Pupilla reflexmozgás rendszerszemléleti analízise

Folyamatszabályozás

BMEVIIM158

Házi feladat kód: A42

Demeter Péter

Dátum: 2018. november 23.

Tartalomjegyzék

1 A felnyitott rendszer átviteli függvénye

1.1 Feladat leírás

Határozza meg a felnyitott rendszer átviteli függvényét (*G(t)*) időtartományban a megadott paraméterek alapján!

1.2 Megoldás menete

Először a 2. feladatot oldottam meg. Az ott kapott G(s) függvényt inverz Laplace-transzformáltam, így tértem vissza időtartományra.

$$G(s) = \frac{0.08 * e^{-0.15s}}{(1 + 0.3s)^3} \tag{1}$$

Az inverz Laplace-transzformációmhoz használni kell a konvolúció tételeit, a linearitás tételét valamint az eltolási tételt. Továbbá a következő ismert függvény transzformációkat [1]:

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^k}$

Ahol u(t) a Heaviside-függvény.

Így a kapott G(t) függvény a következő:

$$G(t) = \frac{40}{27}(t - 0.15)^2 e^{\frac{1}{2}-\frac{10t}{3}} u(t - 0.15) \tag{2}$$

1.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
% Peremeterek inicializalasa
k     = 0.08;  % erositesei tenyezo
tau   = 0.3;   % ido allando
d     = 0.15;  % kesleltetes
lDist = 0.2;   % zavar jel amplitudo
lRef  = 0.9;   % referencia fluxus

%% 1. feladat: G(t) atviteli fuggveny idotartomanyban
syms s t;
GsWithSymbolicDen = (1 + tau*s)^3;
GsWithSymbolic = (k * exp(-d*s)) / GsWithSymbolicDen;
Gt = ilaplace(GsWithSymbolic, s, t);
```

2 A felnyitott rendszer átviteli függvényének Laplace transzformáltja

2.1 Feladat leírás

Határozza meg az átviteli függvény *G(t)* Laplace-transzformáltját!

2.2 Megoldás menete

A feladat szövegéből kiderül, hogy a G(s) átviteli függvény ekvivalens egy arányos három tárolós szabályozási szakasszal.

Ismerjük az arányos egy, illetve két tárolós arányos szabályozó általános átviteli függvényét [2].

$$W_p(s) = \frac{k_p * e^{-sT_h}}{1 + sT_p} \tag{3}$$

$$W_p(s) = \frac{k_p * e^{-sT_h}}{(1 + sT_1)(1 + sT_{2)}} \tag{4}$$

Ebből már lehet következtetni a három tárolós általános képletére, melyet a feladatleírásnál megjelölt forrásban meg is találtam [3].

Ezután a feladat szövegében megadott paramétereket behelyettesítettem:

$$G(s) = \frac{0.08 * e^{-0.15s}}{(1 + 0.3s)^3} \tag{5}$$

2.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 2. feladat: G(s), a G(t) atviteli fuggveny laplace trasformaltja

s = tf('s');

GsWithoutDelay = k / (1 + tau*s)^3;

Wdelay = exp(-d*s);

Gs = GsWithoutDelay * Wdelay;
```

3 A zárt rendszer hatásvázlata

3.1 Feladat leírás

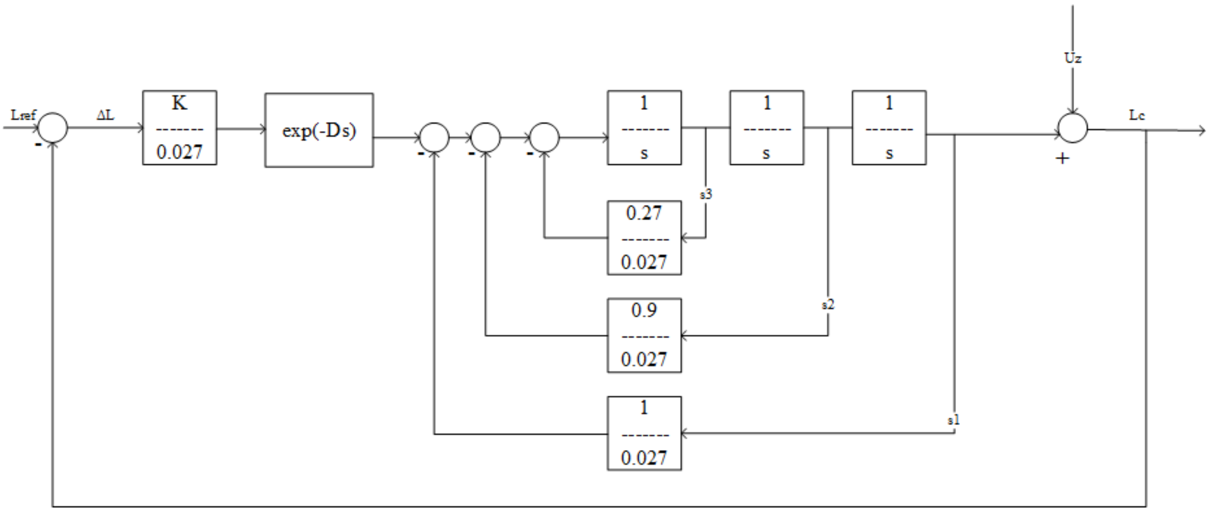
Határozza meg a rendszer hatásvázlatát!

