Folytonos valószínűségi változók transzformációi
Legyen Y = t(X). Ha a t függvény monoton, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y)), \qquad g(y) = f(t^{-1}(y))|[t^{-1}(y)]'|.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int t(x)f(x)dx, \qquad \mathbb{D}^2(Y) = \int t(x)^2 f(x)dx - \mathbb{E}(Y)^2$$

1. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0,1]$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Vizsgáljuk a várható értéket!
Megoldás
$t(x) = 3x + 5$ szigorúan mondoton függvény, és $t^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$ ($\Leftarrow$ $t(x) = 3x + 5 = y$-ból kifejezve)
Sűrűségfüggvénye:
$$g(y) = \begin{cases} (\frac{y-3}{5})' \cdot 1 = \frac{1}{5} & \text{ha } \frac{y-3}{5} \in [0,1] \;\Leftrightarrow\; y \in [3,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!
Megoldás
X: kiégés ideje, $\mathbb{E}(X) = 25 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{25}$, $X \sim Exp(\frac{1}{25}$
Y: nyeremény értéke, $Y = X^2 - 625$, $t(x) = x^2 - 625$ szig. monoton $[0,\infty)$-en.
$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (x^2 - 625)f(x)dx = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - \int_0^\infty 625 f(x)dx$ parciálisan integrálható, vagy: $\int_0^\infty x^2 f(x)dx = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + E(X)^2 = 625 + 625$ és $\int_0^\infty 625 f(x)dx = 625 \int_0^\infty f(x)dx = 625$, ezért $\mathbb{E}(Y) = 625$.

3. Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}, x^2, x^{-1/2}, x^{-1}, x^{-2}$eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?
Megoldás
$A = X^{1/2}$, $t(x) = x^{1/2}$, $\mathbb{E}(A) = \int_0^1 x^{1/2}dx = \frac{2}{3}$, $\mathbb{D}^2(A) = \int_0^1 x dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$
$B = X^2$, $t(x) = x^2$, $\mathbb{E}(B) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(B) = \int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$
$C = X^{-1/2}$, $t(x) = x^{-1/2}$, $\mathbb{E}(C) = \int_0^1 x^{-1/2}dx = 2$, $\mathbb{D}^2(C) = \int_0^1 x^{-1}dx - 4$ nem véges
$D = X^{-1}$, $t(x) = x^{-1}$, $\mathbb{E}(D) = \int_0^1 x^{-1}dx$ nem véges, $\mathbb{D}^2(D) = \int_0^1 x^{-2}dx - (\int_0^1 x^{-1}dx)^2$ sem véges
$E = X^{-2}$, $t(x) = x^{-2}$, $\mathbb{E}(E) = \int_0^1 x^{-2}dx$ nem véges, $\mathbb{D}^2(E) = \int_0^1 x^{-4}dx - (\int_0^1 x^{-2}dx)^2$ sem véges

4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. Hosszú kutatás után bevezetnek egy új (lineáris) eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?
Megoldás
X: villanykörte kiégési ideje $\sim Exp(\lambda)$. $t(x) = ax + b$ meg kell határoznunk a-t, b-t
$Y = aX + b$ és $E(Y) = \frac{3}{\lambda}$:
$\frac{3}{\lambda} = \int_0^\infty (ax + b)f(x)dx = a\int_0^\infty (xf(x)dx + b\int_0^\infty f(x)dx = a\mathbb{E}(X) + b$. Tehát $a = 3$ és $b = 0$.

5. Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása? Mi lesz az új várható érték, és az új szórás?
Megoldás
$X \sim Exp(2)$, $t(x) = x^k \;\Rightarrow\; t^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$, $t(x)$ szig. mon. $[0,\infty)$-en
$$g(y) = \begin{cases} \lambda^{-\lambda \sqrt[k]{y} \frac{1}{k} y^{1/k-1}} & \text{ha } \sqrt[k]{y} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
$\mathbb{E}(Y) = \lambda \int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx$, indukcióval és parc. int. bizonyítható, hogy $\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$, így $\mathbb{E}(Y) = \frac{k!}{\lambda^k}, \mathbb{D}^2(Y) = \lambda\int_0^\infty x^{2k}e^{-\lambda x}dx - \frac{k!^2}{\lambda^{2k}} = \frac{(2k)!}{\lambda^{2k}} - \frac{k!^2}{\lambda^{2k}}$ újra használva az állítást $k = 2k$-ra

6. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5,8]$ intervallumon. Számoljuk ki
a) $|X - 6|$ b) X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Megoldás
a)t(x) nem monoton. Számoljuk először az eloszlás függvényt:

$$G(y) = \begin{cases} \frac{2y}{3} & \text{ha } y \in [0,1] \ \Leftrightarrow x \in [6-y, 6+y], \\ \frac{y+1}{3} & \text{ha } y \in [1,2] \ \Leftrightarrow x \in [5, 6+y], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Lederiválva megkapjuk a sűrűségfüggvényét:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{ha } y \in [0,1] \ \Leftrightarrow x \in [6-y, 6+y], \\ \frac{1}{3} & \text{ha } y \in [1,2] \ \Leftrightarrow x \in [5, 6+y], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) $t(x) = x^2$ szig. mon. $[5,8]$-on, $t^{-1}(y) = \sqrt{y}$ így:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{ha } y \in [25, 64] \ \Leftrightarrow x \in [5,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} \int_{25}^{y} \frac{1}{6\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}-5}{3} & \text{ha } y \in [25, 64] \ \Leftrightarrow x \in [5,8], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. Legyen X egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.
Megoldás
$X \sim Exp(1)$, $t(x) = \ln(x)$ szig. mon. $t^{-1}(y) = e^y$

$$g(y) = \begin{cases} e^{-1e^y} e^y & \text{ha } x \geq 0 \ \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}, \\ - & . \end{cases}$$

8. Legyen X egyenletes eloszlású az (α, β) intervallumon. Mi lesz $Z = aX + b$ eloszlása?
Megoldás
$X \sim Egyenletes(\alpha, \beta)$, $t(x) = ax + b$ szig. mon. $\Rightarrow$ $t^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} \frac{1}{|a|} & \text{ha } x \geq [\alpha, \beta] \ \Leftrightarrow y \in [a\alpha + b, a\beta + b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a negatív akkor y intervallumának két határa felcserélődik.

9. Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása? (Tipp: határozzuk meg és csodálkozzunk rá Z nevezetes sűrűségfüggvényére.)
Megoldás
$X \sim N(\mu, \sigma)$ és $t(x) = ax + b$ szig. mon. $\Rightarrow$ $t^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$ $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot a} e^{-\frac{y-b-a\mu}{2(\sigma \cdot a)^2}} \Rightarrow$ ez a sfv-e $N(b + a\mu, \sigma$-nak. Tehát X ilyen eloszlású.

10. A $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

11. Legyen (X,Y) eloszlás egyenletes az egységnégyzeten. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

12. Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

13. Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású változók λ és μ paraméterekkel. Határozzuk meg $V = Y/X$ eloszlását, és számítsuk ki a $P(X < Y)$ valószínűséget.

14. (X,Y) kétdimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye legyen a következo: $f(x,y) = \frac{xy}{64}$, ha $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 4$, 0 egyébként

   a) Adjuk meg X eloszlását!
   b) Tudjuk, hogy $X = 3$, adjuk meg Y eloszlását!
   c) Mi lesz $X + Y$ eloszlása?
   d) Mi lesz $X \cdot Y$ eloszlása?

   e) Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy 3 helyére egy változót írunk, azaz: tudjuk, hogy $X = x$, ahol $0 \leq x \leq 4$, adjuk meg Y eloszlását!

