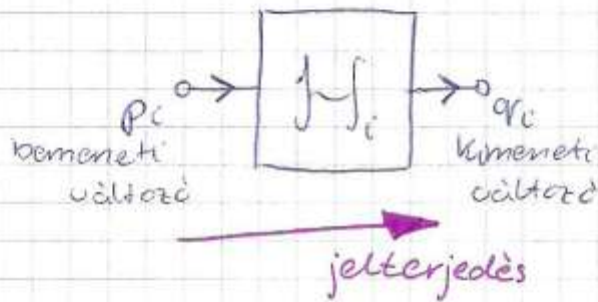


V. Jelfolyam-típusú hálózatok

hálózat: komponensek összekapcsolása
 ↓
 karakterisztikák
 ↓
 összehúzás, könszerek

1, Komponensek

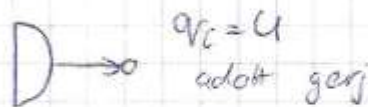


Karakterisztika:

$$q_i = \int_i \{p_i\}$$

Speciális komponensek:

- forrás



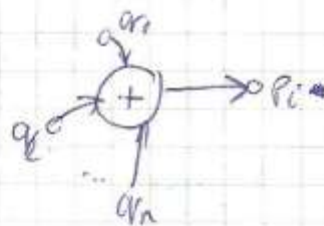
- ~~nyelő~~ nyelő



2, Összekapcsolási szabályok

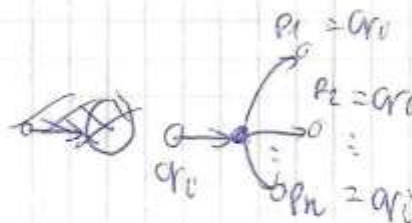
a) összegző csomópont

$$p_i = \sum_{k=1}^n q_k$$

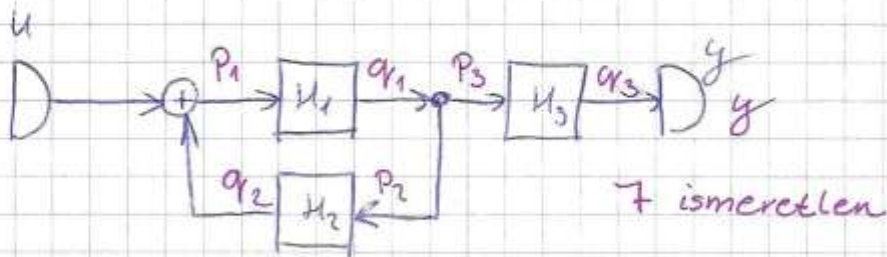


b) szétágyazó csomópont

$$p_i = q_i$$



Példa



7 egyenlet

3 karakterisztika:

$$q_1 = H_1 \{p_1\}; \quad q_2 = H_2 \{p_2\}; \quad q_3 = H_3 \{p_3\}$$

4 összekapcsolási képlet:

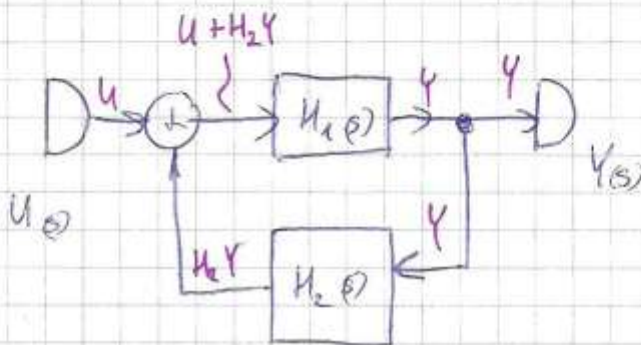
$$p_1 = u + q_2$$

$$p_2 = q_1$$

$$p_3 = q_1$$

$$y = q_3$$

3. Visszacsatolt rendszer (startomány)



Egyszerű példa:

$$H_1(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

2. példa: $\leftarrow$ $t_2 \rightarrow$! nem stabilis!

$H_2(s) = K$ konst. $K=?$, hogy a visszacsatolt rsz. stabilis legyen!

$$H_d(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ?$$

$$(1 + H_2 Y) H_1 = Y \Rightarrow Y(1 - H_1 H_2) = U H_1$$

$$H_d(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s) \cdot H_2(s)} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3) - K(s+1)} = \frac{s+1}{s^2 + s(1-K) - 6 - K}$$

Hurwitz - Kriteérium:

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad \text{gyökei: } \operatorname{Re}\{p_1\} < 0 \text{ és } \operatorname{Re}\{p_2\} < 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 > 0 \text{ és } a_0 > 0$$

(magasabb polinómoknál csak szükséges feltétel)

$$(1-K) > 0 \rightarrow K < 1$$

$$-6-K > 0 \rightarrow \boxed{K < -6} \Rightarrow \text{a rendszer instabil}$$

3) Diszkrét idejű (DI) rendszerek

I. Alapfogalmak

diszkrét „idő”: - csak egész értékek

- jele: k

• elnevezés: k -adik diszkrét időpont, ütem

1) DI jelek

• jelölés: $x[k]$, $u[k]$, ...

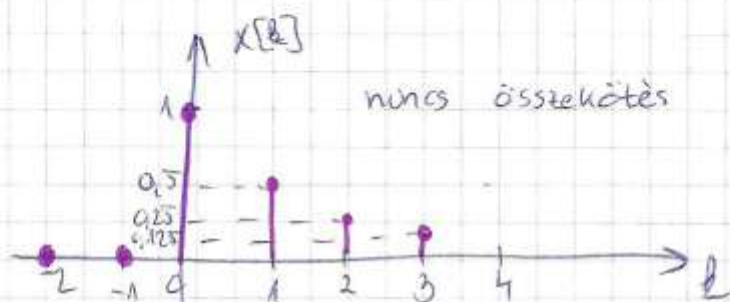
$$k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

a) DI jelek leírása

α) formulával:

$$x[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \in \mathbb{Z}_- \\ 0,5^k, & \text{ha } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

β) grafikusan



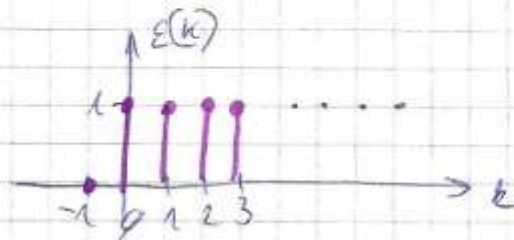
Def. belépő jel: $x[k] \equiv 0, \quad k = -1, -2, \dots$

γ) felsorolás

$$x[k] = \left\{ \begin{matrix} 1; & 0,5; & 0,25; & \dots \\ \text{belépő} & \text{a jel} & & \end{matrix} \right\}$$

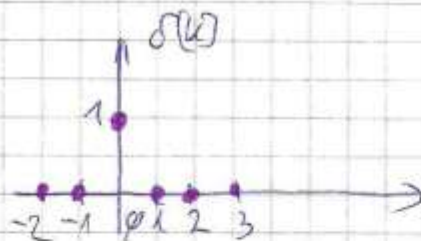
b) speciális DS jelek

a) egységugrás : $\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$



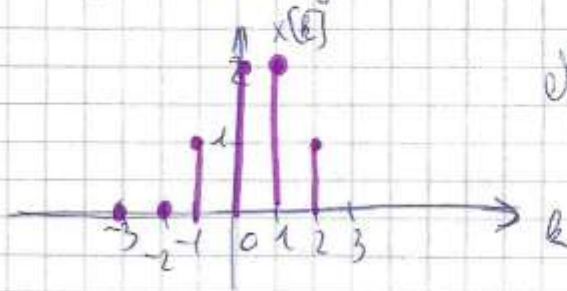
beépítő jel

b) egységimpulzus : $\delta[k] = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$

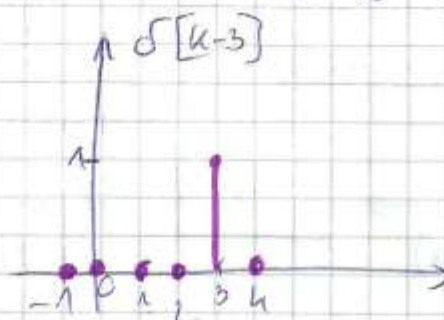
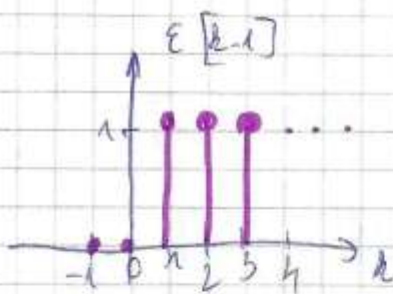
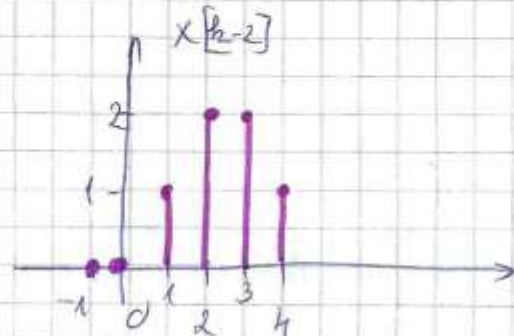


beépítő jel

c) eltolás jelek



eltolás
⇒



Következők:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$$

Időablak:

$$w[k] = \varepsilon[k-k_1] - \varepsilon[k-k_2]$$

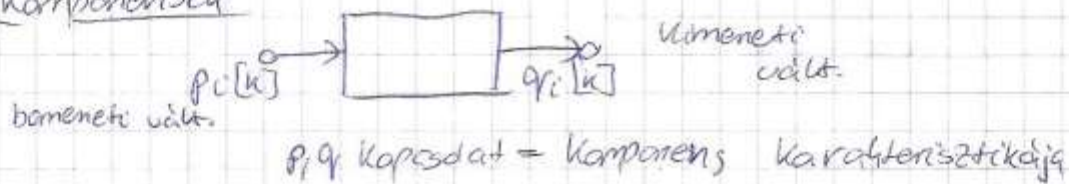
$$k_2 > k_1 \text{ és } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$w[k] = \begin{cases} \emptyset & k < k_1 \\ 1 & k_1 \leq k \leq k_2 \\ \emptyset & k \leq k_2 \end{cases}$$

2) DI hálózat

- objektum modellje
- sok változó; spec: gerjesztés, válasz
- rendszert reprezentál
- hálózat: komponensek összekapcsolása

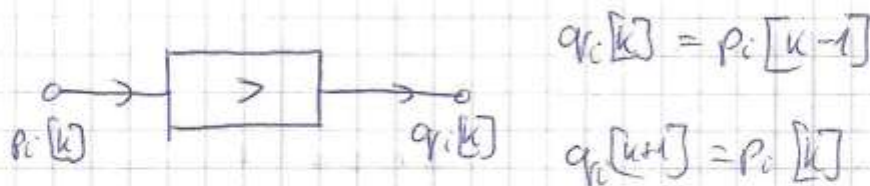
a) Komponensek



2) erősítő (szorzó)



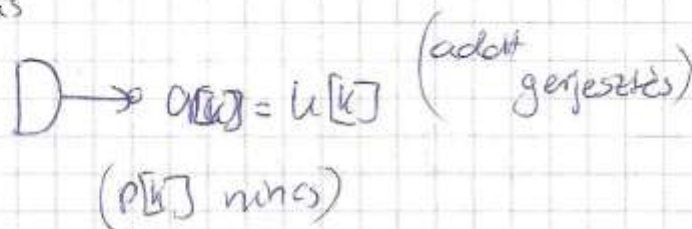
b) késleltető



dinamikus komponens (memóriával bíró)

operátoros kapcsolat

8) forrás



δ) nyelőd

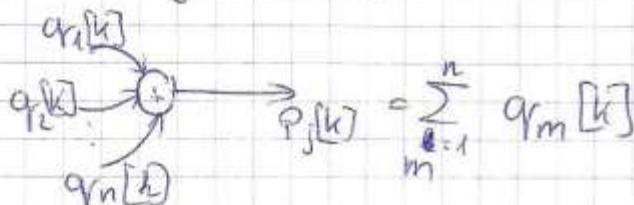


(keresett célra)
($q[k]$ nincs)

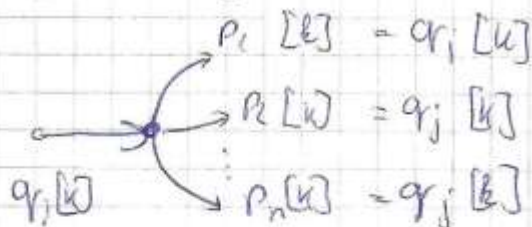
γ) + δ) ⇒ külvilág kapcs.

b) összeadás kény szerek

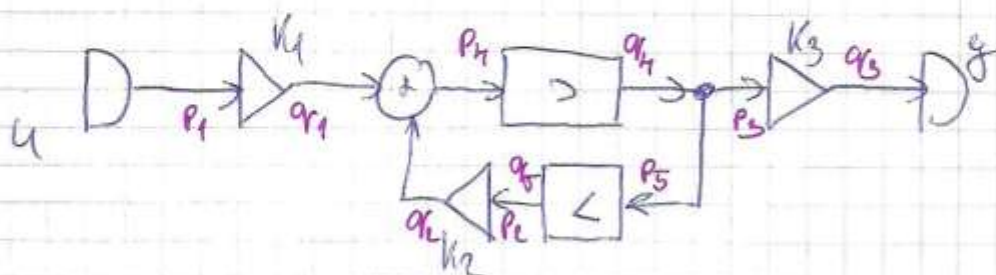
a) összeadó csomópont



b) szétágazó csomópont



c) A hálózati egyenletek teljes rendszere



ismeretlenek száma

$(p_i, q_i) : 10 \text{ db}$
 $\text{válasz} : 1 \text{ db}$

11 ismeretlen

Egyenlet

LF betege: $\begin{cases} 5 \text{ db e} - \text{karaktisztika} \rightarrow \boxed{\rightarrow} \rightarrow \Delta \\ 6 \text{ db e} - \text{kegyszerűből} \\ \rightarrow (HSTR) \end{cases}$

megoldható $\Leftrightarrow$ reguláris hálózat

II. Vizsgálat az időtartományban1. Állapotváltozás leírás (AVL)

a) állapotváltozók

- minimális N számosságú vektorhalmaz

$$\underline{x}[k] = [x_1[k], x_2[k], \dots, x_N[k]]^T$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \underline{x}[k] \text{ ismert} \\ u[k] \quad k_a \leq k \leq k_b \text{ ismert} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{x}[k_b]$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \underline{x}[k] \\ u[k] \end{array} \right\} \text{ ismert} \rightarrow y[k]$$

AVL normál alakja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}[k+1] = \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k] \\ y[k] = \underline{C}^T \underline{x} + D u[k] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{differencia egyenlet} \\ \text{állapot egyenlet} \end{array}$$

röviden $\underline{x}' = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} u$