3.2 Megoldás menete

A feladatkiírásban szereplő 3. ábrán látható hatásvázlatot vettem alapul, az ott pirossal bekeretezett részt a szabályozó elvi felépítésével helyettesítettem. A behelyettesítést a hallgatókkal megosztott integrátorláncos hatásvázlat alapján készítettem el [4].

Ehhez először ki kellett bontani a három tárolós tagot:

$$G(s) = \frac{0.08 * e^{-0.15s}}{(1+0.3s)^3} = \frac{0.08 * e^{-0.15s}}{0.027s^3 + 0.27s^2 + 0.9s + 1} \tag{6}$$



1. ábra: A zárt rendszer hatásvázlata

4 A zárt rendszer stabilitása

4.1 Feladat leírás

Határozza meg a zárt rendszer átviteli függvényét és jellemezze a stabilitás szempontjából (a holtidő 3-ad rendű Pádé approximációval közelítse)!

4.2 Megoldás menete

A kiadott oktatási anyag Pádé módszer továbbá a visszacsatolt rendszer átviteli függvényére vonatkozó részeit felhasználva kiszámoltam a rendszer zaj nélküli átviteli függvényét.

$$W_R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{7}$$

A kapott $W_R(s)$ átviteli függvény stabilis.

4.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 4. feladat: zart rendszer atviteli fuggveny
WdelayPade =  pade(Wdelay, 3);
GsWithoutDelayTf = tf([k], sym2poly(GsWithSymbolicDen));
GsTf = GsWithoutDelayTf * WdelayPade;
Wrs = feedback(GsTf, 1, -1);