Megoldás

a) marinális sfv-e X-nek:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^4 \frac{xy}{63} = \frac{x}{8} & \text{ha } x \geq [0,4] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) Számoljuk ki g(y|x) feltételes sfv-t:

$$g(y|x) = \begin{cases} \frac{h(xy)}{f(x)} = \frac{y}{8} & \text{ha } y \in [0,4], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így $g(y|3) = \frac{y}{8}$, ha $y \in [0,4]$ és 0 egyébként.

c) Konvolúció $Z = X + Y$, $y \in [0,4]$ és $x = z - y \in [0,4] \Rightarrow z \in [0,8]$ és $y \in [z, 4 - z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \frac{z-y}{8}\frac{y}{8} = [\frac{zy^2}{128} - \frac{y^3}{192}]_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \begin{cases} \frac{z^3}{192} & \text{ha } z \in [0,4] \\ \frac{z^3}{384} + \frac{3z}{16} & \text{ha } z \in [4,8] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Konvolúció

Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k, Y=l-k).$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=l-k).$$

Például ha X és Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint: P (dobások összege = 8) = P (X = 2)P (Y = 6) + P (X = 3)P (Y = 5) + P (X = 4)P (Y = 4) + P (X = 5)P (Y = 3) + P (X = 6)P (Y = 2)

Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, akkor $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

15. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0,1]$-en, és összeadom oket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

Megoldás

$X, Y \sim Egyenletes(0,1)$, $Z := X + Y$, $y \in [0,1]$ és $x = z - y \in [0,1] \Rightarrow z \in [0,2]$, $y \in [z-1, z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-1,0\}}^{\max\{z,1\}} 1dy = [y]_{\max\{z-4,0\}}^{\max\{z,4\}} \begin{cases} z & \text{ha } z \in [0,1] \\ 2-z & \text{ha } z \in [1,2] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

16. Számoljuk ki egy $[0,2]$-n és egy $[0,3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

Megoldás

$X \sim Egyenletes(0,2)$, $Y \sim Egyenletes(0,3)$ $Z := X + Y$, $y \in [0,3]$ és $x = z - y \in [0,2] \Rightarrow z \in [0,5]$, $y \in [z-2, z]$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \int_{\max\{z-2,0\}}^{\max\{z,3\}} \frac{1}{6}dy = [\frac{y}{6}]_{\max\{z-2,0\}}^{\max\{z,3\}} \begin{cases} \frac{z}{6} & \text{ha } z \in [0,2] \\ \frac{1}{3} & \text{ha } z \in [2,3] \\ \frac{5-z}{6} & \text{ha } z \in [3,5] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

17. Számítsuk ki két darab független 1 paraméterű Poisson eloszlás összegének eloszlását!

Megoldás

$X, Y \sim Poi(1)$, $Z := X + Y$ és X,Y ftlenek:

$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=l, Y=k-l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=k-l) = \cdots = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$. Tehát $Z \sim Poi(2)$

18. A binomiális eloszlás értelmezése alapján mutassuk meg, hogy egy binomiális (n, p) és egy tőle független binomiális (m, p) valószínűségi változó összege szintén binomiális, $n + m$ és p paraméterekkel.
Megoldás
Van egy hamis érménk, ami p valószínűséggel ad fejet, akkor n dobásból a fejek száma $\sim Bin(n, p)$ eloszlást ír le, ha utána még dobunk m-szer, akkor a fejek száma a második szakaszban $\sim B(m, p)$. Megszakítás nélkül tekintve $\sim Bin(n + m, p)$ eloszlást ír le.

19. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás összegének és különbségének eloszlását!
Megoldás
a) $X \sim Exp(\lambda_1), Y \sim Exp(\lambda_2)$, $Z := X + Y, y \geq 0, x = z - y \geq 0 \Rightarrow y \leq z$

$$h(z) = \int f(z-y)g(y)dy = \begin{cases} \int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 z} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} dy = \cdots = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}] & \text{ha } z \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) $Z := X - Y, y \geq 0, x = z + y \geq 0 \Rightarrow y \leq -z$

$$h(z) = \int f(z+y)g(y)dy = \int_{\min,\{0,-z\}}^{\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 z} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} dy = \cdots = \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{\lambda_2 z} & \text{ha } z < 0 \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 z} & \text{ha } z > 0 \end{cases}$$

20. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!
Megoldás
$X, Y \sim N(0, 1)$, $Z := X + Y$
$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} e^{-\frac{(z/2-y)^2}{2/2}} dy e^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4}$ Az integrál pont egy $N(z/2, 1/\sqrt{2})$ normális sfv teljes integrálja, azaz 1. A kapott eredmény pedig $N(0, \sqrt{2})$ normálisú. $(\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y))$

Regressziós görbe

Adott az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó az együttes eloszlásával. X-et megfigyelve Y -t szeretnénk közelíteni egy $y = k(x)$ alakú tippelő függvénnyel. A közelítés azt jelenti, hogy az elkövetett $(Y - k(X))^2$ négyzetes hiba átlagát szeretnénk minimalizálni. Pontosabban azt a k függvényt keressük, amire $E(Y - k(X))^2$ minimális. Az órán tanult tétel kimondja, hogy ebben az esetben a megoldás a feltételes várható érték: $k(x) = E(Y|X = x)$. (Ez a szokásos regressziós görbe.)
Ha az elkövetett abszolút hiba átlagát, azaz $E(|Y - k(X)|)$-et szeretnént minimalizálni, akkor a leheto legjobb tippelés az Y feltételes mediánja. Azaz ebben az esetben az $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(u|x)du$ feltételes eloszlásfüggvényt kell 1/2-del egyenlové tenni, és belőle y-t, mint x függvényét kifejezni.

21. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású a $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$ pontok által meghatározott háromszögön. Számítsuk ki Y-nak X-re vonatkozó regressziós függvényét.
Megoldás
$T := \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}$ négyzetes hiba minimum: $f(x) = \int_y^{2-2x} 1dy = 2 - 2x$, ha $x \in [0, 1]$ és 0 egyébként
$g(y|x) = \frac{1}{2-2x}$, ha $y \in [0, 2 - 2x]$ és 0 egyébként.
$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_0^y yg(y|x)dy = \int_0^y \frac{y}{2-2x}dy = [\frac{y^2}{2-2x}] = 1 - x$, tehát $k(x) = 1 - x$
abszolút hiba minimum: $G(y|x) = \int_0^y \frac{1}{2-2x}dy = \frac{y}{2-2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow k(x) = y = 1 - x$

22. Magyarországon a 18 év feletti fériak testmagasságának átlagos értéke 178 cm, szórása 10 cm. Nőknél ugyanezek az adatok 166 cm és 8cm. Focimeccseken a drukkerek 10%-a nő, a többiek fériak. Mindkét nem testmagasságágának eloszlását normálisnak véve:
   a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy 170 cm-nél alacsonyabb szurkoló nő?
   b) Adjuk meg x függvényében annak a valószínűségét, hogy egy x cm magas drukker férfi.
   c) Hogyan tippeljünk a szurkolók testmagasságából a nemükre, ha a célunk az, hogy a
lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen tippeljünk?
Megoldás
a) Y: férfiak magassága $\sim N(1,78, 0,1)$, X: nők magassága $\sim N(1,66, 0,08)$, $\mathbb{P}(N|D) = 0,1$
$\mathbb{P}(N|\text{''} < 1,7\text{''}, D) = \frac{\mathbb{P}(\text{''}<1,7\text{''}|D,N)\mathbb{P}(N|D)}{\mathbb{P}(\text{''}<1,7\text{''}|D,F)\mathbb{P}(F|D)+\mathbb{P}(\text{''}<1,7\text{''}|D,N)\mathbb{P}(N|D)}$ Feltételezhetjük, hogy $\mathbb{P}(\text{''} < 1,7\text{''}|D, N) = \mathbb{P}(\text{''} < 1,7\text{''}|N)$ hasonlóan a férfiakra, így:
$\mathbb{P}(N|\text{''} < 1,7\text{''}, D) = \frac{\Phi(\frac{1,7-1,66}{0,08})0,1}{\Phi(\frac{1,7-1,66}{0,08})0,1+\Phi(\frac{1,7-1,78}{0,1})0,9} \approx \frac{1}{2}$

b) hasonlóan: $\mathbb{P}(N|\text{"} < x\text{"}, D) = \frac{\Phi(\frac{x-1,78}{0,1})0,9}{\Phi(\frac{x-1,78}{0,1})0,9+\Phi(\frac{x-1,66}{0,08})0,1}$