$y = \underline{C}^T \underline{x} + D u$

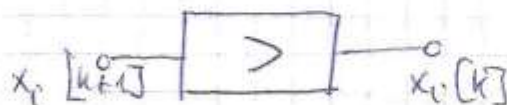
Felölés

$$x[k] = x$$

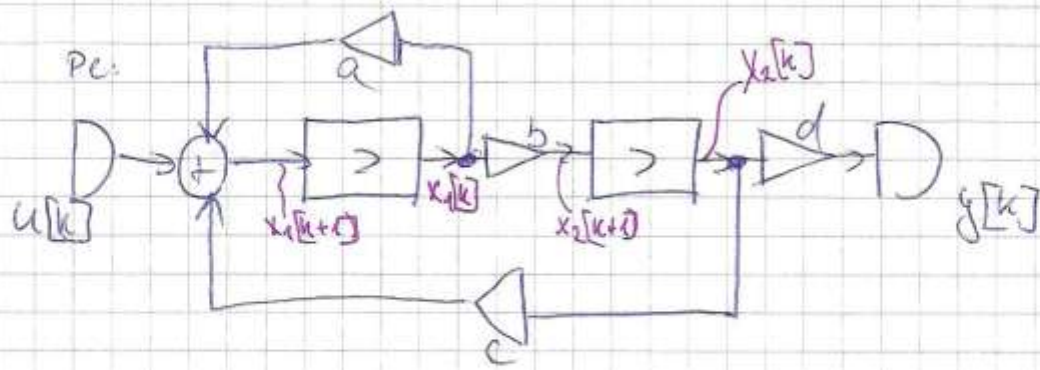
$$x[k+1] = x'$$

b) AVL felírása hálózattól

Célszerű választás:



rendszer: $N = \text{Késleltetőh szám}$



$$x_1[k+1] = a \cdot x_1[k] + c \cdot x_2[k] + u[k]$$

$$x_2[k+1] = b \cdot x_1[k]$$

$$y[k] = d \cdot x_2[k]$$

ÁVL
normál
alakja

vércideben

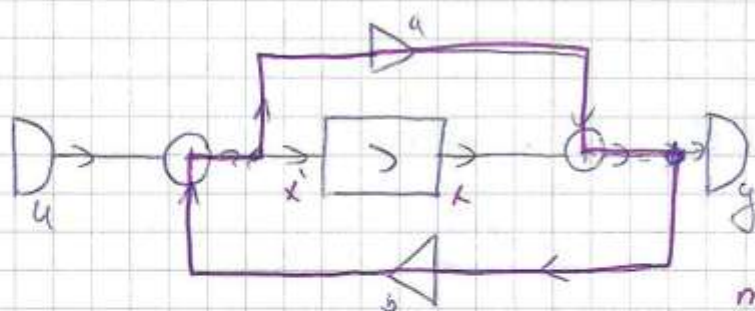
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Reguláris a hálózat, ha létezik az ÁVL Normál Alakja

ÁVL létezése $\Leftrightarrow$ a hálózat reguláris

De:



memóriamentes
hálózat

$$x' = u + b(1+ax')$$

$$x'(1-ab) = b \cdot u$$

$ab=1 \rightarrow$ nem reguláris

c) AVL hálózati realizációja

cél: AVL $\rightarrow$ hálózat

Kanonikus realizáció

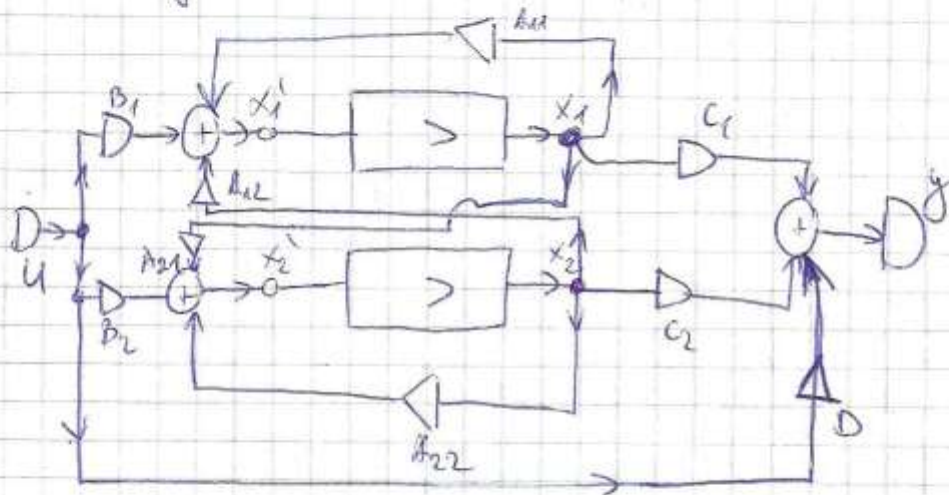
minimális számú $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Re

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u$$

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du$$



N készletetű

$(N^2 + 2N + 1)$ szorzó

2) Az AVL megoldása

feladat: $x[k] = ?$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$y[k] = ?$ $k = 0, 1, 2, \dots$

adott $u[k]$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$x[0]$ kezdeti értéke

Gyakran: belépő gerj. + kauzális rsz. $\Rightarrow x[0] = 0$

a) lépésről - lépésre módszer

ismert: $x[0]$ $u[k]$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x[1] = A x[0] + B u[0] \quad \checkmark \quad y[0] = C^T x[0] + D u[0]$$

$$x[2] = A x[1] + B u[1] \quad \checkmark \quad y[1] = C^T x[1] + D u[1]$$

$$\vdots$$

- egyszerűen programozható)

- hosszadalmas

- eredményből nehéz általánosítás

pe.

$$x' = 0,5 + 3u$$

$$u[k] = 0[k]$$

$$y = x + 2u$$

$$x[0] = 0$$

$$x[1] = 0,5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$x[2] = 0,5 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 1,5$$

$$x[3] = 0,5 \cdot 1,5 + 3 \cdot 0 = 0,75$$

b) összetevőre bontás módszere

$$x[k] = x_f[k] + x_g[k]$$

stabil összetevő gerjesztett összetevő

a) stabil összetevő $x_f[k]$ • a homogén egyenlet $(\dot{x} = A x)$ által.
megoldása

$$\text{alakja: } x_f[k] = K \cdot m \cdot \lambda^k$$

$$K \cdot m \cdot \lambda^k = A \cdot K \cdot m \cdot \lambda^k$$

$$0 = (A - \lambda I) m \quad \left(\begin{array}{l} \text{szájtarték} \\ \text{probléma} \end{array} \right)$$

$$\det (\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \quad \text{karakterisztikus egyenlet}$$

N megoldás: λ_i ($i=1,2,\dots,N$) saját érték
 m_i ($i=1,2,\dots,N$) saját vektor

• N különböző sajátérték

$$x_A[k] = k_1 m_1 \lambda_1^k + k_2 m_2 \lambda_2^k + \dots + k_N m_N \lambda_N^k$$

• $(N-2)$ különböző sajátérték és 1 kétszeres

$$x_B[k] = k_1 m_1 \lambda_1^k + \dots + k_{N-2} m_{N-2} \lambda_{N-2}^k \oplus$$

$$\oplus k_{N-1} m_{N-1} \lambda_{N-1}^k + k_N m_N \lambda_{N-1}^k \cdot k$$

*) gerjesztett állapot $x_g[t]$

az inhomogén egyenlet $(x' = \underline{A} x + \underline{b} u)$

partikuláris megoldás

Próba függvény módszer (csak "egyszerű alakú" gerjesztésre)

$u[k]$	$x[k]$
u_0	x_0 (konst)
$u_1 a^k$	$x_1 a^k$
$A \cos(\omega k) + B \sin(\omega k)$	$(C \cos(\omega k) + D \sin(\omega k))$
$u_0 \cdot \lambda_i^k$ i-edik saját érték	$x_1 \cdot \lambda_i^k$

A polinom fu-b behelyettesítve az inhomogén egyenletbe a polinom függvény paramétereit.

8) a kezdeti feltétel energiájutása

$x[0]$ adott

$$x[0] \triangleq x_f[0] + x_g[0]$$

$\hookrightarrow N$ határozatlan állandó

$$x[0] - x_g[0] = k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_N m_N$$

$$x[0] - x_g[0] = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ m_1 & m_2 & m_N \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix}}_{\underline{K}}$$

$$\underline{K} = \underline{M}^{-1} (x[0] - x_g[0])$$

5) Példák impulzusválasz számítása

Def: $h[k]$ impulzusválasz, $\delta[k]$ gerjesztésre adott válasz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{B}} \delta[k]$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & k \\ e^x \end{pmatrix}}_{\underline{C}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \delta[k]$$

• Szabad összetevő

$$\det(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 0,8 - \lambda & 0,5 \\ -0,2 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 0,9\lambda + 0,18 = 0$$

$$\lambda_1 = 0,6 \quad \lambda_2 = 0,3$$

$$m_1: \lambda_1 \cdot m_1 = \underline{A} \cdot m_1 \dots$$

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0,93 \\ -0,37 \end{pmatrix} \quad m_2 = \begin{pmatrix} -0,71 \\ 0,71 \end{pmatrix}$$

$$x_f[k] = k_1 \begin{pmatrix} 0,93 \\ -0,37 \end{pmatrix} 0,6^k +$$

$$k_2 \begin{pmatrix} -0,71 \\ 0,71 \end{pmatrix} 0,3^k$$

(folyt.)

$$x_1[k] = k_1 \underline{m}_1 \lambda_1^k + k_2 \underline{m}_2 \lambda_2^k = k_1 \begin{pmatrix} 0,98 \\ -0,37 \end{pmatrix} 0,6^k + k_2 \begin{pmatrix} -0,71 \\ 0,71 \end{pmatrix} 0,3^k$$

• gerjesztési állapot $\underline{x}_g[k]$

$$u[k] = 0[k] \Rightarrow k=1 \text{ ütemmel kezdve}$$

$$u[k] = 0$$

$$\underline{x}_g[k] = 0$$

• Kezdeti feltétel $k=1$ ütemben „illesztünk”

$$\underline{x}[0] = 0 \quad \underline{x}[1] = \underline{A} \underline{x}[0] + \underline{B} u[0] = \underline{B}$$

$$\underline{x}_g + \underline{x}_f = 0 + k_1 \underline{m}_1 \lambda_1^k + k_2 \underline{m}_2 \lambda_2^k \stackrel{k=1}{=} \underline{B}$$

$$k_1 \underline{A}_1 \underline{m}_1 + k_2 \underline{A}_2 \underline{m}_2 = \underline{B} \Rightarrow k_1, k_2$$

$$k_1 = 14,96$$

$$k_2 = 29,86$$

$$\underline{x}[k] = \underline{E}[k-1] - (14,96 \underline{m}_1 \cdot 0,6^k + 29,86 \underline{m}_2 \cdot 0,3^k) =$$

$$= \underline{E}[k-1] (8,98 \underline{m}_1 \cdot 0,6^{k-1} + 8,85 \underline{m}_2 \cdot 0,3^{k-1})$$

• a válasz kifejezése

$$y[k] = \underline{C}^T \cdot \underline{x}[k] + D u[k]$$

c) Az állapotegyenletek megoldása mátrix függvényekkel

$$\underline{x}[k+1] = \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k], \quad \underline{x}[0] \text{ adott}$$

$u[k]$ ismert $k \geq 0$

a) állapotdát

$$\underline{x}[1] = \underline{A} \underline{x}[0] + \underline{B} u[0]$$

$$\underline{x}[2] = \underline{A} (\underline{A} \underline{x}[0] + \underline{B} u[0]) + \underline{B} u[1]$$

$$\underline{x}[3] = \underline{A} [\underline{A} (\underline{A} \underline{x}[0] + \underline{B} u[0]) + \underline{B} u[1]] + \underline{B} u[2]$$

$\vdots$

$$\underline{x}[k] = \underbrace{\underline{A}^k \cdot \underline{x}[0]}_{\text{zérus gerj. összetevő}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B} u[i]}_{\text{zérus állapotú összetevő}} \quad k \geq 1$$

b) Speciális eset: impulzusválasz $u[k] = \delta[k]$

$$\underline{x}[k] = \underline{0} + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B} \delta[i] = \underline{A}^{k-1} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{h}[k] = \underline{C}^T \cdot \underline{A}^{k-1} \underline{B} \cdot \underline{E}[k-1] + \underline{D} \delta[k]$$

d) Az $\underline{A}^k$ mátrix függvény számítása

Egyszerűs λ_i sajátérték esetén ($i=1,2,\dots,N$)

$$\underline{I}_N = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{I}}{\lambda_k - \lambda_p}$$

Lagrange
mátrixok

$k=1,2,\dots,N$

$$\sum_{i=1}^N \underline{I}_i = \underline{I}$$

$$A^k = \sum_{i=1}^N \underline{L}_i \cdot \lambda_i^k$$

kev:

$$h[k] = D \cdot f[k] + E[k-1] \sum_{i=1}^N \underbrace{\underline{C}^T \underline{L}_i D}_{k_i} \lambda_i^{k-1}$$

d) aszimptotikus stabilitás

$$\left. \begin{array}{l} U[k] \equiv \emptyset \quad k \geq 0 \\ \text{(megara kiegészítve)} \\ \text{bármely } x[0] \text{ esetén} \end{array} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \emptyset$$

$\Leftrightarrow$ aszimptotikus stabilitás

$$x_f[k] = \sum_{i=1}^N k_i m_i (\lambda_i)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ ha:}$$

$$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, \dots, |\lambda_n| < 1$$

$$\forall |\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A\text{-stabilitás}$$

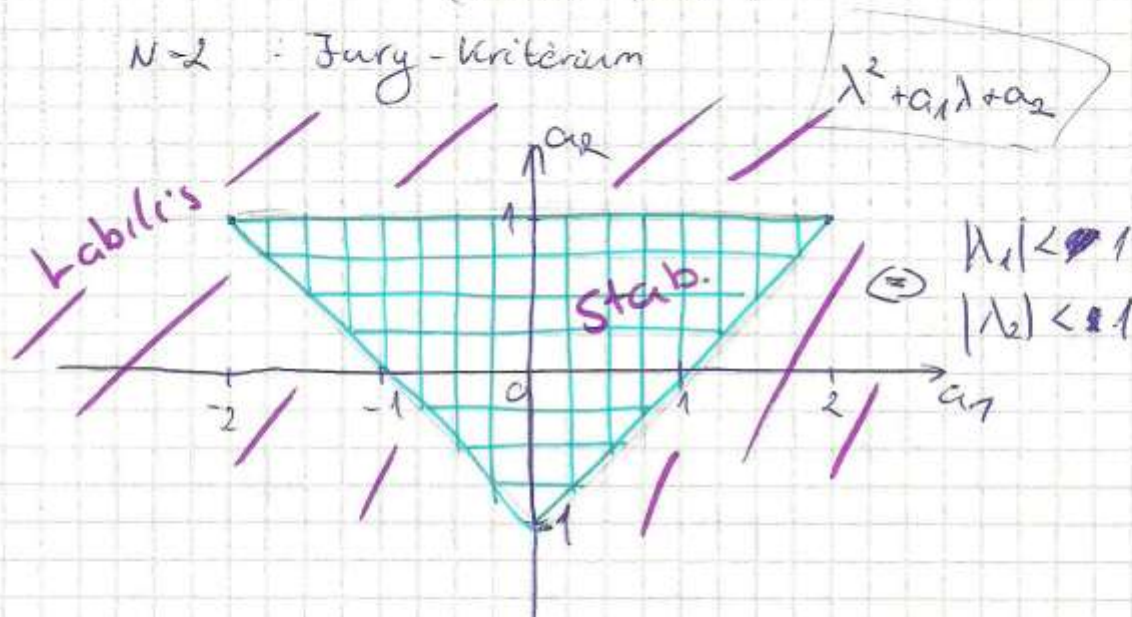
$$\exists |\lambda_j| > 1 \Leftrightarrow \text{labilis}$$



$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N$$

(karakterist. polynom)

$N=2$: Jury-Kriterium



Beispiel ($N=2$ esetén)

① $\lambda^2 - 1,3\lambda + 0,4 = 0$

$\lambda_1 = 0,8 \quad \lambda_2 = 0,5$

$h[k] = C_1 \cdot 0,8^k + C_2 \cdot 0,5^k \quad k \geq 1$

$a_1 = -1,3$
 $a_2 = 0,4$ } Stab.