if isstable(Wrs) == 1
    disp("A Wrs rendszer stabilis.");
else
    disp("A Wrs rendszer nem stabilis.");
end
```

5 Stabilitás kérdése frekvencia tartományban

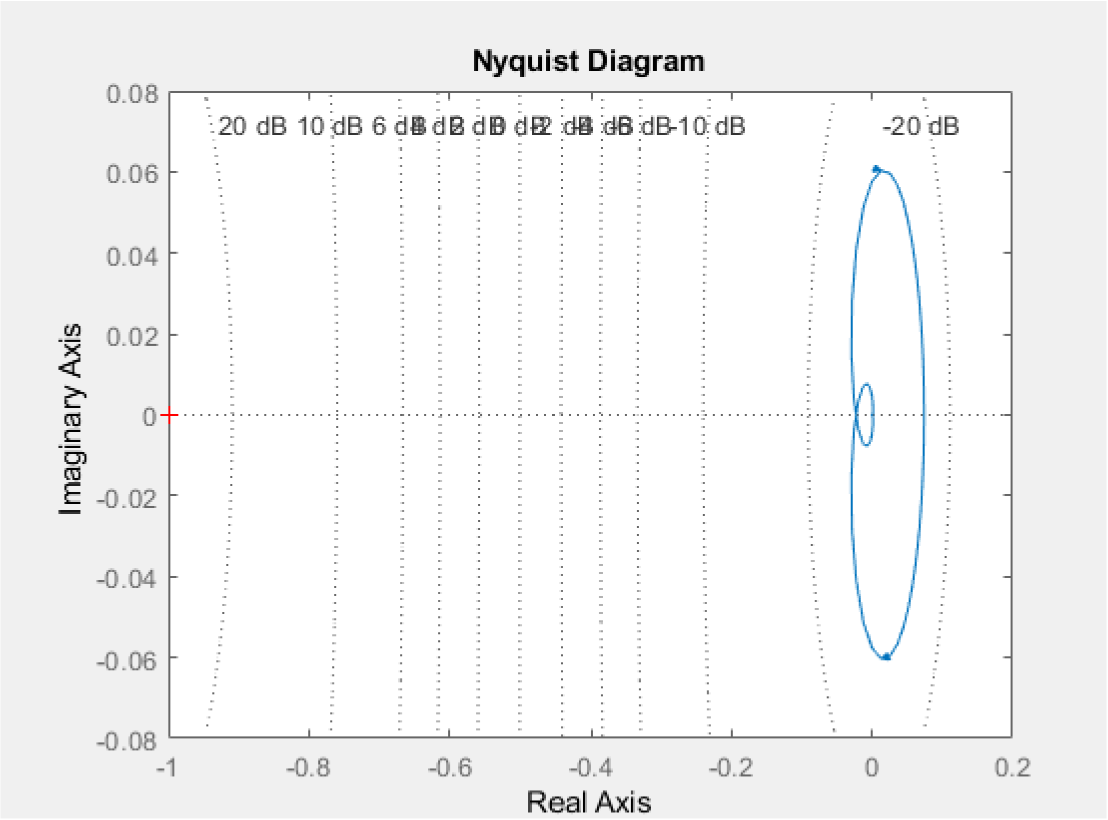
5.1 Feladat leírás

Vizsgálja meg a stabilitás kérdését frekvencia tartományban (Nyquist diagram, Bode diagramok)!

5.2 Megoldás menete

Megvizsgáltam az egyszerűsített Nyquist stabilitási kritériumot [5]:

> A zárt szabályozási rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a felnyitott kör G(s) teljes frekvenciafüggvénye nem fogja körül a komplex sík -1+j0 pontját. A kritérium akkor érvényes, ha a nyitott kör *G(s)* átviteli függvényének nincsenek pozitív valós részű pólusai.

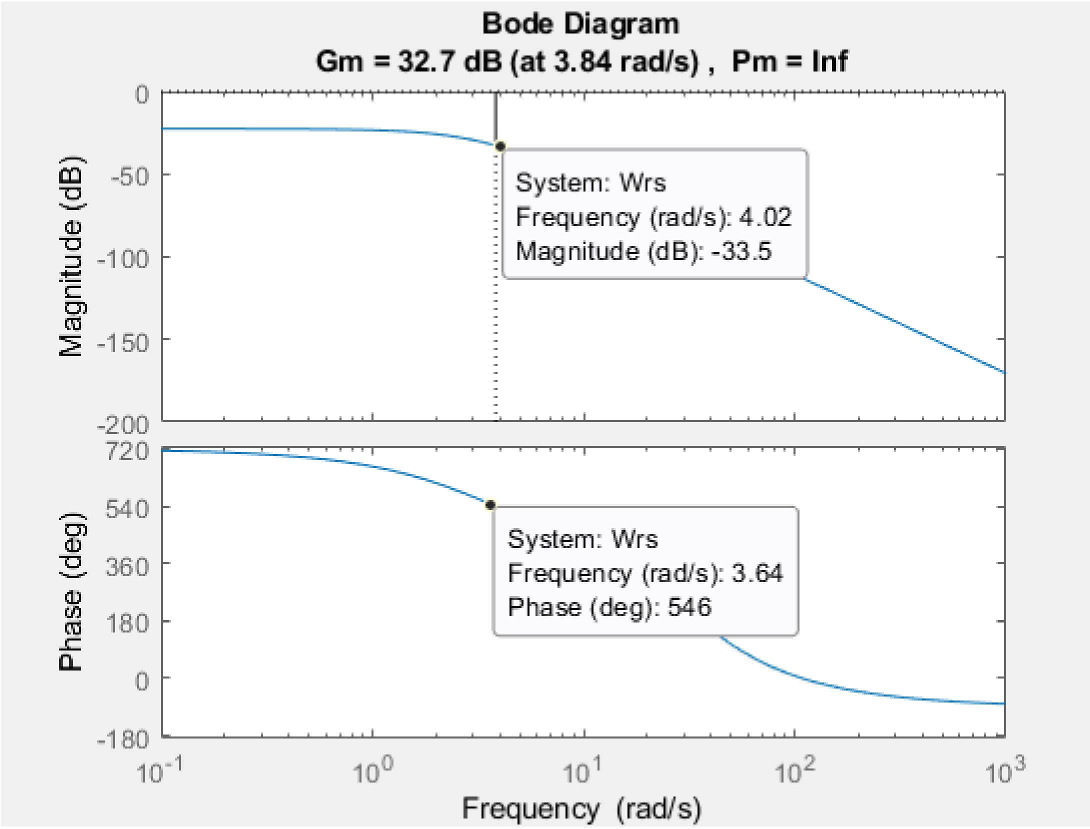


2. ábra: Nyquist diagram

Megvizsgáltam, hogy *G(s)*-nek vannak-e pozitív valós pólusai. Nincsnek, így a kritérium használható. Tehát stabilis.

Fázistöbblet kritérium [5]:

Aszimptotikusan stabilis a zárt szabályozási rendszer, ha a nyitott kör *G(s)* frekvencia függvényének fázistöbblete pozitív.



3. ábra: Bode-diagram

Mivel a fázis többlete pozitív, így ez a kritérium is megerősítheti az előző verdiktet. A tény, hogy pozitív végtelen a fázistartalék, azért lehet, mert megingathatatlanul stabil.

5.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 5. feladat: stabilitas kerdesem Nyquist, Bode
[WrsNum, WrsDen] = tfdata(Wrs, 'v');
if all(real(roots(WrsDen)) < 0)
    disp("Nincs pozitiv valos polusa!");
else
    disp("Van pozitiv valos polusa!");
end
figure("Name", "Wp(s) diagrams");
subplot(1, 2, 1); nyquist(Wrs); grid;
subplot(1, 2, 2); margin(Wrs); grid;  % bode
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(Wrs);
```