23. A Duna holnaputáni budapesti vízállását akarjuk becsülni a mai bécsi vízállásból. Bár a két vízállás közt szoros kapcsolat van, azért pontosan nem lehet megmondani a vízállást, mindkettot egy-egy valószínűségi változó írja le. Tegyük fel, hogy mindkét vízállást egy 0 és 1 közti számmal tudjuk jellemezni, melynek legyen az együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{6}{5} \cdot (x+(y-1)^2)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$.

a) Határozzuk meg a budapesti vízállás eloszlását a bécsi ismeretében, azaz a feltételes sűrűségfüggvényt.

b) Mi annak a valószínűége, hogy Budapesten alacsonynak nevezhető (azaz 0 és 1/2 közé esik) a vízállás, ha Bécsben x volt? (Mennyi ez $x = 1/3$-ra?)

c) Ha már ismerjük a bécsi vízállást, mire tippelünk a budapestire, ha a lehető legkisebb átlagos négyzetes hibát akarjuk elkövetni?

d) És ha az átlagos abszolút hibát akarjuk minimalizálni?

Megoldás

a) X Bécsi vízállás ma, Y: Bp-i vízállás holnapután, X peremeloszlása:
$f(x) = \frac{6}{5}\int_0^1 x + (y-1)^2 dy = \frac{6}{5}\frac{3x+1}{3}$, $g(y|x) = \frac{3x+3(y-1)^2}{3x+1}$, ha $y \in (0, 1)$
b) $\mathbb{P}(Y \in (0, 1/2)|X = x) = \int_0^{1/2} \frac{3x+3(y-1)^2}{3x+1} = \frac{12x+7}{24x+8}$, $\mathbb{P}(Y \in (0, 1/2)|X = 1/3) = \frac{11}{16}$
c) $k(x) = \mathbb{E}(Y|X = x) = \int_0^1 y\frac{3x+3(y-1)^2}{3x+1} dy = \frac{6x+1}{12x+4}$
d) $F_{Y|X}(y|x) == \int_0^y \frac{3x+3(y-1)^2}{3x+1} dy = \frac{3xy+y^3-3y^2+3y}{3x+1}$ egyenlővé téve 1/2-del: $x = k^{-1}(y) = \frac{2y^3-6y^2+6y-1}{3+6y}$

24. * Az egységkörön választunk egyenletes eloszlás szerint egy (X, Y) pontot. Az X koordináta ismeretében hogyan közelítenénk $|Y|$-t, feltéve, hogy a hiba abszolútértéknégyzetét szeretnénk minimalizálni?

25. Többpártrendszer esetén az egyes pártokra leadott szavazatok százalékos aránya valószínűségi változó. Az A párt az összes szavazatok X, a B párt az összes szavazatok Y hányadát kapja, együttes eloszlásuk a $h(x, y) = 24xy$, ha $0 < x, 0 < y, x + y < 1$ sűrűségfüggvényt követi. Ha a B párt az összes szavazatok 40%-át kapta, mire tippelünk, mennyit kapott az A párt?

Megoldás

$g(y) = \int_0^{1-y} 24xy dx = 12(1-y)^2 y$, ha $y \in [0, 1]$ és 0 egyébként
$f(x|y) = \frac{2x}{(1-y)^2}$, ha $x \in [0, 1-y]$ és 0 egyébként
négyzetes hiba: $E(X|Y) = \int_0^{1-y} \frac{2x^2}{(1-y)^2} = \frac{2}{3}(1-y)$ ha $y = 0,4$, akkor $x = 0,4$
abszolút hiba: $\int_0^x \frac{2x}{(1-y)^2} dx = \frac{x^2}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = l(y) = \sqrt{\frac{1}{2}}(1-y)$, ha $y = 0,4$, akkor $x = 0,42$