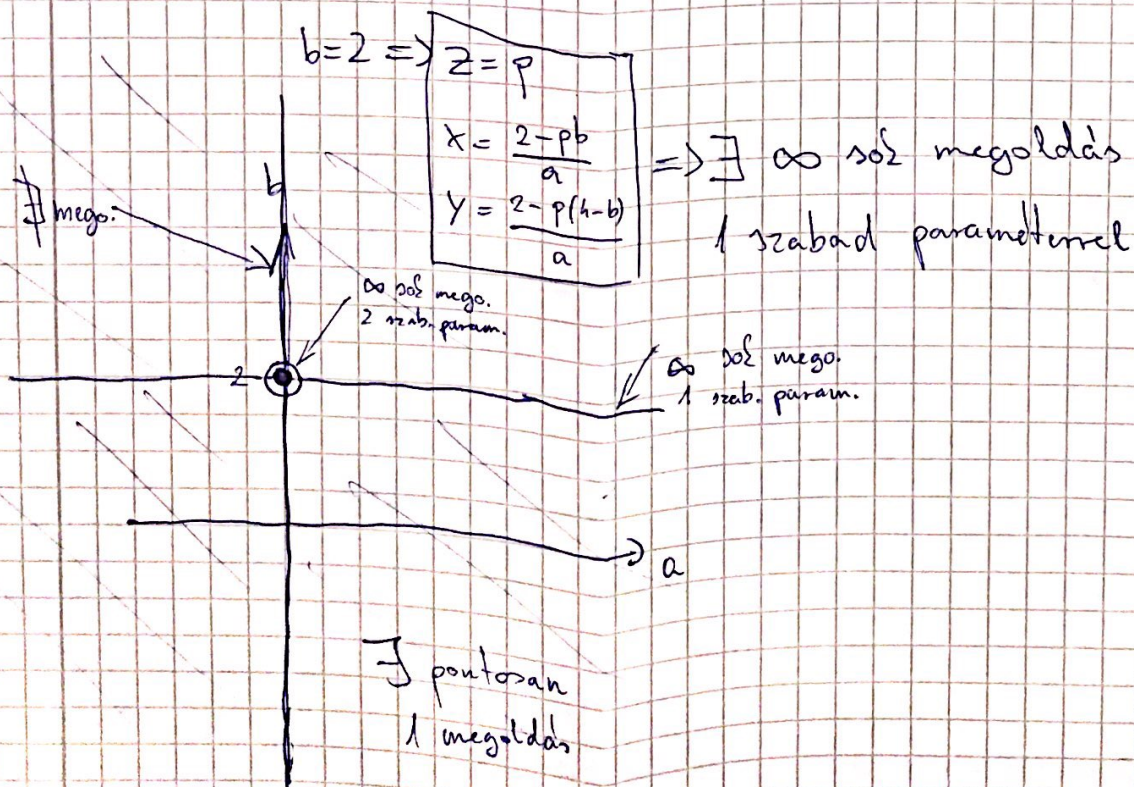
$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + bz = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & b & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & b-1 & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & b-1 & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_2} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{pmatrix}$$

$a=0$: $\Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow b=2$
 $\boxed{x=p \quad y=q} \Rightarrow \infty$ sz. mego.
 2 szabad param.

$b \neq 2$: $\nexists$ mego.

$a \neq 0$: $\rightarrow b \neq 2 \Rightarrow \boxed{z=1}$
 $\boxed{x = \frac{2-b}{a} \quad y = \frac{b-2}{a}} \Rightarrow$ pontosan 1 mego.



$$(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$$

$$4. a) (1-i)^4 + \frac{(2+i)^2}{3-4i} = -4 + \frac{3-4i}{3-4i} = 1-4 = \underline{\underline{-3}}$$

$$\overline{(2+i)^2} = \overline{3+4i} = 3-4i$$

$$b) z^6 + 16z^2 = 0$$

$$z^2(z^4 + 16) = 0$$

$$z^2 = 0$$

$$z_{1,2} = 0$$

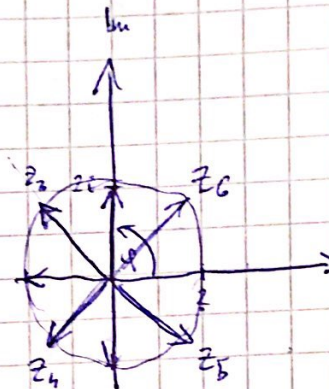
$$z^4 + 16 = 0$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}i$$

$$z_4 = -\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}i$$

$$z_5 = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}i$$

$$z_6 = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}i$$



$$z^4 = 16$$

$$z^4 = -16$$

$$|z| = 2$$

$$(2 \cdot e^{i\varphi})^4 = 16 \cdot e^{i4\varphi}$$

$$4\varphi = 2k\pi$$

$$\varphi = \frac{2k\pi}{4}$$

$$k = (1, 2, 3, 4)$$

$$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{2}}$$

$$4\varphi = (2k+1)\pi$$

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

$$k = (1, 2, 3, 4)$$

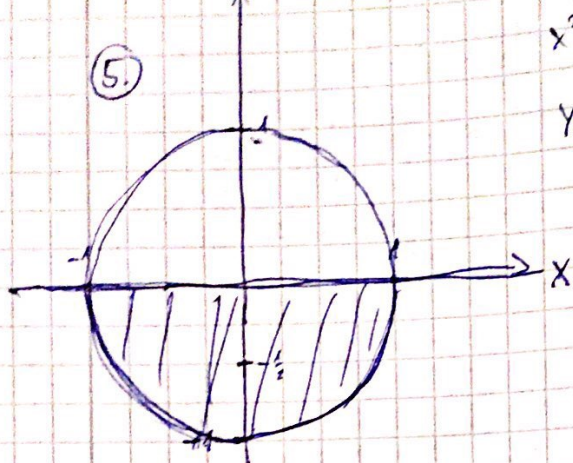
$$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{9\pi}{4}}$$

5.



$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$y \leq 0$$

határvonalak: $y = 0$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$T(x,y) = x^2 + y^2 + y - 1 \Rightarrow$ folytonos függvény, és léteznek a parciális deriváltjai, melyek szintén folytonosak

04 lehet szélső értéke, ahol a parciális deriváltak 0-k.

$$\begin{cases} T'_x = 2x = 0 \\ T'_y = 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad T(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$$

határvonalak: • $y = -\sqrt{1-x^2}$ $y^2 = (1-x^2)$

$$T(x) = x^2 + 1 - x^2 - \sqrt{1-x^2} - 1$$

$$T(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$T'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \neq 0 \Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} \text{ -en nincs lok. szélsőérték}$$

$$\bullet y = 0$$

$$T(x) = x^2$$

$$T'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (y=0)$$

$$T(0,0) = -1$$

$(0,-1)$, $(1,0)$ és $(-1,0)$ pontokban,

$$T(1,0) = 0$$

$$T(-1,0) = 0$$

$$\left(T(0,-1) = -1 \right)$$

$$T''_{xx} = 2$$

$$T''_{xy} = T''_{yx} = 0$$

$$T''_{yy} = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = 4 > 0$$

$$T''_{xx} > 0 \Rightarrow \text{lok. min.}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4} < -1 \Rightarrow \begin{array}{l} T(0, \frac{1}{2}) \text{-ben lok. minimum } (T(0, \frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}) \\ T(1, 0) \text{-ban ill. } T(-1, 0) \text{-ban lok. maximum} \\ (T(1, 0) = T(-1, 0) = 0) \end{array}$$