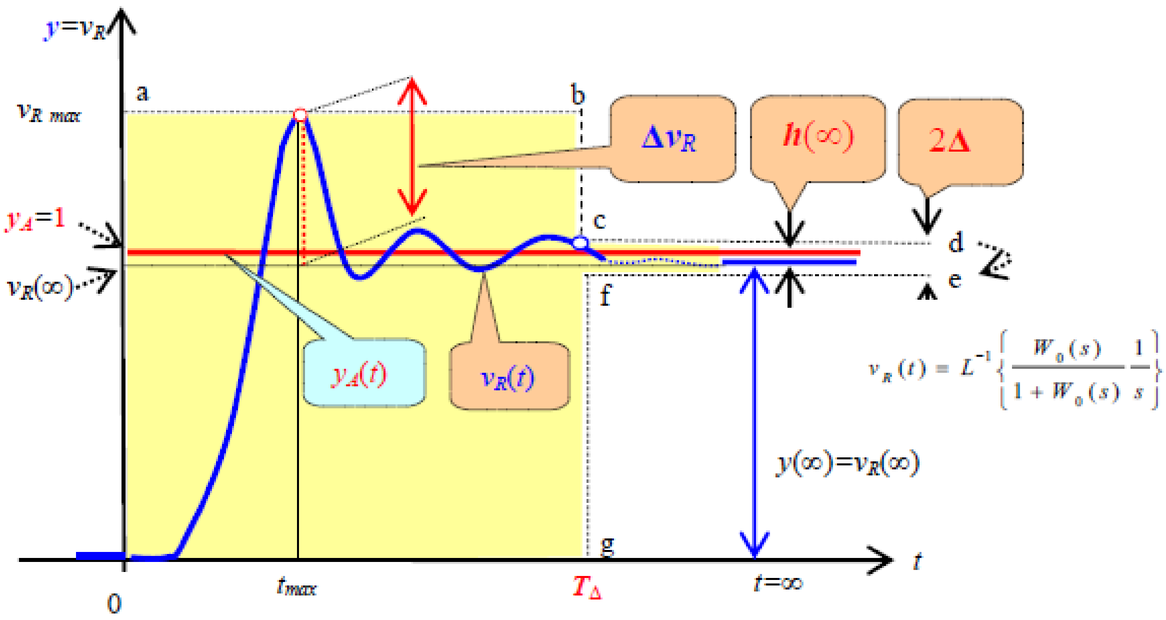
6 A rendszer minőségi jellemzői

6.1 Feladat leírás

Vizsgálja meg a különböző értékre K = (2K, 3K, 4K) a rendszer minőségi jellemzőit: túllövés, szabályozási idő (a kimenet alapján)! Jellemezze a kapott eredményeket!

6.2 Megoldás menete

A jegyzetben kikerestem az erre vonatkozó részt [6], majd megnéztem, hogy a Matlab-nak van-e erre utasítása, így inkább azt használtam és nem készítettem saját implementációt.



4. ábra: Zárt szabályozási rendszer minőségi jellemzői

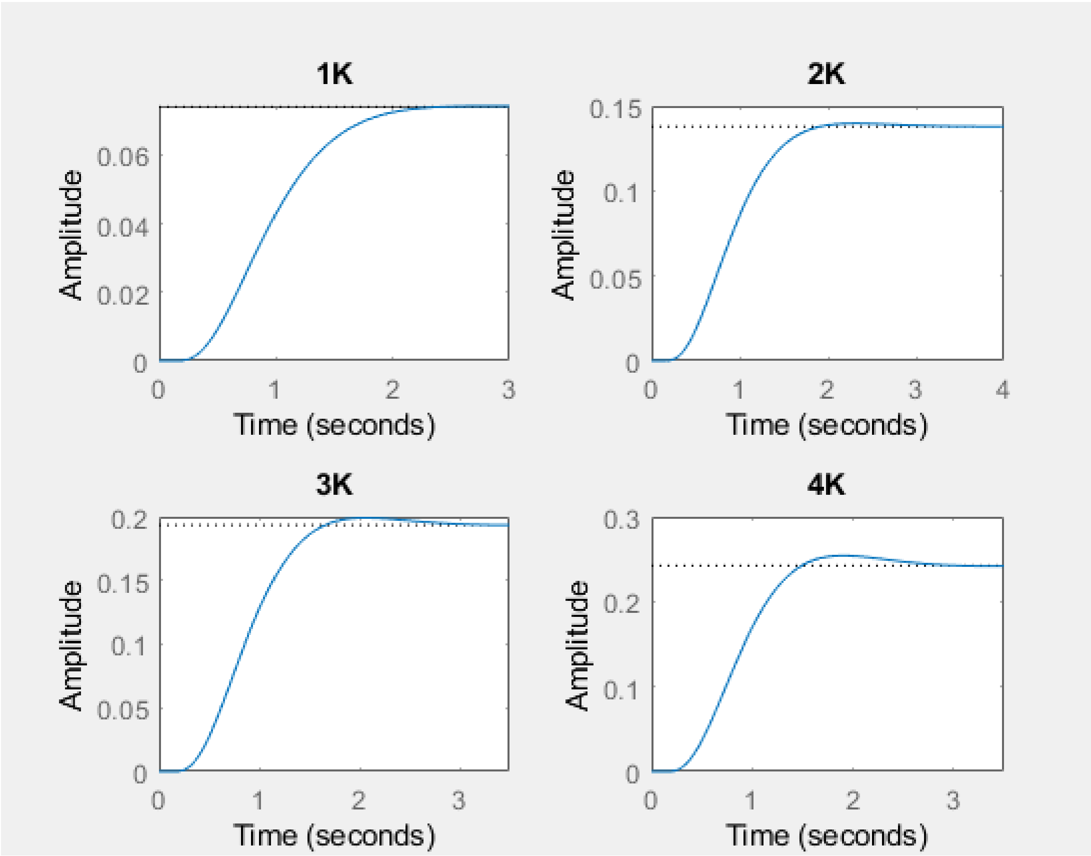
A 4. ábra mutatja egy rendszer egységugrásra adott válaszát, ahol T_Δ jelöli a beállási időt, amelynek eltelte után az átmeneti függvény már nem lép ki egy meghatározott hibasávból.