② $\lambda^2 + \lambda + 0,5 = 0$

$\lambda_1 = -0,5 + j 0,5$

$\lambda_2 = -0,5 - j 0,5 \equiv \lambda_1^*$

$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$a_1 = 1$
 $a_2 = 0,5$ } Stab.

$\lambda_{1,2} = |\lambda| e^{\pm j\alpha}$
 $C_{1,2} = a \pm jb$

$h[k] = C_1 \lambda_1^k + C_1^* \lambda_1^{*k} = (a + jb) |\lambda|^k e^{j\alpha k} + (a - jb) |\lambda|^k e^{-j\alpha k}$

③ $|\lambda|^k \left[a \underbrace{(e^{j\alpha k} + e^{-j\alpha k})}_{2 \cos(\alpha k)} + jb \underbrace{(e^{j\alpha k} - e^{-j\alpha k})}_{2j \sin(\alpha k)} \right]$

e) Zérus sajátértékű rendszermátrix

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-p}}_{N-p \text{ nem zérus}} \quad \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{p \text{ db zérus}} \quad \left. \vphantom{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-p}} \right\} \begin{array}{l} \text{összesen} \\ N \text{ db} \end{array}$$

$$\underline{x}[k] = \sum_{i=1}^N k_i m_i \lambda_i^k \quad \phi^k = 0 \quad k \geq 1$$

↑ (N-p) db határozatlan állandó.

Csak k=P ütemmel kezdve érveges

előtte: k=1, 2, ..., P fokozatos behelgettesítés

illetve k=P ütemben

$$\underline{x}[k=P] \triangleq \sum_{i=1}^N k_i m_i \lambda_i^P$$

pl: N=2

P=1 illetve: $\underline{x}[k=1]$

$$\underline{x}[1] = \underline{A} \underline{x}[0]$$

dimenziója: 1 dimenziója: 2

3.) Rendszer egyenlet

a) fogalma jellemzői

- implicit G-V kapcsolat
- áll. vált. nélkül
- g és u / sok ütemmel kezelhető értékei

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_n y[k-n] =$$

$$= b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]$$

- $(n+m+1)$ db időfüggetlen állandó (invariáns rsz.)
- lin. egyenlet (lineáris rsz.)
- $u[k]$ szetteltett ért. $\neq$ (kauzalitás)
- n = rendszeregyenlet rendszáma
- jobb oldal : mozgó átlag (MA) }
bal oldal : autoregresszió (AR) } ARMA

ARMA - típusú rendszerek

b) A rendszer egyenlet hálózati realizációja
 cél: $RE \rightarrow$ hálózat

Kanonicus realizáció:

• minimális számú késleltető $\square$

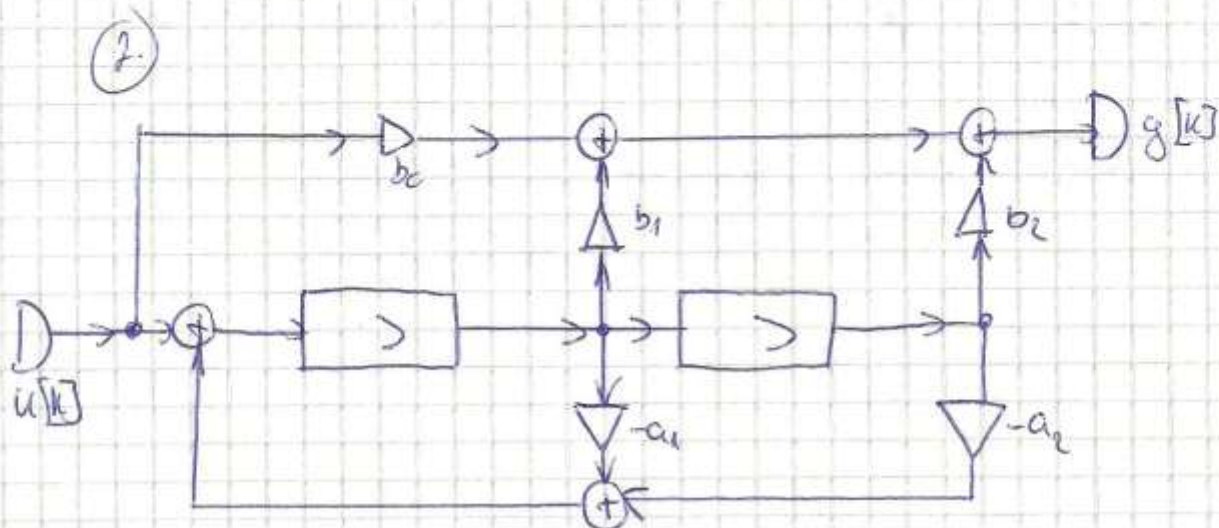
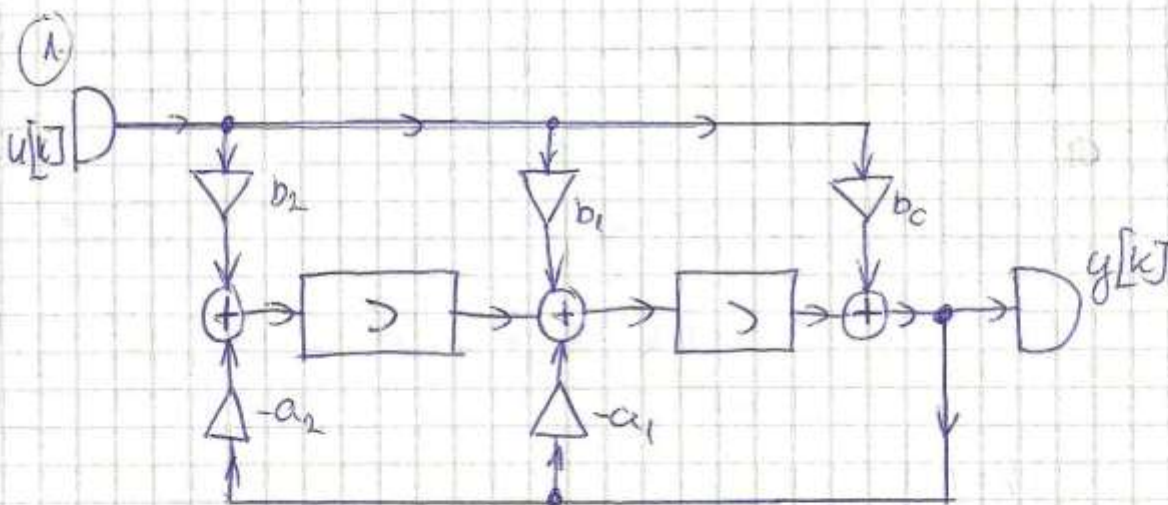
$$N = \max(n, m)$$

direkt ~~reális~~ realizációk

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] =$$

$$b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]$$

$$N=2$$



$$\begin{array}{l}
 N \text{ db. kösletetel} \\
 (2N+1) \text{ db. szorzó} \\
 \hline
 \text{A'VL: } (N+1)^2 \text{ db. szorzó}
 \end{array}
 \quad (N+1)^2 \gg (2N+1)$$

4) A rendszer egyenlet megoldása

$$\begin{aligned}
 y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] &= \\
 &= b_0 u[k] + \dots + b_m u[k-m]
 \end{aligned}$$

$$y[k] = ? \quad k \geq 0$$

$$\text{adott: } u[k] \quad k \geq -m$$

Képlet feltételek:

$$y[-n], y[-n+1], \dots, y[-1] \} n \text{ db. érték adott}$$

a) induktív behelyettesítés (lépésről-lépésre)

$$\begin{aligned}
 \boxed{k=0}: & \quad y[0] = -a_1 y[-1] - a_2 y[-2] - \dots - a_n y[-n] + \\
 & \quad \xrightarrow{\text{kezelt érték}} \quad \xrightarrow{\text{ismert}} \quad (+b_0 u[0] + b_1 u[-1] + \dots + b_m u[-m])
 \end{aligned}$$

$$\boxed{k=1}$$

$$y[1] = -a_1 y[0] - \dots - a_n y[-n+1] + b_0 u[1] + \dots + b_m u[-m+1]$$

Speciális eset: behelyettesítés $u[-1] = u[-2] = \dots = 0$

+ kauzális: $y[-1] = y[-2] = \dots = 0$

b) össztevőkre bontás módszere

$$y[k] = y_f[k] + y_g[k]$$

szabad gerjesztett
össztevő összetevő

a) szabad összetevő: homogén egyenlet
alt. megoldása

$$y_f[k] + a_1 y_f[k-1] + \dots + a_n y_f[k-n] = 0$$

a megoldás alakja: $K \lambda^k$

behelyettesítve:

$$K \lambda^k + a_1 K \lambda^{k-1} + \dots + a_n K \lambda^{k-n} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\lambda^k} \cdot \lambda^{n-k}$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \rightarrow \text{karakterisztikus egyenlet}$$

megoldások: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a rendszeregyenlet sajátértékei

$$y_f[k] = \sum_{i=1}^n K_i \lambda_i^k$$

egyszeres sajátértékek esetén!

(Többszörös sajátérték:
 λ_p : kétszeres s.e. $+ K_p \lambda_p^k + K_{p+1} \lambda_p^k$)

b) gerjesztett összetevő

ha „egyszerű” $u[k] \rightarrow$ próbafu. módszer

$u[k]$	u_0	$u_0 a^k$	$u_0 \lambda_p^k$	$u_0^A \cos(\omega k) + u_0^B \sin(\omega k)$	[ahol ω : DI körfrekvencia]
$y_g[k]$	Y_0	$Y_0 a^k$ ($a \neq \lambda_i$)	$Y_0 \lambda_p^k + Y_k \lambda_p^k$	$Y_0^A \cos(\omega k) + Y_0^B \sin(\omega k)$	

→ behelyettesítés az inhomogén egyenletbe

γ) a kezdeti feltételnek érvényesítése:

$y[-1], y[-2], \dots, y[-n] \rightarrow$ adott!

$$y[k] = y_g[k] + \sum_{i=1}^n K_i \lambda_i^k \quad k = -1, -2, \dots, -n$$

n egyenlet $\rightarrow n$ db K_i meghatározható.

δ) Példa: $y[k] - 1,3y[k-1] + 0,4y[k-2] = u[k] + u[k-1]$

$n=2$
 $m=1$

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot 0,4^k$, kauzális rsz

$$\bullet y_f[k] = K_1 \lambda_1^k + K_2 \lambda_2^k, \quad \lambda^2 - 1,3\lambda + 0,4 = 0$$

$\lambda_1 = 0,8 \quad \lambda_2 = 0,5$

$$\bullet y_g[k] = A \cdot 0,4^k$$

behelyettesítés: $A \cdot 0,4^k - 1,3A \cdot 0,4^{k-1} + 0,4A \cdot 0,4^{k-2} =$

$$= 0,4^k + 0,4^{k-1}$$

($k \geq 1$ ütemtől)

$$A(0,4^2 - 1,3 \cdot 0,4 + 0,4) = 0,4^2 + 0,4$$

$$A = 14 \rightarrow y_g[k] = 14 \cdot 0,4^k$$

• Kezdeti felt:

egyenlet a $k=1$ ütemtől érvényes

$\rightarrow y[k] : k = -1$ -től értelmezett

$\rightarrow 2$ kiindulási érték!

kauz. $\rightarrow y[-1], y[0] \rightarrow$ közvetlen behelyettesítés

$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = +1,3y[-1] - 0,4y[-2] + u[0] + u[-1]$$

$$\begin{array}{lcl}
 y[-1] & , & y[0] \\
 \downarrow \text{Kauz.} & & \downarrow \text{fok. beh.} \\
 y[-1] = 0 & & y[0] = +1,3 \cancel{y[-1]} - 0,4 \cancel{y[-2]} + \underbrace{u[0]}_{\substack{\text{Kauzalitás} \\ 1}} + \underbrace{u[-1]}_1 = 1
 \end{array}$$

$$y[k] = K_1 \cdot 0,8^k + K_2 \cdot 0,5^k + 14 \cdot 0,4^k$$

$$y[0] = K_1 + K_2 + 14 = 1$$

$$y[-1] = K_1 \cdot 0,8^{-1} + K_2 \cdot 0,5^{-1} + 14 \cdot 0,4^{-1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = 12 \\ K_2 = -25 \end{array} \right\}$$

$$y[k] = \delta[k] \cdot 1 + \underbrace{e[k-1]}_{k=1\text{-től igaz}} (12 \cdot 0,8^k - 25 \cdot 0,5^k + 14 \cdot 0,4^k)$$

c) Az impulzusválasz számítása

$$u[k] = \delta[k] \rightarrow y[k] = h[k]$$

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + \dots + b_m u[k-m]$$

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] \stackrel{\Delta}{=} u[k] \rightarrow h_0[k]$$

$\delta[k]$ segéd imp. válasz

a linearitás és invariancia miatt:

$$h[k] = b_0 \cdot h_0[k] + b_1 h_0[k-1] + \dots + b_m h_0[k-m]$$

$$h_0[k] = \sum_{i=1}^n K_i \cdot \lambda_i^k$$

(gerj. öt: zérus, mert

$$\delta[k] = 0 \quad k \geq 1)$$

$h_0[k]$ „értelmes”, $k \geq 1$ (innenlül lesz a jobb oldal 0)

