A2X VIZSGA

2010. JANUÁR 11.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám	8	10	10	9	–	37

NÉV Példa Peti

NEPTUN KÓD ABCD12

1.) Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg A sor-redukált lépcsős alakját. (6p)

Ezt felhasználva, oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert (4p)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

2.) Legyen $T := x^3 - xy + y^3$, $x := \varrho\cos\varphi$, $y := \varrho\sin\varphi$. A láncszabályt használva, határozzuk meg $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ (5p) és $\frac{\partial T}{\partial \varrho}$ (5p) kifejezéseket.

3.) Határozzuk meg az $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ felület érintősíkját az $(1, 2, -1)$ pontban (6p). Írjuk fel $\mathbf{R}^n$-ben az adott pontra illeszkedő adott normálvektorú sík általános egyenletét (4p).

4.) Legyen

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } xy = 0, \\ 0, & \text{ha } xy \neq 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg az origóban a tetszőleges irányban vett iránymenti deriváltat, ha létezik. Ha nem létezik, akkor ezt számolással igazoljuk.

5.) Legyenek az $x := x(y,z)$, $y := y(x,z)$, $z := z(x,y)$ függvények az $F(x,y,z) = 0$ implicit egyenlettel definiálva. Határozzuk meg a D_1x, D_2y, D_2z értékeket ahol értelmezettek. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra a $(D_1x)\cdot(D_2y)\cdot(D_2z)$ kifejezést.

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\,(\mathbf{1p}) \\ &= \underbrace{(3x^2 - y)}\underbrace{(-\varrho \sin\varphi)}\,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p}) \\ &\quad + \\ &\quad \underbrace{(3y^2 - x)}\underbrace{\varrho\cos\varphi}\,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p}).\end{aligned}$$

3.) A felület egyenlete

$$F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0.\,(\mathbf{1p})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} F\big|_{(1,2,-1)} &= (2xyz - 2z^2)\mathbf{i} + (x^2z + 6y)\mathbf{j} + (x^2y - 4xz + 8)\mathbf{k}\big|_{(1,2,-1)}\ (\mathbf{1p} + \mathbf{1p} + \mathbf{1p}) \\ &= -6\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 14\mathbf{k}.\,(\mathbf{1p})\end{aligned}$$

Adott $\mathbf{r}_0$ pontra illeszkedő adott $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle = 0.\,(\mathbf{4p})$$

Ezt használva a sík egyenlete

$$-6(x - 1) + 11(y - 2) + 14(z + 1) = 0,$$

$$6x - 11y - 14z = -2.\,(\mathbf{1p})$$

4.) A definíció alapján dolgozunk. Legyen $\mathbf{u} := (u_1, 0)$ egységvektor $(\mathbf{1p})$. Ekkor

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0+}\frac{f(tu_1, 0) - f(0,0)}{t}\,(\mathbf{1p}) \\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{1-1}{t} = 0\,(\mathbf{1p}),\end{aligned}$$

tehát f differenciálható az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ irányokban $(\mathbf{1p})$.

Hasonlóan, legyen $\mathbf{u} := (0, u_2)$ egységvektor $(\mathbf{1p})$. Ekkor

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0+}\frac{f(0, tu_2) - f(0,0)}{t}\,(\mathbf{1p}) \\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{1-1}{t} = 0\,(\mathbf{1p}),\end{aligned}$$

tehát f differenciálható az $(0, 1)$ és $(0, -1)$ irányokban $(\mathbf{1p})$.

Legyen $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$, $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ egységvektor. Ekkor

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0+}\frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t}\,(\mathbf{1p}) \\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{0-1}{t}\ \nexists.\,(\mathbf{1p})\end{aligned}$$

Tehát ezekben az irányokban nem differenciálható.

5.) Az $F(x(y,z), y, z) = 0$ egyenletből

$$D_1F(x(y,z), y, z)D_1x(y,z) + D_2F(x(y,z), y, z) = 0.\,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p})$$

$$D_1F(x(y,z),y,z)D_1x(y,z) + D_2F(x(y,z),y,z) = 0. \,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p})$$

Rendezés után

$$D_1x(y,z) = -\frac{D_2F(x(y,z),y,z)}{D_1F(x(y,z),y,z)}. \,(\mathbf{1p})$$

Az $F(x, y(x,z), z) = 0$ egyenletből

$$D_2F(x,y(x,z),z)D_2y(x,z) + D_3F(x,y(x,z),z) = 0. \,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p})$$

Rendezés után

$$D_2y(x,z) = -\frac{D_3F(x,y(x,z),z)}{D_2F(x,y(x,z),z)}. \,(\mathbf{1p})$$

Az $F(x, y, z(x,y)) = 0$ egyenletből

$$D_3F(x,y,z(x,y))D_2z(x,y) + D_1F(x,y,z(x,y)) = 0. \,(\mathbf{1p} + \mathbf{1p})$$

Rendezés után

$$D_2z(x,y) = -\frac{D_1F(x,y,z(x,y))}{D_3F(x,y,z(x,y))}. \,(\mathbf{1p})$$

A kapott kifejezéseket használva

$$D_1x \cdot D_2y \cdot D_2z = -\frac{D_2F(x,y,z)}{D_1F(x,y,z)} \cdot \frac{D_3F(x,y,z)}{D_2F(x,y,z)} \cdot \frac{D_1F(x,y,z)}{D_3F(x,y,z)} = -1. \,(\mathbf{1p})$$