A t_{max} időpontban $V_R(t) = V_{R\,max}$, $t = \infty$ időpontban $V_R(\infty)$, és a rendszer $\sigma(\%)$ túllendülése:

$$\sigma(\%) = \frac{V_{R\,max} - V_R(\infty)}{V_R(\infty)} 100 = \frac{\Delta V_R}{V_R(\infty)} \tag{8}$$

Az ideális rendszernél ezek a mutatók rendre nullák volnának, azonban ez az időállandókra nem kivitelezhető. A túllövésnél lehetséges követelmény az ideális helyzet közel pontos elérése.

	1K	2K	3K	4K
túllövés (%)	0.2576	1.3178	2.9292	4.8717
szabályozási idő (s)	2.0206	1.75	2.4369	2.4879



5. ábra: A rendszer válasza egységugrásra különböző erősítéssel

6.3 Megoldás Matlab kódrészlete

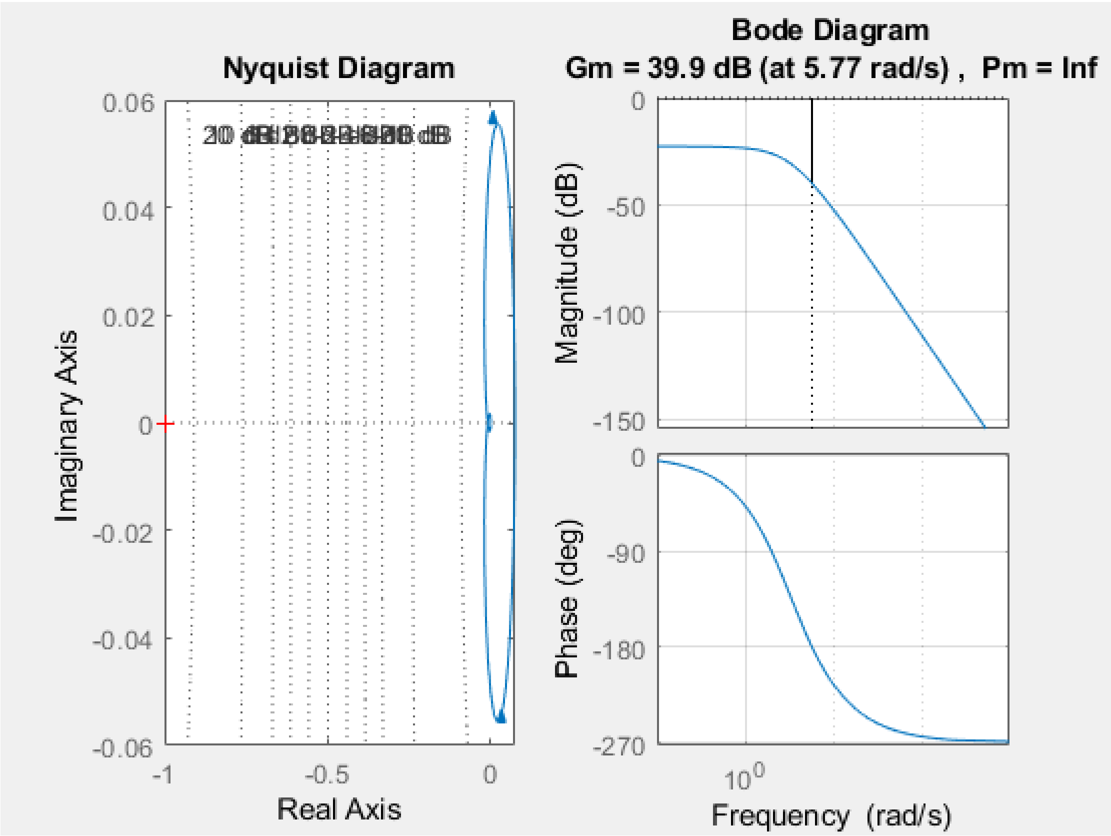
```
%% 6. feladat: 2K, 3K, 4K tulloves, szabalyozasi ido
figure("Name", "Step response for different K");
for i=1:4
    subplot(2, 2, i);
    Wk = feedback(i*GsTf, 1, -1);
    step(Wk);
    title(i + "K");
    info = stepinfo(Wk);
    disp("  " + i + "K:");
    disp("    tulloves: " + info.Overshoot);
    disp("    szabalyozasi ido: " + info.SettlingTime);
end
```

7 Holtidő nélküli stabilitás kérdése frekvencia tartományban

7.1 Feladat leírás

Mérje össze a 5. Pontban kapott eredményeket azzal az esettel, ha a rendszer nem tartalmaz holtidőt (D=0)!

7.2 Megoldás menete



6. ábra: A rendszer holtidő nélküli Nyquist- és Bode-diagramja

Az 5. feladatban taglaltak alapján a rendszer holtidő nélkül is stabilis, mind az egyszerűsített Nyquist kritérium, mind a fázistöbblet kritérium szerint.