$h_0[k]$ létezik : $k=0, -1, -2, \dots, -(n-1)$

A kauzalitás miatt :

$$h_0[-1] = h_0[-2] = \dots = h_0[-(n-1)] = 0$$

$$h_0[0] = \underbrace{-a_1 h_0[-1] - \dots - a_n h_0[-n]}_{\substack{0 \\ \text{(kauzalitás miatt)}}} + \underbrace{d[0]}_1$$

$$h_0[k] = \sum_{i=1}^n K_i \lambda_i^k : k=0, -1, -2, \dots, -(n-1)$$

h/c Peldän:

$$\textcircled{1} \quad y[k] - 0,5y[k-1] + 0,06y[k-2] = 2u[k] - 5u[k-2]$$

$$= u[k] \rightarrow h_0[k]$$

$$\lambda^2 - 0,5\lambda + 0,06 = 0$$

$$\lambda_1 = 0,2 \quad \lambda_2 = 0,3$$

$$h_0[k] = K_1 \cdot 0,2^k + K_2 \cdot 0,3^k$$

$$\left. \begin{array}{l} h_0[-1] = 0 = K_1 \cdot 0,2^{-1} + K_2 \cdot 0,3^{-1} \\ h_0[0] = 1 = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K_1 = -2 \\ K_2 = 3 \end{array}$$

$$h_0[k] = \mathcal{E}[k] \cdot (-2 \cdot 0,2^k + 3 \cdot 0,3^k)$$

$$h[k] = 2h_0[k] - 5h_0[k-2] \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} 2\delta[k] + 1\delta[k-1] + \mathcal{E}[k-2] (9,84 \cdot 0,2^{k-2} - 14,46 \cdot 0,3^{k-2})$$

$$\textcircled{2} \quad y[k] - y[k-1] + 0,29y[k-2] = u[k]$$

$$\lambda^2 - \lambda + 0,29 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0,5 \pm j \cdot 0,2 = 0,54 \cdot e^{\pm j \cdot 0,38}$$

$$h[k] = K \cdot \lambda_1^k + K^* (\lambda_1^*)^k$$

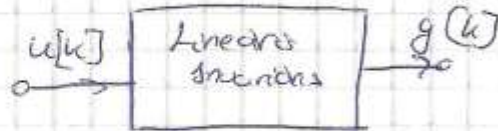
$$\left. \begin{array}{l} h[-1] = 0 = \frac{K}{\lambda_1} + \frac{K^*}{\lambda_1^*} \\ h[0] = 1 = K + K^* \end{array} \right\} K = 1,35 \cdot e^{+j \cdot 1,19}$$

$$h[k] = \mathcal{E}[k] \left(1,35 \cdot 0,54^k \left(e^{j(0,38k-1,19)} + e^{-j(0,38k-1,19)} \right) \right) \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} 2,7 \cdot 0,54^k \cdot \cos(0,38k - 1,19) \cdot \mathcal{E}[k]$$

5.) Az impulzv6lasz 6s alkalmaz6sai

a) fogalma

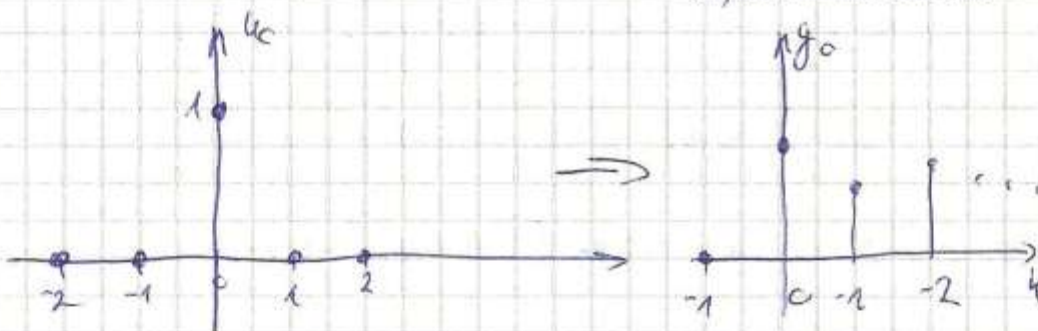


$u_0[k]$ vizsg6ld6j6s $\rightarrow$ $y_0[k]$ ismert



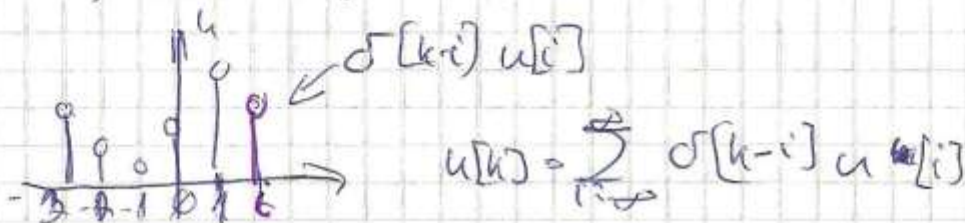
$u[k]$ t6sz6r6leges j6s $\rightarrow$ $y[k]$ sz6m6lth6t6 j6s

Speci: $u_0[k] = \delta[k] \rightarrow y_0[k] = h[k]$
impulzv6lasz



- $h[k]$ rendszerjellemz6 f6v.
- kauz6lis a rendszer $\Leftrightarrow h[k]$ bel6p6
- k6l6nleges rendszer: $h[k] = 0, k \geq K \neq \emptyset$
v6ges imp.v6lasz r6sz. (FIR)
 $\Downarrow$
v6gtelen imp.v6lasz r6sz. (IIR)

b) konvol6ci6



$$u[k] = \delta[k] \rightarrow y[k] = h[k]$$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i] u[i]$$

DI

Konvolúció

jelölés: $y[k] = h[k] * u[k]$

Kommutatív $y[k] = u[k] * h[k]$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] u[k-i]$$

Beleépő gerj. és kavitás sz.

$$u[k] \equiv 0, k < 0 \quad h[k] \equiv 0, k < 0$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^k h[k-i] u[i]$$

$$y[0] = h[0] u[0]$$

$$y[1] = h[1] u[0] + h[0] u[1]$$

⋮

Rem recursion

$$h[k] = E[k] \cdot C \lambda^k$$

Pr.

(4.) $u[k] = E[k] u a^k$

$$y[k] = \sum_{i=0}^k E[k-i] C \lambda^{k-i} E[i] u a^i = E[k] \cdot \sum_{i=0}^k C u \lambda^i \left(\frac{a}{\lambda}\right)^i =$$

$$= C u E[k] \cdot \lambda^k \frac{1 - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{k+1}}{1 - \frac{a}{\lambda}} = E[k] C u \frac{1}{1 - \frac{a}{\lambda}} \underbrace{\left(\lambda^k - \frac{1}{\lambda} a^{k+1}\right)}_{y[k]}$$

(2) $u[k] = \varepsilon[k]$ $h[k]$ adott
(beépítő)

$$y[k] = \sum_{i=0}^k u[k-i] h[i] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k h[i] = g[k]$$

ugrascálász

(3) $u[k] = U$, $h[k] = \varepsilon[k] \cdot C \cdot \lambda^k$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon[i] \cdot C \cdot \lambda^i \cdot U = C \cdot U \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C U \frac{1}{1-\lambda} & , \text{ ha } |\lambda| < 1 \\ \infty & , \text{ ha } |\lambda| > 1 \end{cases}$$

c) Gerjesztés-válasz stabilitás

Def: GV stab. rsz. $\Leftrightarrow$ bármely korlátos $u[k]$ -ra korlátos $y[k]$ -t ad

Felt:

$$|y[k]| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} h[i] u[k-i] \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |h[i]| \cdot |u[k-i]| \leq M \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |h[i]|$$

$\underbrace{|u[k-i]| \leq M}_{\infty < M < \infty}$

$$\leq M \sum_{i=0}^{\infty} |h[i]| \Rightarrow h[k] \text{ abszolút összeg-}$$

hetősége elégséges a
GV stabilitáshoz

$$GV \text{ stab} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |h[i]| < \infty$$

$$\left(h[k] \rightarrow 0 \right. \\ \left. (k \rightarrow \infty) \right)$$

exponenciális tagok miatt

(nem csak elégséges
de szükséges is)

Kapcsolat az aszimptotikus stabilitással

$$A\text{-stab} \Rightarrow GV\text{-stab}$$

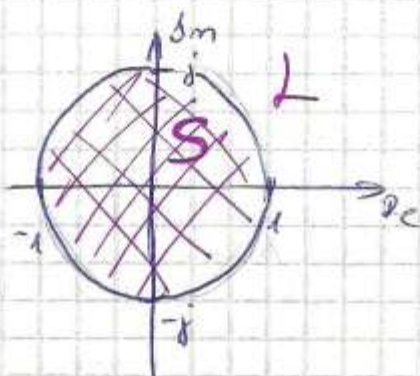


Az általunk vizsgált rendszereknel:

$$h[k] = e[k] \sum_{p=1}^N k_p \lambda_p^k$$

λ_p : a rendszer egyenlet saját értékei

részen A saját értékei



$$\forall |\lambda_p| < 1 \Leftrightarrow GV\text{-stab}$$

III. Periodikus állapot

1) Sinuszos jelen leírása

a) valós időfüggvény

$$x[k] = X \cdot \cos(\omega k + \varphi)$$

X : amplitúdó ($X > 0$)

ω : általános diszkrét körfrekvencia ($0 \leq \omega < 2\pi$)

φ : kezdőfázis ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$)

Mikor periodikus $x[k]$?

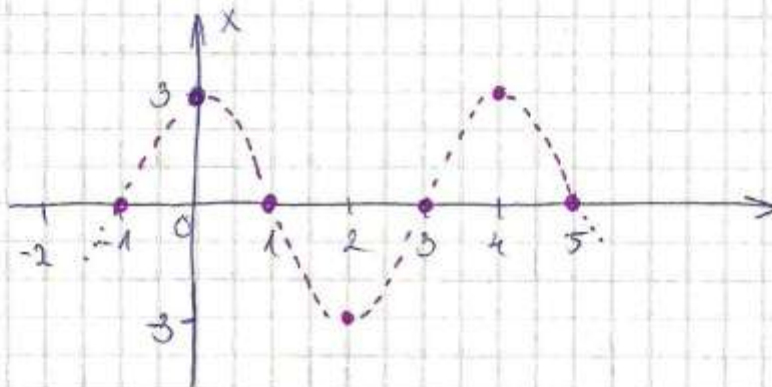
$$\omega(k+L) + \varphi = \omega k + \varphi + 2\pi M \quad L, M \in \mathbb{N}^+$$

$$\omega L = 2\pi M \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{M}{L} \Rightarrow \text{periodikus}$$

$(M, L) = 1 \rightarrow$ relatív prímek $\Rightarrow L$ periódus idő

pl: $x[k] = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right)$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \rightarrow L$$



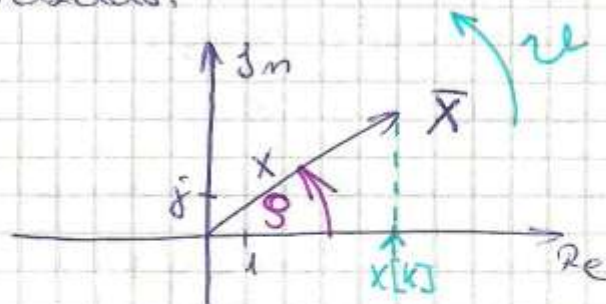
b) Komplex amplitúdó = fázor

$$x[k] = X \cdot \cos(\omega k + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{X e^{j(\omega k + \varphi)}}_{\text{komplex időfüggvény}} \right\} \quad \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{X e^{j\varphi}}_{\bar{X}} e^{j\omega k} \right\} \quad (\bar{X} = X \cdot e^{j\varphi})$$

$\bar{X}$ fázor (komplex amplitúdó)

ábrázolás:



c) műveleti szinuszos jelekre

$$y[k] = k u[k] \rightarrow \bar{Y} = k \bar{u}$$

$$y[k] = u_1[k] + u_2[k] \rightarrow \bar{Y} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$$

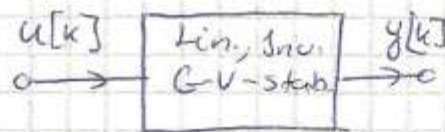
$$y[k] = u[k-1] \rightarrow \bar{Y} = \bar{u} \cdot e^{-j\omega}$$

$$u[k] = \operatorname{Re} \{ \bar{u} \cdot e^{j\omega k} \}$$

$$u[k-1] = \operatorname{Re} \{ \bar{u} e^{j\omega(k-1)} \} = \operatorname{Re} \{ \underbrace{\bar{u} e^{-j\omega}}_{\bar{Y}} \cdot e^{j\omega k} \}$$

2. Átviteli együttható
átviteli karakterisztika

a) fogalmak



$$u[k] = U \cdot \cos(\omega k + \varphi_u) \Leftrightarrow \bar{u} = U \cdot e^{j\varphi_u}$$

$$y[k] = Y \cdot \cos(\omega k + \varphi_y) \Leftrightarrow \bar{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_y}$$

rögzített ω -n.