7.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 7. feladat: holtido nelkuli stabilitas Nyquis, Bode
WsWitohutDelay = feedback(GsWithoutDelayTf, 1, -1);

[WsWitohutDelayNum, WsWitohutDelayDen] = tfdata(WsWitohutDelay, 'v');
if all(real(roots(WsWitohutDelayDen)) < 0)
    disp("Nincs pozitiv valos polusa!");
else
    disp("Van pozitiv valos polusa!");
end

figure("Name", "Wp(s) without delay diagrams");
subplot(1, 2, 1); nyquist(WsWitohutDelay); grid;
subplot(1, 2, 2); margin(WsWitohutDelay); grid;  % bode
```

8 A rendszer állapotváltozói

8.1 Feladat leírás

Adja meg a rendszer L_{Ref} bemenő jele és L_c kimenő jele alapján az állapotegyenlet rendszerét! Adja meg A, B, C, D állapotváltozókat!

8.2 Megoldás menete

Lineáris rendszerek esetén az állapotegyenlet-reprezentáció a következőképpen alakul [7]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{9}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{10}$$

Ahol A: állapotmátrix, x(t): állapotvektor,
B: bemeneti mátrix, u(t): gerjesztés vektor,
C: kimeneti mátrix, $\frac{dx(t)}{dt}$: állapotsebesség vektor
D: direkt mátrix.

Ugyanez s operátor tartományban:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \tag{11}$$

$$y(s) = W(s)u(s) \tag{12}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{13}$$

Ahol *W(s)* az átviteli mátrix.

Ezek alapján a következők az állapotváltozók:

$$A = \begin{bmatrix} -90 & -54.69 & -31.70 & -13.66 & -4.87 & -2.71 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0029 & 0.0145 & 0.0603 & 0.4019 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$D = [0] \tag{17}$$

Ezek alapján szintén elmondható, hogy a rendszerünk stabilis, mivel az A mátrix karakterisztikus polinomjainak gyökei kizárólag olyan komplex számok, melynek valós része negatív.

A fenti állapotváltozók alapján a következő állapotegyenlet rendszer írható fel:

$$\frac{dx_1}{dt} = -90x_1 - -54.69x_2 - 31.7x_3 - 13.66x_4 - 4.87x_5 - 2.71x_6 + 0.5L_{ref} \tag{18}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 64x_1 \tag{19}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 32x_2 \tag{20}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 16x_3 \tag{21}$$

$$\frac{dx_5}{dt} = 8x_4 \tag{22}$$

$$\frac{dx_6}{dt} = 2x_5 \tag{23}$$

$$L_c = -0.0029x_3 + 0.01454x_4 + 0.06034x_5 + 0.40194x_6 \tag{24}$$

Ennek a rendszernek a kimenő jele $L_c = 0.0667$, melyet az 5. ábra 1K erősítése is jól mutat.

8.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 8. feladat: A, B, C, D allapotvaltozok
WrsSS = ss(Wrs);
if all(real(eig(WrsSS.A)) < 0)
    disp("A allapotmatrix alapjan is stabilis a rendszer.");
end

u = [lRef];
lC = dcgain(WrsSS) * u;
```

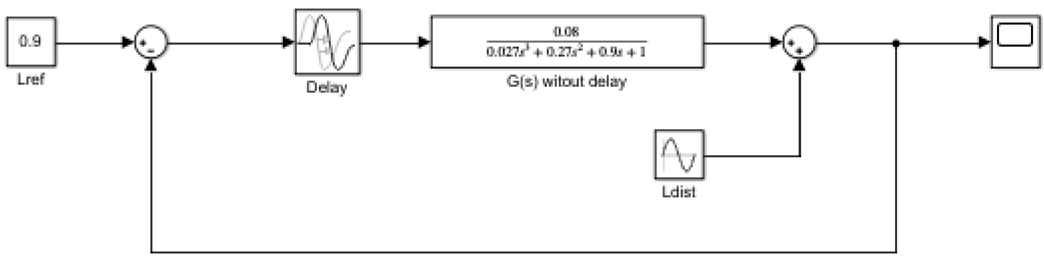
9 A rendszer működésének szimulációja

9.1 Feladat leírás

Szimulálja a rendszer működését az L_{Ref} referencia érték és L_{Dist} amplitúdójú 0.05 Hz, 0.1 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójel esetén vagy Matab script vagy SIMULINK segítségével!