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{u}} = \left(\frac{Y}{U} \right) \cdot e^{j(\varphi_y - \varphi_u)} \quad \text{átviteli} \\ \text{tényező}$$

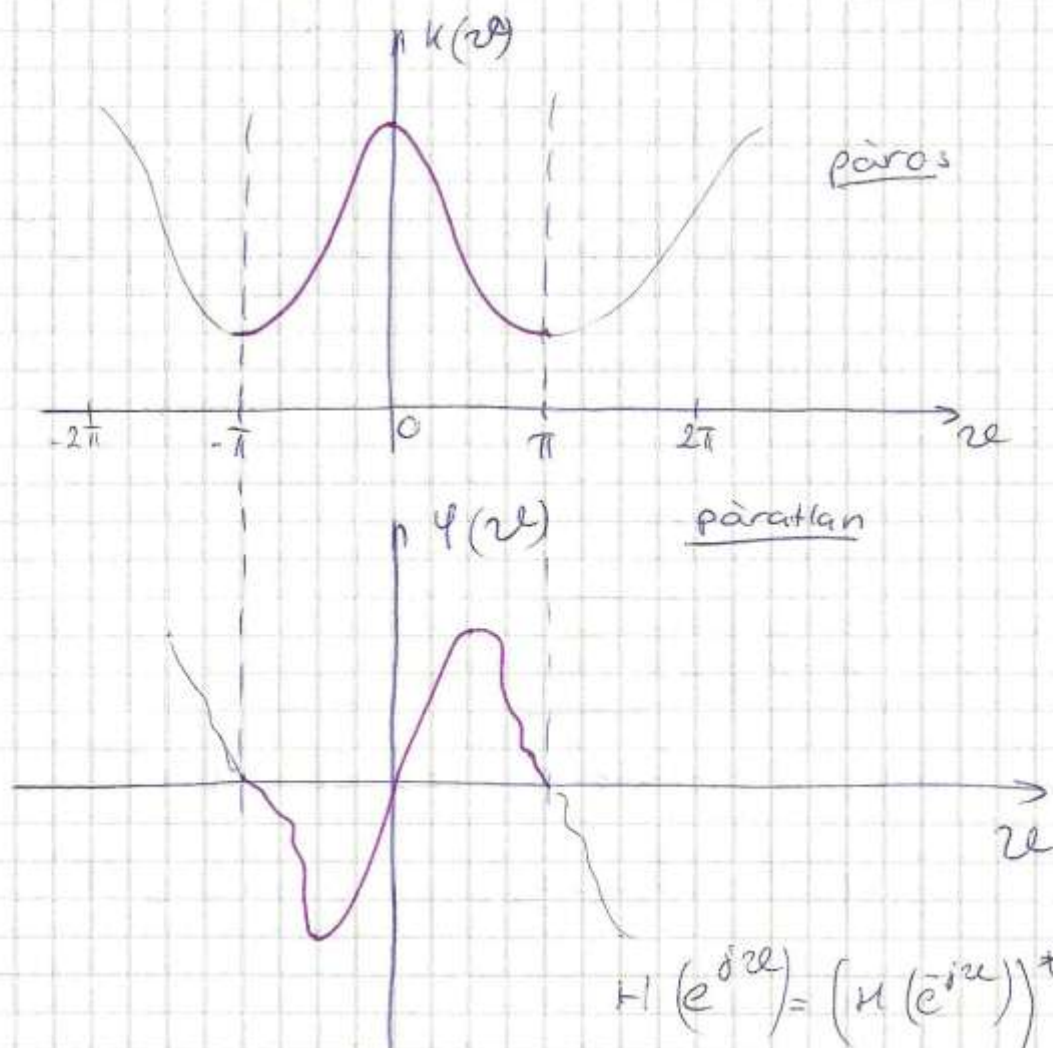
ha $\bar{H}$ -t ω függvényként tekintjük:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\bar{Y}_{\omega}}{\bar{u}_{\omega}} \quad \text{átviteli karakterisztika}$$

$$K(\omega) = |H(e^{j\omega})| \rightarrow \text{amplitúdó karakterisztika}$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega}) \rightarrow \text{fázis karakterisztika}$$

$$H(e^{j\omega}) \text{ periódikus } 2\pi\text{-vel}$$



$$H(e^{j\omega}) = (H(e^{-j\omega}))^*$$

b) Az átviteli karakterisztika meghatározása

a) rendszeregyenletből

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]$$

stabilitásvizsgálat:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$\forall |\lambda_p| < 1$$

(elegendőes feltétel)

$$u[k] = \operatorname{Re} \{ \bar{u} e^{j\omega k} \} \quad y[k] = \operatorname{Re} \{ \bar{y} e^{j\omega k} \}$$

$$\bar{y} + a_1 \bar{y} e^{-j\omega} + a_2 \bar{y} e^{-j2\omega} + \dots + a_n \bar{y} e^{-jn\omega} =$$

$$= b_0 \bar{u} + b_1 \bar{u} e^{-j\omega} + \dots + b_m \bar{u} e^{-jm\omega}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_m e^{-jm\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_n e^{-jn\omega}}$$

Spec. eset FIR típusú rendszer:

$$y[k] = b_0 u[k] + \dots + b_m u[k-m]$$

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_m e^{-jm\omega}$$

b) állapotátviteli leírásból

$$\underline{x}[k+1] = \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k]$$

$$y[k] = \underline{C}^T \underline{x}[k] + D u[k]$$

$$u[k] = \operatorname{Re} \{ \bar{u} e^{j\omega k} \}, \quad y[k] = \operatorname{Re} \{ \bar{y} e^{j\omega k} \}$$

$$\underline{x}[k] = \operatorname{Re} \{ \underline{\bar{x}} e^{j\omega k} \}, \quad \underline{x}[k+1] = \operatorname{Re} \{ \underline{\bar{x}} e^{j\omega} e^{j\omega k} \}$$

Stabilitás vizsgálata:

$\underline{A}$ sajátértékei: $|\lambda_p| < 1 \quad p=1,2,\dots,n$

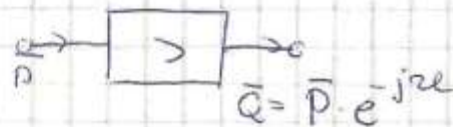
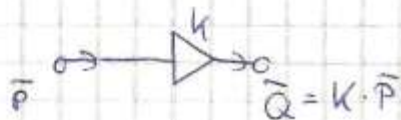
$$\left. \begin{aligned} \underline{\bar{x}} e^{j\omega} &= \underline{A} \underline{\bar{x}} + \underline{B} \bar{u} \\ \bar{y} &= \underline{C}^T \underline{\bar{x}} + D \bar{u} \end{aligned} \right\}$$

$$(e^{j\omega} \underline{I} - \underline{A}) \underline{\bar{x}} = \underline{B} \bar{u} \rightarrow \underline{\bar{x}} = (e^{j\omega} \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \bar{u}$$

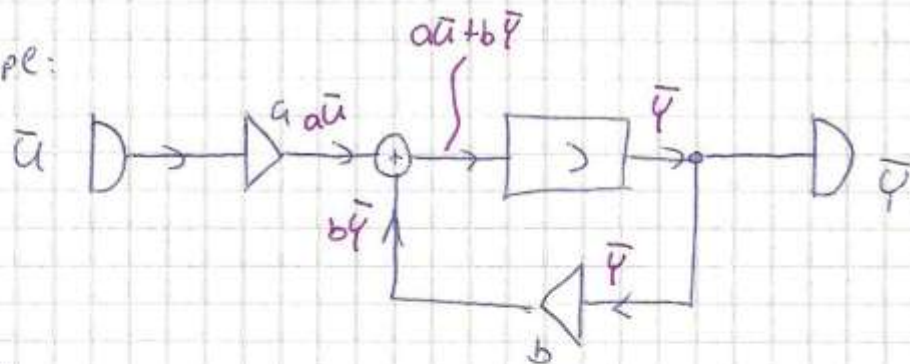
$$\bar{y} = \underbrace{\left[\underline{c}^T \left(e^{j\omega} \underline{I} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{B} + \underline{D} \right]}_{H(e^{j\omega})} \cdot \underline{u}$$

7) hálózattól

stabilitás vizsgálat



pl:



$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = H(e^{j\omega}), \quad (a\bar{u} + b\bar{y}) e^{-j\omega} = \bar{y}$$

$$a\bar{u} e^{-j\omega} = \bar{y} (1 - b e^{-j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a e^{-j\omega}}{1 - b e^{-j\omega}} \quad \left(\begin{array}{l} g[k] - b g[k-1] = \dots \\ \lambda - b = 0 \end{array} \right)$$

látjuk, ha $|b| < 1$

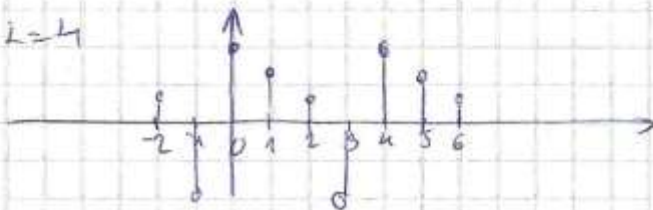
3. Periodikus jel Fourier-sora és alkalmazása

a) D1 Fourier-sor

$x[k]$ periodikus, L periódusideje!

$$x[k] \equiv x[k+L] \quad \forall k\text{-ra}$$

pl: $L=4$



$$X[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^c e^{j p \Theta k} \quad \Theta$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{L}$$

alap frekvencia

$$\left(\sum_{p=\langle L \rangle}^* X_p^c e^{j p \Theta k} \right)$$

L db egymás
utáni számAz FI esetben szemben ez pontos
eredményt ad.

$$X_p^c = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-j p \Theta k} \quad \left(= \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] \cdot e^{-j p \Theta k} \right)$$

Kapcsolat X_p^c egymáshoz közeli:

$$X_p^c = \left(X_{L-p}^c \right)^* \quad \left(\text{ha } L \text{ páros, } X_{\frac{L}{2}}^c \text{ valós} \right)$$

Valós alakú sorozat

ha L páros:

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{L-1} X_p^c e^{j p \Theta k} = X_0 + \sum_{q=1}^{\frac{L}{2}-1} \boxed{X_q^c} e^{j q \Theta k} \quad (+)$$

konjugált

$$+ \boxed{X_{L-q}^c} e^{j (L-q) \Theta k} + X_{\frac{L}{2}}^c e^{j \frac{L}{2} \Theta k} \quad (-)$$

konjugált

$$= X_0 + 2 \sum_{q=1}^{\frac{L}{2}-1} |X_q^c| \cos(q \Theta k + \arg X_q^c) + X_{\frac{L}{2}}^c \cdot \cos(b \pi)$$

Megj:

$$e^{j (L-p) \Theta k} = \underbrace{e^{j L \Theta k}}_{e^{j 2 \pi k}} \cdot e^{-j p \Theta k}$$

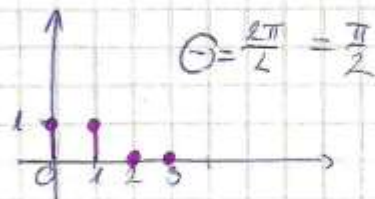
Valós alakra sorok

$$L \text{ páros} : x[k] = \underbrace{X_0^c}_{\text{valós}} + \sum_{q=1}^{\frac{L-2}{2}} 2 |X_q^c| \cos(q \cdot \Theta k + \arg X_q^c) + \underbrace{X_{\frac{L}{2}}^c}_{\text{valós}} \cos(\Theta k)$$

$$L \text{ páratlan} : x[k] = X_0^c + \sum_{q=1}^{\frac{L-1}{2}} 2 |X_q^c| \cos(q \cdot \Theta k + \arg X_q^c) +$$

b) Példák

① $L=4$ az első periódusa



$$\Theta = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{2}$$

$$X_0^c = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] \underbrace{e^{-j0 \cdot \Theta k}}_1 = \frac{1}{4} \cdot (1+1+0+0) = \frac{1}{2}$$

$$X_1^c = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-j1 \cdot \Theta k} = \frac{1}{4} (1+1 \cdot \underbrace{e^{-j1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}}_{-j} + 0+0) = \frac{1}{4} (1-j)$$

$$X_2^c = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x[k] e^{-j2 \cdot \Theta k} = \frac{1}{4} (1+1 \cdot \underbrace{e^{-j2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}}_{-1} + 0+0) = 0$$

$$X_3^c = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x[k] e^{-j3 \cdot \Theta k} = \frac{1}{4} (1+1 \cdot \underbrace{e^{-j3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}}_{j} + 0+0) = \frac{1}{4} (1+j) = (X_1^c)^*$$

$$x[k] = \sum_{p=0}^3 X_p^c e^{j p \Theta k} = \frac{1}{2} + X_1^c e^{j \Theta k} + 0 + (X_1^c)^* e^{j 3 \Theta k} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} k - \frac{\pi}{4}\right)$$

(2) $L=3$, $x[0]=2$, $x[1]=1$, $x[2]=0$, $\Theta = \frac{2\pi}{3}$

$$X_0^c = \frac{1}{3} (2+1+0) = 1$$

$$X_1^c = \frac{1}{3} (2+1 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}}) = 0,577 \cdot e^{-j \cdot 0,52}$$

$$X_2^c = (X_1^c)^* = 0,577 \cdot e^{j \cdot 0,52}$$

c) a válasz számítása



$u[k]$ periodikus L -vel

$y[k]$ periodikus L -vel

$$u[k] = \sum_{p=0}^{L-1} U_p^c e^{j p \Theta k}, \quad \Theta = \frac{2\pi}{L}$$

szuperpozíció:

$$y[k] = \sum_{p=0}^{L-1} \underbrace{H(e^{j p \Theta})}_{\substack{U_p^c \\ k=p\Theta}} \cdot U_p^c \cdot e^{j p \Theta k}$$

táblázatos módszer
a kiszámításra
→ lásd Fd-nél
ugyan így

Példa (előző) 1-es példa $L=4$ periodikus jele
 $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $H(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 - 4e^{-j\omega}}$

$$p\Theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$H(e^{j0}) = \frac{2-1}{1-4} = -\frac{1}{3}, \quad H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{2+j}{1-4j}$$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{2+1}{1+4} = \frac{3}{5}, \quad H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{2-j}{1+4j}$$

komplex
konjugált
párak

IV. Vizsgálat a frekvencia tartományban

(1) A DT Fourier-transzformáció

a) def., tulajdonság

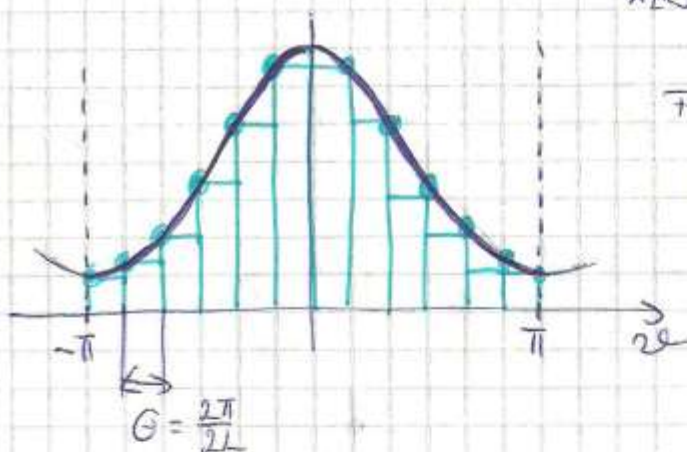
$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{X}_{\text{spektrum}} e^{j\omega k} e^{-j\omega k} d\omega$$

Fourier-integrál

Inverz Fourier-transzformáció:

$$x[k] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

Szemléletes jelentés:



$$x[k] \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-L}^{L-1} X(e^{j\omega_p}) e^{j\omega_p k} \frac{\pi}{L}$$

Fourier sor, amely L periódushosszú jelet állít elő

$X(e^{j\omega})$ származása: ha $x[k]$ abszolút összegezhető

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k}}$$

Fourier-transzformáció

jelölés: $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[k]\}$

Tulajdonságok: ha $x[k]$ valós $\Rightarrow |X(e^{j\omega})|$ amplitúdó-spektrum páros

ha $x[k]$ valós, és:

• páros: $X(e^{j\omega})$ valós

• páratlan: $X(e^{j\omega})$ képzetes

$\arg X(e^{j\omega})$ fázis-spektrum páratlan

$$X(e^{j\omega}) = (X(e^{-j\omega}))^*$$

b) példák, egyszerű jelek spektruma

$$a) \mathcal{F}\{\delta[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \cdot e^{-j2\pi k} = 1$$

$$\mathcal{F}\{\delta[k-K]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-K] e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi K}$$

b) négyszög impulzus

$$x[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-K]$$

$$\mathcal{F}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{K-1} e^{-j2\pi k} = \frac{1 - (e^{-j2\pi})^K}{1 - e^{-j2\pi}} = \frac{1 - \cos(K2\pi) + j\sin(K2\pi)}{1 - \cos 2\pi + j\sin 2\pi}$$

c) exponenciális jelek

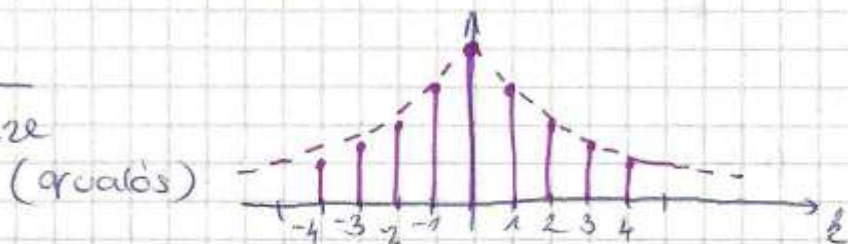
$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] \cdot q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot e^{-j2\pi k} = \sum_{k=0}^{\infty} (q e^{-j2\pi})^k = \frac{1}{1 - q e^{-j2\pi}}$$

csak ha $|q| < 1$

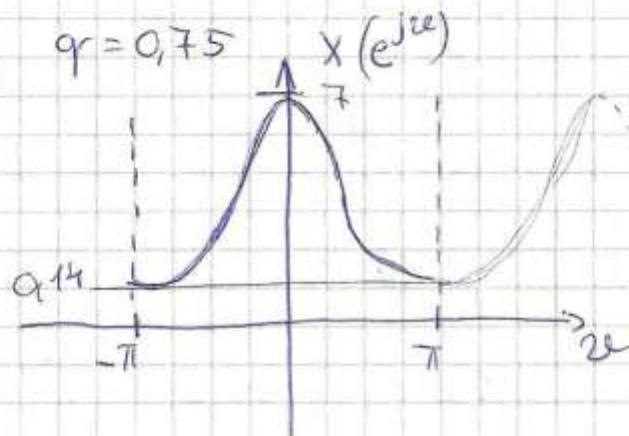
$$\mathcal{F}\{q^{|k|}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{|k|} \cdot e^{-j2\pi k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} q^{-k} \cdot e^{-j2\pi k} + \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot e^{-j2\pi k} =$$

$$= \frac{1 - q^2}{1 + q^2 + 2q \cos 2\pi}$$

$$(q \text{ valós})$$



pl. $q = 0,75$



c) a transzformáció tételai:

α) lineáris : $\mathcal{T}\{c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k]\} = c_1 \mathcal{T}\{x_1[k]\} + c_2 \mathcal{T}\{x_2[k]\}$

β) eltolási tétel

$$X(e^{j2\pi}) = \mathcal{T}\{x[k]\} \Rightarrow X(e^{j2\pi}) e^{-j2\pi k} = \mathcal{T}\{x[k-k]\}$$

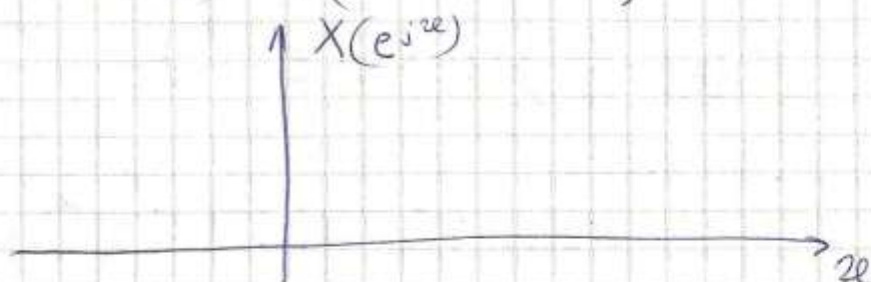
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-k] \cdot e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k-k]}_m \cdot e^{-j2\pi (k-k)}_m$$

γ) moduláció tétel

$$\mathcal{T}\{x[k] e^{j2\pi k}\} = X(e^{j(2\pi - 2\pi)})$$

pl: vívíjel: $\cos(2\pi k) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi k} + e^{-j2\pi k})$

páros és
számként



$[-\Theta < 2\pi_0 < \pi - \Theta]$ - feltétel, hogy ne legyen
szűrő ω_0 frekvencia ω_0 átlagolás

δ) Parseval-tétel

def: $E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$ x energiája

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|X(e^{j2\pi})|}_{\text{a jel energiaspektruma}}^2 d2\pi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j2\pi})|^2 d2\pi$$

ε) konzolúció tétel

$$h[k] * u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i] u[i]$$

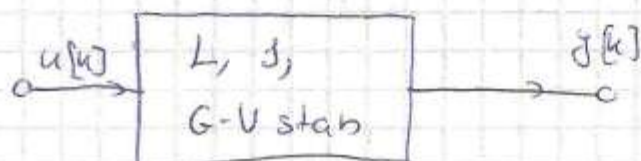
$$\mathcal{F}\{h[k] * u[k]\} = H(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

ha h és u abszolút összegezhető

$$\mathcal{F}\{h[k] * u[k]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j(\omega-\lambda)}) \cdot U(e^{j\lambda}) d\lambda$$

② Fourier-transzformáció alkalmazása

a) a válasz számítása



$H(e^{j\omega})$ adott

$u[k]$ nem periodikus, de abszolút összegezhető

$u[k]$ előállítható

$$u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega k} d\omega$$

az elemi választ

$$dy[k] = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega}) \cdot d\omega \cdot e^{j\omega k} \int d\omega$$

a teljes választ

$$y[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{H(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})}_{Y(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega k} d\omega$$

$$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega}) \cdot \mathcal{F}\{u[k]\}\}$$

Az átviteli karakterisztika általánosabb értelmezése:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\mathcal{F}\{y[k]\}}{\mathcal{F}\{u[k]\}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{U(e^{j\omega})}$$

b) Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz

$$u[k] = \delta[k] \rightarrow y[k] = h[k]$$

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1 \rightarrow \boxed{\mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\omega})}$$

V. Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

emlékeztető: $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k}$

hátrány: $x[k]$ abszolút összegezheto

1) A z-transzformáció komplex frekvencia

a) Def. $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$

A jelet belépőnek tekintik (hátrány lehet)
(előny lehet)

$x[k]$ abszolút összegezhetoisége nem feltétel

Jelölés: $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[k]\}$

inverz: $x[k] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$

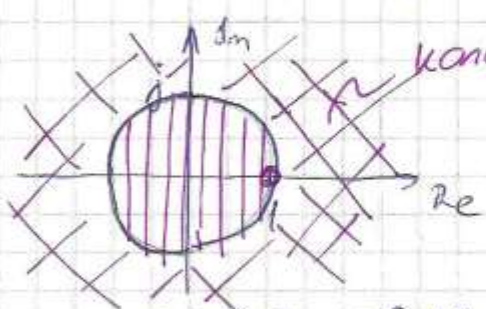
megállapítás szerint
 $x[k]$ belépő

b) Példán, egyszerű jelek

$$\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = 1$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[k-k_0]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-k_0] \cdot z^{-k} = z^{-k_0} \quad (k_0 > 0)$$

$$\mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{f[k]}_1 z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$



konvergens
(kívül)

$$\frac{1}{z^k} \text{ konv. ha } |z^{-k}| < 1 \Rightarrow |z^{-k}| > 1$$

1-ben nem értelmezett
belülre = kiterjesztve komplex fűtőn!

$$\mathcal{Z}\{f[k]q^k\} = \mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k z^{-k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{q}{z}} = \frac{z}{z-q}$$

konvergens : $\left|\frac{q}{z}\right| < 1$

$$\mathcal{Z}\{\cos \Theta k\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{j\Theta k} + e^{-j\Theta k}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\Theta}} + \frac{z}{z - e^{-j\Theta}} \right) \Leftrightarrow$$

$e^{j\Theta} \Rightarrow q, e^{-j\Theta} \Rightarrow q^*$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2 - z \cdot \cos \Theta}{z^2 - 2z \cdot \cos \Theta + 1}$$

c) A transzformáció tételai

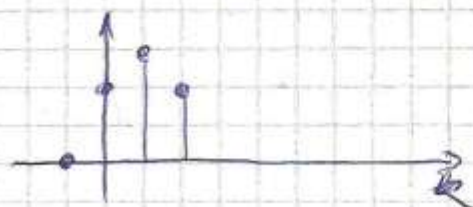
a) lineáris $\mathcal{Z}\{c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k]\} = c_1 \mathcal{Z}\{x_1[k]\} + c_2 \mathcal{Z}\{x_2[k]\}$

b) csillapítási tényező: $X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$

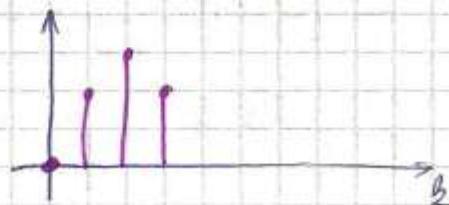
$$\mathcal{Z}\{q^k x[k]\} = X\left(\frac{z}{q}\right)$$

c) eltolási tétel:

- belépő jel késleltetése



→

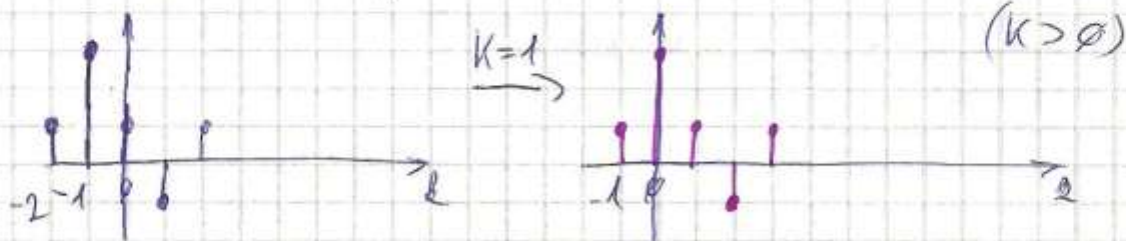


$$\mathbb{Z} \{ \varepsilon [k-k] \times [k-k] \} = z^{-k} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon [k-k] \times [k-k] z^{-\overbrace{(k-k+k)}^0} \in$$

$$\in z^{-k} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon [\overbrace{k-k}^u] \times [\overbrace{k-k}^u] \cdot z^{-\overbrace{(k-k)}^u}$$

- nem belépő jel kíséletése



$$\mathbb{Z} \{ x[k-k] \} = z^{-k} X(z) + \underbrace{x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + x[-k+2]z^{-2} + \dots + x[-1]z^{-(k-1)}}_{\text{belépő jelnél } \emptyset \text{ benne}}$$

- jel szétletése

$$\mathbb{Z} \{ x[k+1] \} = z X(z) - z x[0]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-(k+1-1)} = z \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-(k+1)} = \underbrace{X(z) - x[0]}_{X(z) - x[0]}$$

5) Kérdeti és végérték tétel

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad \left(X(z) = \underbrace{x[0]}_{\text{előtűnő}} + \underbrace{x[1]z^{-1} + \dots}_{\text{elűnő ha } z \rightarrow \infty} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z) \quad \text{és } X(z) \text{ minden szingularitása: } |z_i| < 1$$

6) Paraméter-tétel

$$X(z, \underbrace{q}_{\text{paraméter}}) = \mathbb{Z} \{ x[k, \underbrace{q}_{\text{paraméter}}] \} \quad / \cdot \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{\partial X(z, q)}{\partial q} = Z \left\{ \frac{\partial x[k, q]}{\partial q} \right\}$$

pl. $x[k, q] = \varepsilon[k] \cdot q^k \quad / \cdot \frac{\partial}{\partial q}$

$$\frac{z}{(z-q)^2} = Z \left\{ \varepsilon[k] \cdot k \cdot q^{k-1} \right\} \quad / \cdot \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{2z}{(z-q)^3} = Z \left\{ \varepsilon[k] \cdot k(k-1) q^{k-2} \right\}$$

parciális törtre bontással is
használt alakat kell kapni
előtte is ott az idő"

§) Konvolúció

$h[k]$ és $u[k]$ belépő,

$$Z \{ h[k] * u[k] \} = \underbrace{Z \{ h[k] \}}_{H(z)} \cdot \underbrace{Z \{ u[k] \}}_{U(z)}$$

d) A z és a Fourier-transzformáció
kapcsolata

$x[k]$ abszolút összegezhető és belépő.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega k}, \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

$$\boxed{X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})}$$

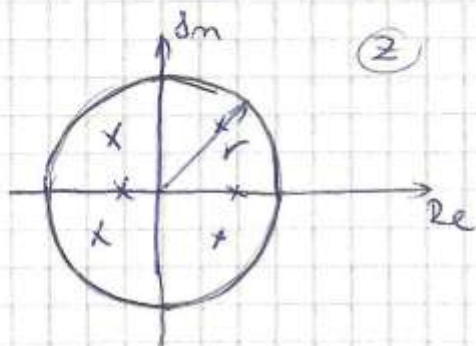
$z = e^{j\omega}$ körön z -nek van fizikai tartalma

... $\rightarrow$ inverziós integrál:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} X(z) z^{k-1} dz$$

$$X(z) = x[0] + x[1] \cdot z^{-1} + \dots + x[k] \cdot z^{-k} + \dots$$

$$\oint z^i dz = \begin{cases} 0 & i \neq -1 \\ 2\pi j & i = -1 \end{cases}$$



(2)

 $X(z)$ szingularitásai

(különböző) a körön belül vannak

2. Inverz z-transzformáció

 cél: $X(z) \rightarrow x[k]$ (a bejövő mátrix keresése)

jel: $x[k] = Z^{-1} \{ X(z) \}$

a) polinom osztással

 a gyakorlatban $X(z)$ racionális törtfüggvény

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \quad n \geq m$$

$$Z^{-1} \left\{ X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \right\}$$

$$x[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + c_2 \delta[k-2] + \dots$$

pl: $X(z) = \frac{z^2 + 5z + 1}{z^3 + 2z^2 + z + 2}$

$$\begin{aligned} (z^2 + 5z + 1) : (z^3 + 2z^2 + z + 2) &= z^{-1} + 3z^{-2} - 6z^{-3} + \dots \\ - \frac{z^2 + 2z + 1 + 2z^{-1}}{3z + 0 - 2z^{-1}} & \\ - \frac{3z + 6 + 3z^{-1} + 6z^{-2}}{-6z \dots} & \end{aligned}$$

 ha n k -val nagyobb mint m , akkor a jel k -adik ütemben lép be

$$x[k] = \delta[k-1] + 3\delta[k-2] - 6\delta[k-3] + \dots$$

b) részletfőre bontás

z^{-k} "szorzótényező" $\rightarrow$ Kitémmel való kösletelés

$$X(z) = \underbrace{C_0 + C_1 \cdot z^{-1} + \dots + C_{k-1} \cdot z^{-(k-1)}}_{\text{Kitémmel való kösletelés}} + z^{-k} \cdot F(z)$$

ahor, ha a nevezőből

z^k kiemelhető

$$F(z) = z \cdot \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) \quad \text{valódi törtfüggvény}$$

$$\textcircled{=} z \cdot \frac{\beta_1 \cdot z^{u-1} + \beta_2 \cdot z^{u-2} + \dots + \beta_u}{z^u + \alpha_1 \cdot z^{u-1} + \dots + \alpha_u}$$