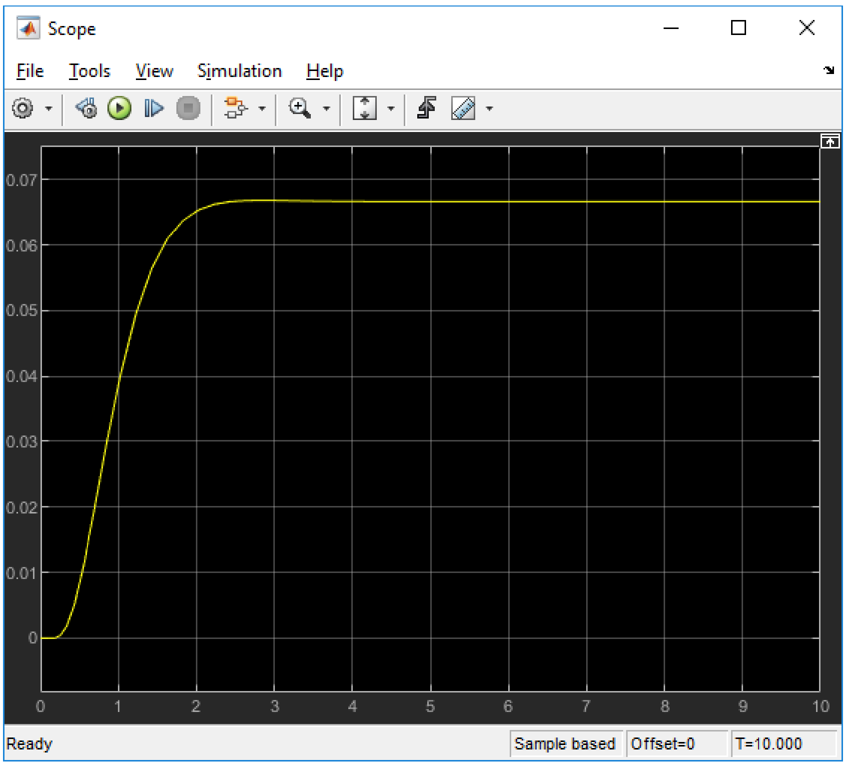
9.2 Megoldás menete

Az elkészült Simulink moddelem a korábban elkészített hatásvázlatom alapján.



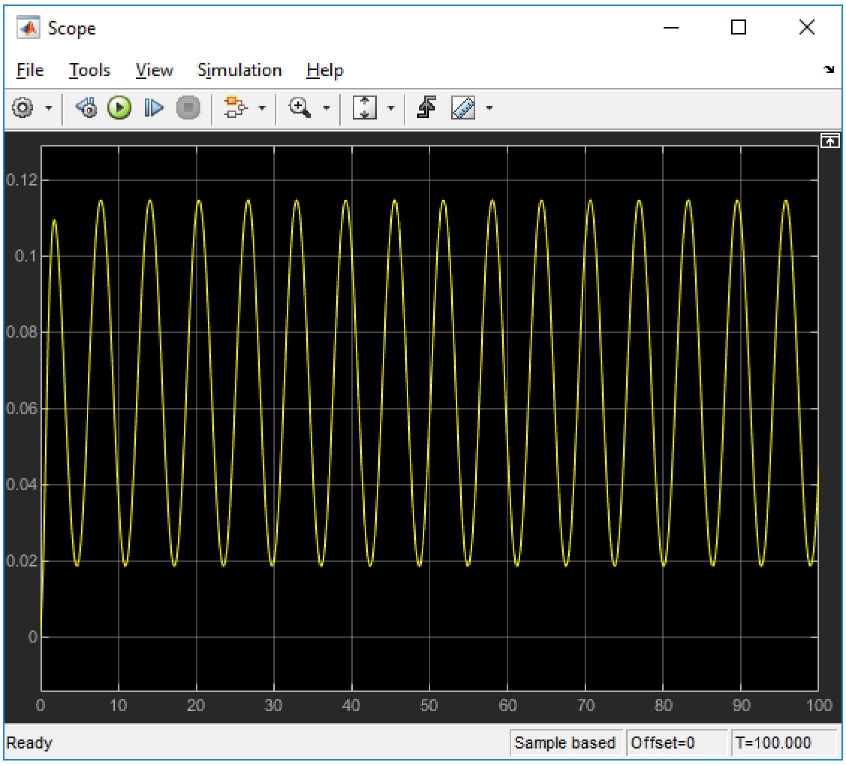
7. ábra: A hatásvázlat Simulink-ben

Először zaj nélkül szimuláltam, az várva, hogy a kimenet szinte tökéletesen megegyezik az 5. ábra 1K-val erősített *G(s)* egységugrásra adott válaszával. (Most nem egységugrás a gerjesztés, hanem L_{ref}.)



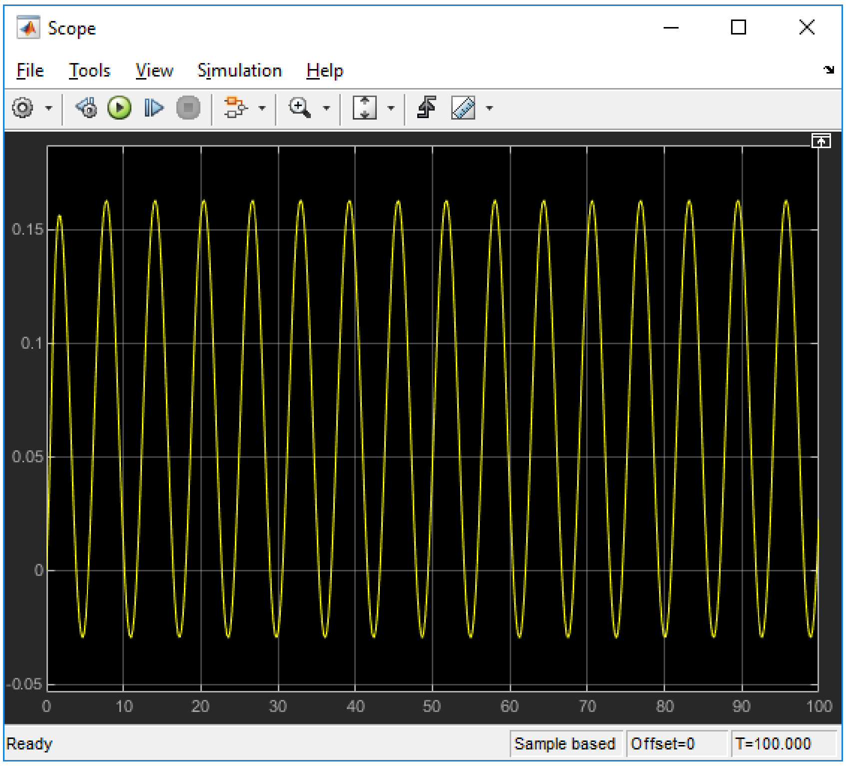
8. ábra: Szimuláció L_{Dist} nélkül

Ezután beállítottam L_{Dist}-et 0.05 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre.