2/b (feladat)

$X(z)$ normálalakja:

$$X(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + \dots + C_{r-1} z^{-(r-1)} + z^{-r} \overline{F}(z)$$

$$\overline{F}(z) = z \underbrace{\frac{M(z)}{N(z)}}_{\text{valódi tört}} = z \frac{\beta_1 z^{u-1} + \beta_2 z^{u-2} + \dots + \beta_u}{z^u + \alpha_1 z^{u-1} + \dots + \alpha_u}$$

Példa

$$X(z) = \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2} = z^{-2} \underbrace{\frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05}}_{\text{valódi tört}} \quad \textcircled{=}$$

Polinom osztás

$$(2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1) : (z^2 - 0,6z + 0,05) = 2z$$

$$- \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 0,1z}{ + 1,0z - 1,1}$$

nem valódi tört $\rightarrow$
polinom osztást kell
használni

$$\textcircled{=} z^{-2} \left(2z + \frac{1z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05} \right) = 2z^{-1} + z^{-3} \underbrace{\frac{z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05}}_{\frac{M(z)}{N(z)}} \cdot z$$

Az $\frac{M(z)}{N(z)}$ valódi tört részletfrakciókra bontása

-egyszeres pólusok:

$$\frac{M(z)}{N(z)} = \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2} + \dots + \frac{C_u}{z - p_u}$$

C_i együtthatók:

- "letakarásos módszer"
- együttható-összehasonlítás

$$C_i = \frac{M(q_i)}{(q_i - q_1)(q_i - q_2) \dots (q_i - q_u)}$$

ahol $(q_i - q_j)$ tényező mindig $\neq 0$ (mindet le kell választani!)

Példa

$$\frac{M(z)}{N(z)} = \frac{z - 1,1}{(z - 0,5)(z - 0,1)} = \frac{\frac{-0,6}{0,4} \cdot 1,5}{z - 0,5} + \frac{\frac{-0,1}{-0,4} \cdot 2,5}{z - 0,1}$$

- többszörös polusok

$$\frac{M(z)}{N(z)} = \frac{M(z)}{(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_v) \underbrace{(z - q_{v+1})^{u-v}}_{u-v\text{-szoros polus}}} \quad (\Leftarrow)$$

$$\Leftarrow \frac{C_1}{z - q_1} + \dots + \frac{C_v}{z - q_v} + \frac{C_{v+1}}{(z - q_{v+1})} + \frac{C_{v+2}}{(z - q_{v+1})^2} + \dots + \frac{C_u}{(z - q_{v+1})^{u-v}}$$

Példa

$$\frac{M(z)}{N(z)} = \frac{z^2 + 0,3z + 0,5}{(z^3 - z^2 + 0,28z - 0,0024)} \quad (\Leftarrow)$$

$$(z - 0,6)(z - 0,2)^2$$

$$\Leftarrow \frac{C_1}{z - 0,6} + \frac{C_2}{z - 0,2} + \frac{C_3}{(z - 0,2)^2}$$

$$z^2 + 0,3z + 0,5 = C_1(z - 0,2)^2 + C_2(z - 0,6)(z - 0,2) + C_3(z - 0,6)$$

$$C_1 = 6,5$$

$$C_2 = -5,5$$

$$C_3 = -1,5$$

Vissza transzformálni

$$X(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + \dots + C_{r-1} z^{-(r-1)} \quad (+ z^r)$$

$$\textcircled{+} \quad \bar{z}^r \left(\frac{zC_1}{z-q_{r1}} + \frac{zC_2}{z-q_{r2}} + \dots + \frac{zC_n}{z-q_{rn}} \right)$$

$$x[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + \dots + c_{r-1} \delta[k-(r-1)] \quad (4)$$

$$\textcircled{+} \in [b-r] \left(C_1 a_1^{b-r} + C_2 a_2^{b-r} + \dots + C_n a_n^{b-r} \right)$$

ha töbsteres pólus van:

$$\frac{2C}{(z-q)^2} \rightarrow E[k] \cdot C \cdot \frac{1}{q} \cdot 2 \cdot q^k$$

$$\frac{zc}{(z-q)^b} \rightarrow E[k] = c \cdot \frac{1}{2q^2} \cdot \frac{(k-r)(k-r-1)}{k(k-1)} \cdot q^k \rightarrow k-r$$

Pelak

$$(1) \quad X(z) = \frac{2z+1}{z^2+0.5z+0.06} = \frac{-4}{z+0.3} + \frac{+6}{z+0.2}$$

$$X(z) = z^{-1} \left(\frac{-4z}{z+0,3} + \frac{6z}{z+0,2} \right)$$

$$x[h] = g[h-1] \left(-4(-0,3)^{h-1} + 6(-0,2)^{h-1} \right)$$

$$(2) \quad X(z) = \frac{2z^2 + 2z + 2}{z^2 - 0.8z + 0.07} = 2 + \frac{3.6z + 1.86}{z^2 - 0.8z + 0.07} \quad (2)$$

hem valddi
tört

polinômio
ostios

$$(z - 0.7)(z - 0.1)$$

$$\Leftrightarrow 2 + z^{-1} \left(\frac{7.3}{z - 0.7} + \frac{-3.7}{z - 0.1} \right)$$

$$x[k] = 2.5[k] + \varepsilon[k-1] (7.3(0.7)^{k-1} - 3.7(0.1)^{k-1})$$

$$(3) \quad X(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.25)^2} = \frac{C_1}{z-0.5} + \frac{C_2}{z-0.25} + \frac{C_3}{(z-0.25)^2} \quad \ominus$$

$$\ominus \quad z^{-1} \left(\frac{16z}{z-0.5} - \frac{16z}{z-0.25} - \frac{4z}{(z-0.25)^2} \right)$$

$$x[k] = \varepsilon[k-1] \left(16 \cdot 0.5^{k-1} - 16 \cdot 0.25^{k-1} - \frac{4}{0.25} [k-1] 0.25^{k-1} \right)$$

$$x[0] = 0$$

$$x[1] = 16 - 16 - 0 = 0$$

$$x[2] = 8 - 4 - 16 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$x[3] \rightarrow$ A $k=3$ -ban lép be a jel.
(a nevező fokszáma 3-mal nagyobb, mint a számláló fokszáma)

Amennyivel nagyobb a nevező fokszáma (mint a számlálóé) annyi ütemmel van eltolva a jel.

(Annnyiadik ütemben lép be a jel)

$$(4) \quad X(z) = \frac{z}{(z-re^{j\alpha})(z-re^{-j\alpha})} = z \left(\frac{C}{z-re^{j\alpha}} + \frac{C^*}{z-re^{-j\alpha}} \right)$$

$$C = \frac{1}{re^{j\alpha} - re^{-j\alpha}} = \frac{1}{r2j\sin\alpha}$$

$$C^* = -\frac{1}{r2j\sin\alpha}$$

$$x[k] = \varepsilon[k] \frac{1}{r2j\sin\alpha} \left(r^k e^{jk\alpha} - r^k e^{-jk\alpha} \right) = \varepsilon[k] r^{k-1} \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sin(k\alpha)$$

$$\text{ha } |r| < 1$$

$$x[k] \rightarrow 0$$

$$|r| > 1$$

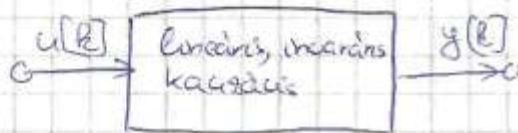
$$x[k] \rightarrow \infty$$

$$|r| = 1$$

$$x[k] \text{ korlátos}$$

3. A z-transzformáció alkalmazása

a) Átviteli függvény fogalma



beépít $u[k] \rightarrow y[k]$ beépít

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u[k]\}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[k]\}$$

(karakterisztikus, ha beépít gerjesztésre beépít választ ad)

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y[k]\}}{\mathcal{Z}\{u[k]\}}$$

$\forall$ beépít $u[k]$ -ra

↑
átviteli függvény (rendszerjellemző függvény)

A gyakorlatban $H(z)$ racionális törtfüggvény:

normálalak:

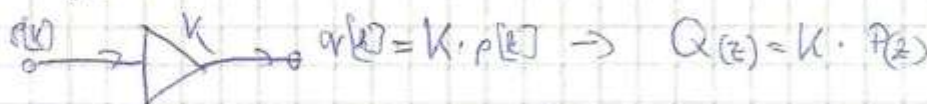
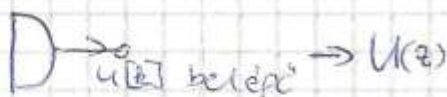
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \underbrace{H(z)}_{\text{rendszerjellemző fv.}} \cdot \mathcal{Z}\{u[k]\} \right\}$$

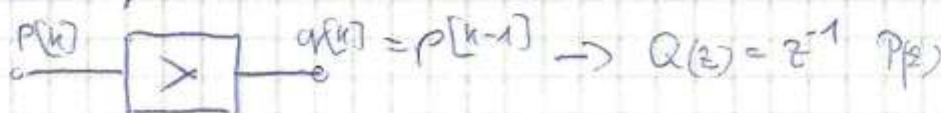
(a pozitív kitevő alatt is használható)

b) $H(z)$ meghatározása

a) Hálózattól



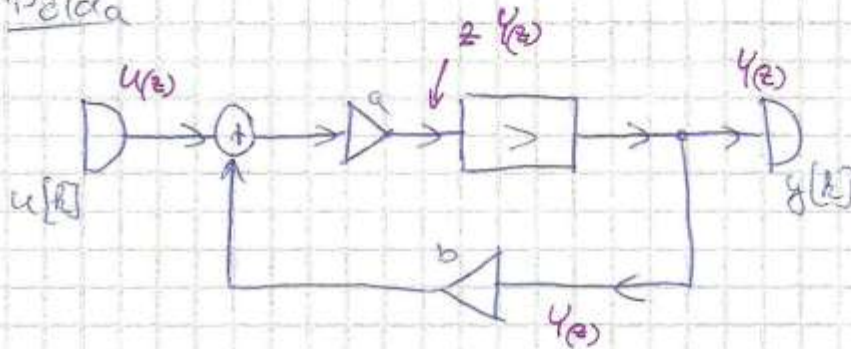
$$Q(z) = K \cdot P(z)$$



$$Q(z) = z^{-1} P(z)$$

Az összekapcsolási kényszeren értelmezhető
átviteli z -be

Példa



$$a (u(z) + b y(z)) = z y(z)$$

$$a u(z) = y(z) (z - ab)$$

$$\boxed{H_z = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{a}{z - ab} = \frac{a z^{-1}}{1 - ab z^{-1}}}$$

normál alak

(3/b az állapotból $u(k)$)

B) $H(z)$ kifejezése állapotváltozás kifejezésből

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T \underline{x}[k] + D u[k] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T \underline{x}[k] + D u[k] \end{aligned}} \right\} \mathcal{Z}\{\}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

(Kausalitás)
B, belépő $u[k]$

$$\underline{X}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{x}[k]\}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[k]\}$$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u[k]\}$$

$$\begin{aligned} \underline{X}(z) \cdot z - \underline{x}[0]z &= \underline{A} \underline{X}(z) + \underline{B} U(z) \\ Y(z) &= \underline{C}^T \underline{X}(z) + D U(z) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{X}(z) \cdot z - \underline{x}[0]z &= \underline{A} \underline{X}(z) + \underline{B} U(z) \\ Y(z) &= \underline{C}^T \underline{X}(z) + D U(z) \end{aligned}} \right\}$$

(Stabilitási feltétel)

$$(z \underline{I} - \underline{A}) \underline{X}(z) = \underline{B} U(z) \Rightarrow \underline{X}(z) = (z \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} U(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{(\underline{C}^T (z \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D)}_{H(z)} U(z)$$

C) $H(z)$ rendszer egyenletéből

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]$$

$$\text{belépő } u[k] \xrightarrow[\text{rsz.}]{\text{Kausalitás}} y[k] \text{ is belépő} \quad \mathcal{Z}\{\}$$

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + \dots + a_n Y(z) z^{-n} &= \\ &= b_0 U(z) + b_1 U(z) z^{-1} + \dots + b_m U(z) z^{-m} \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Megjegyzés: ha $u[k]$ nem belépő:

- $H(z)$ felírása értelmetlen
- $\mathcal{Z} \{y[k-l]\} = Y(z) z^{-l} + y[-l] + z^{-1} y[-l+1] + \dots + z^{-(l-1)} y[-1]$
 Kiinduló értékek más módon

c) Kapcsolat $H(z)$ és $h[k]$ között;
 stabilitás vizsgálata

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

impulzusválasz: $u[k] = \delta[k]$

↓

$$y[k] = h[k]$$

$$\mathcal{Z} \{\delta[k]\} = 1$$

$$H(z) = \mathcal{Z} \{h[k]\}, \quad h[k] = \mathcal{Z}^{-1} \{H(z)\}$$

Kauzális rendszer $\Leftrightarrow h[k]$ belépő $\equiv H(z)$ létezik

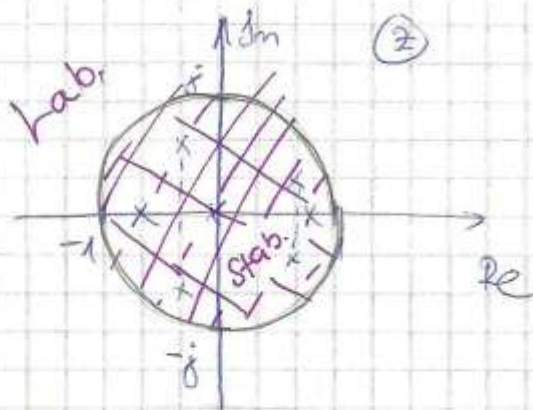
Stabilitás: GV stab. $\Leftrightarrow h[k]$ abszolút összegezhető

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2} + \frac{C_3}{z - p_3} + \dots + \frac{C_n}{z - p_n} \quad (C_i \neq 0)$$

$$h[k] = \mathcal{Z}^{-1} \{H(z)\} = C_1 p_1^{k-1} + C_2 p_2^{k-1} + \dots + C_n p_n^{k-1}$$

(absz. összegezhető $\rightarrow$ ha mértani sor $\rightarrow |p_i| < 1$)

GV stab $\Leftrightarrow H(z)$ minden pólusára: $|p_i| < 1$



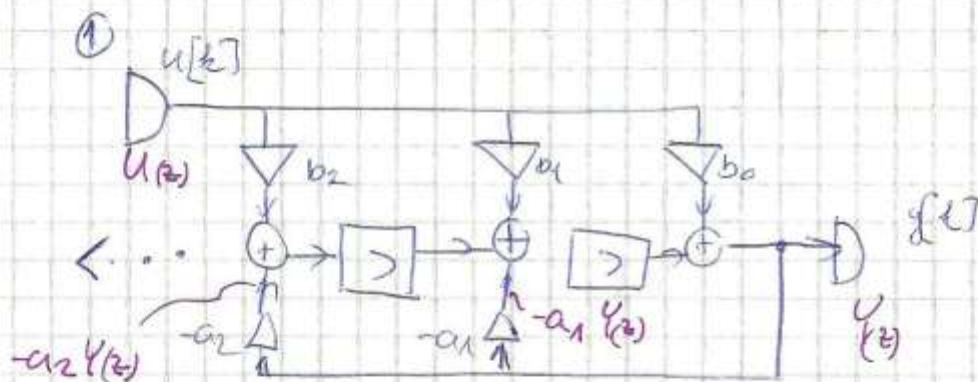
Jury-kritérium
($n=2$)

4. Az átviteli függvény költséges realizációja
- nem egyértelmű

- Kanonikus realizációk

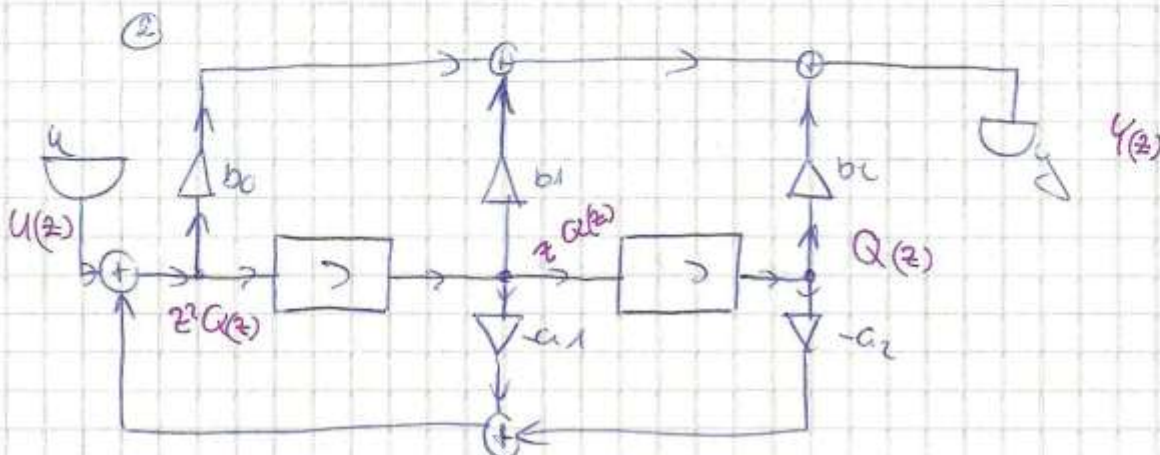
(minimális számú késleltető = $H(z)$ fokszáma)

- 2 direkt realizáció



$$H(z) = \frac{b_0 - b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1} [b_1 U(z) - a_1 Y(z)] + z^{-2} [b_2 U(z) - a_2 Y(z)]$$



$$Y(z) = Q(z) (b_0 z^2 + b_1 z + b_2)$$

$$z^2 Q(z) = U(z) + (-a_1 z Q(z) - a_2 Q(z))$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

VI. Rendszerjellemző függvények

- lineáris, invariáns rendszer
- def: olyan függvény, melynek ismeretében a válasz számítható "tetszőleges" gerjesztésre
- egymásba alakíthatók, ekvivalensek
- kétféle szempontok döntenek

1. impulzusválasz ($h[k]$, időtartomány)

$$\delta[k] \rightarrow h[k]$$

- Kauszális rsz. $\Leftrightarrow h[k]$ belépő
- GV stab. rsz. $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$
- $y[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[k-p] u[p]$ konvolúció
- könnyen ábrázolható és mérhető

2, átviteli karakterisztika ($H(e^{j\omega})$,
frekvencia tartomány)

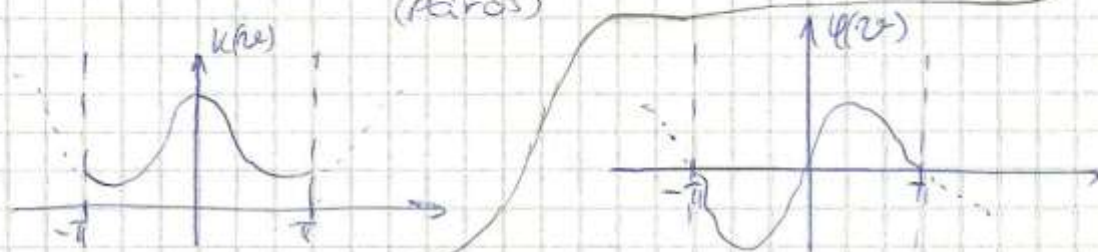
• $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{U(e^{j\omega})} \leftarrow \text{válasz spektruma}$
 $\leftarrow \text{gerj. spektruma}$
 (2. diszkrét
körfrekvencia)

• megkötés: csak GV stab. rendszerre

• $y[k] = \mathcal{F}^{-1} \{ H(e^{j\omega}) \mathcal{F} \{ u[k] \} \}$

• $U(e^{j\omega})$ periodikus ω -ban, 2π szerint

• $K(\omega)$ amplitúdó karakterisztika
(páros)



• $\phi(\omega)$ fázis karakterisztika (páratlan)

3, átviteli függvény ($H(z)$, komplex frekvencia
tartomány)

$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad U(z) = \mathcal{Z} \{ u[k] \}$
 $\leftarrow \text{bejövő}$

• megkötés: kauzális rsz.

$y[k] = \mathcal{Z}^{-1} \{ H(z) \mathcal{Z} \{ u[k] \} \}$

z :
komplex
frekvencia

• gyakorlatban:

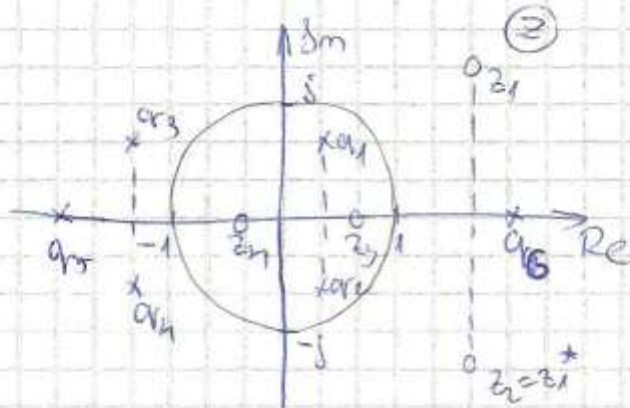
$H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (n \geq m)$

$H(z) = A \frac{(z-s_1)(z-s_2) \dots (z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2) \dots (z-q_n)} \quad s_i \neq q_j$

$s_1, s_2, \dots, s_m$: zérusok

$q_1, q_2, \dots, q_n$: pólusok

• ábrázolás: p - z elrendezés



$(m+n+1)$ érték

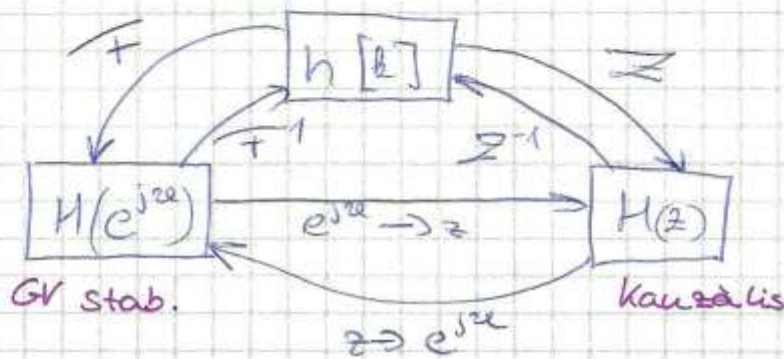
$H(z)$ -t meghatározza

GV stab



$$|q_i| < 1 \quad i=1,2,\dots,n$$

1) a rendszerjellemező függvények kapcsolata



5. Speciális rendszerek

a) véges impulzusválaszú (FIR) rendszer

$$h[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + \dots + c_K \delta[k-K]$$

$$n \geq K+1 \rightarrow h[k] = 0$$

- biztosan GV stabilis (véges tagú sor abszolút összegezhető)
- FI-ben nem realizálható koncentrált paraméterű hálózattal

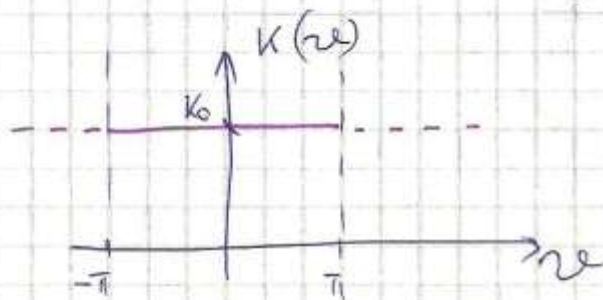
b) mindentátereszto (MA) rendszer

- GV stabilis

$$K(\omega) = |H(e^{j\omega})| \equiv K_0 \text{ (állandó)}$$

($\rightarrow$ nem függ ω -tól)

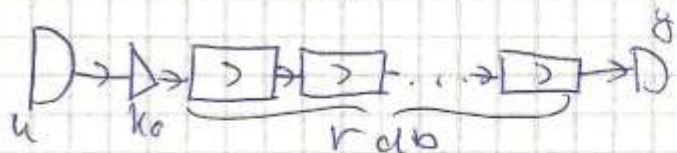
- $\varphi(\omega)$ tetszőleges



- legegyszerűbb MA-rsz:

$$H(e^{j\omega}) = K_0 e^{-j\omega r}$$

- realizáció:



átviteli függvény:

$$H_{MA}(\bar{z}) = K_0 \bar{z}^{-r} \frac{a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + 1}{\bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n}$$

(GV stab. miatt) $\bar{z} \rightarrow e^{j\omega}$ és a számlálóból $r \in \mathbb{N}$
 $\bar{z}^n$ -et kiemelünk:

$$H_{HA'}(z) = K_0 z^{n-r} \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

a tört abszolút értéke = 1

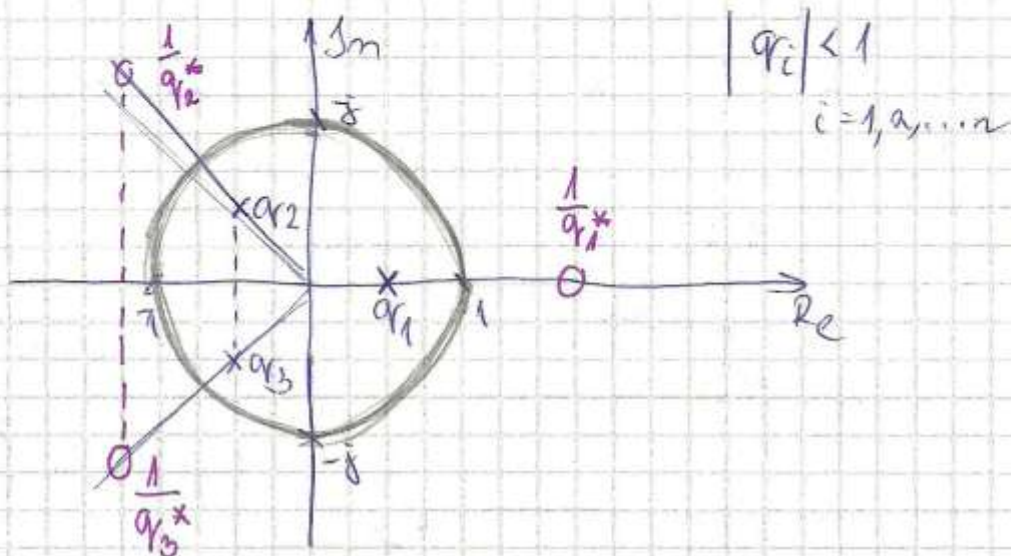
→ az egészet nézve tényleg ^{átértékelő} _{minden}

rsz. kapunk.

q_i pólus $\Rightarrow \frac{1}{q_i}$ zérus

$$H_{HA'}(z) = K_0 z^r \frac{(z - \frac{1}{q_1^*})(z - \frac{1}{q_2^*}) \dots (z - \frac{1}{q_n^*})}{(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_n)}$$

pólus-zérus elrendezés



c) minimál fázisú (MF) rendszer

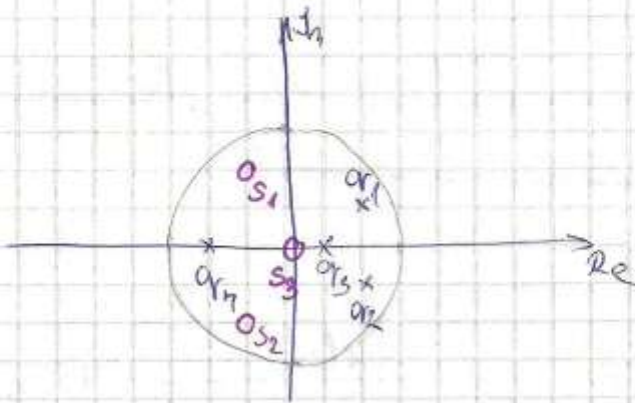
def: olyan GV stabilis rendszer, amelynek nincs zérusa az egységkörön kívül

- minimál fázisú: $\forall |s| \leq 1$ (zéruson)

- szigorúan minimál fázisú: $\forall |s| < 1$

$K(e)$ meghatározza $\varphi(e)$ -t

↳ önmagában rsz. jellemző fo.!



d) $H(z)$ felbontkatasaga

ha $H(z)$ GV stabilis rendszert ir le, akkor $H(z)$ felirható:

$$H(z) = H_{MA}(z) \cdot H_{MF}(z)$$

Pelda:

$$H(z) = 5z^{-2} \frac{(z+4)(z-0,1)}{(z-0,2)(z+0,5)} =$$

$$= \underbrace{\frac{z+4}{z+\frac{1}{4}}}_{H_{MA}} \cdot \underbrace{\frac{(z-0,1)(z+\frac{1}{5})}{(z-0,2)(z+0,5)}}_{H_{MF}} \cdot \underbrace{5z^{-2}}_{\substack{\text{A MA-be is} \\ \text{menetne}}}$$