9. ábra: Szimuláció L_{Dist} 0.05 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre

Jól látszik, hogy a zaj mértéke túlzott az zaj nélküli jelünkhöz képest.



10. ábra: Szimuláció L_{Dist} 0.1 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre

10 Az erősítés küszöbértéke

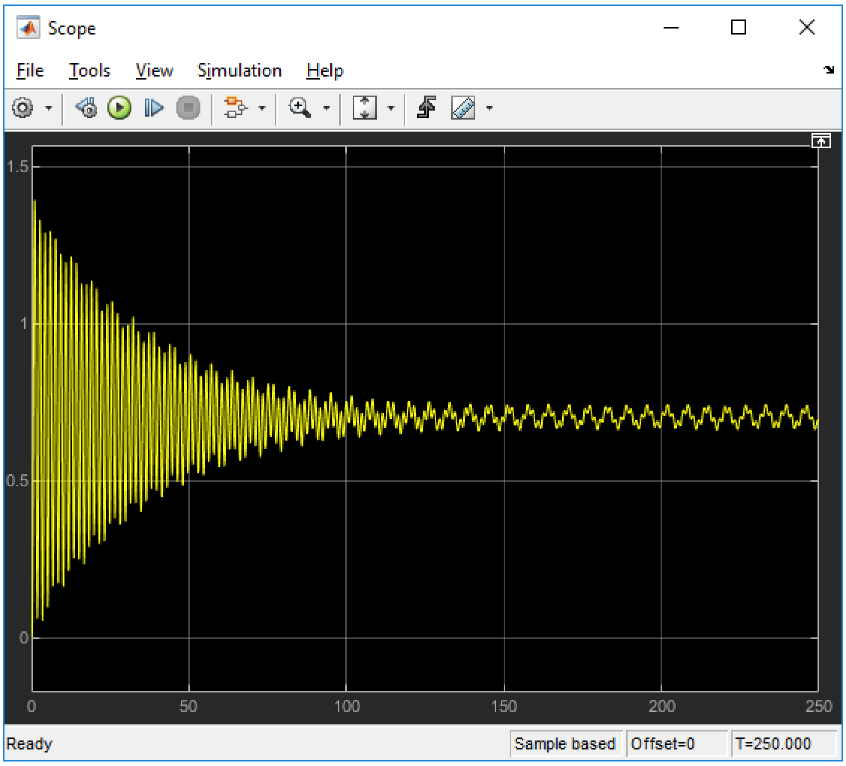
10.1 Feladat leírás

Határozza meg a K küszöbértékét, amelyre a rendszer még stabilis! Szimulálja a rendszer kimenetét SIMULINK-ban a kapott értékre!

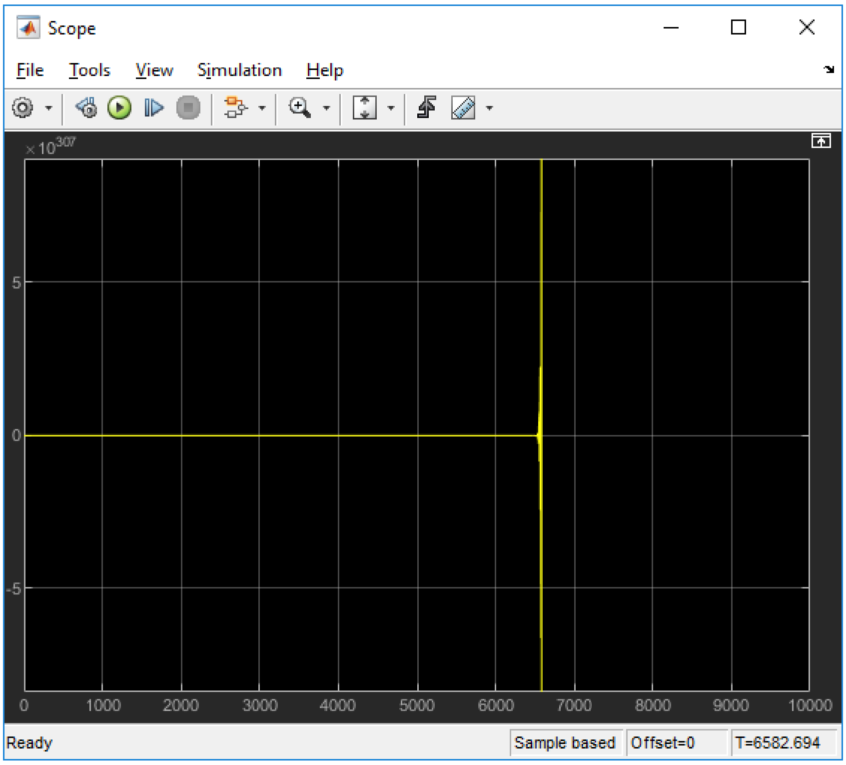
10.2 Megoldás menete

Addig léptetem a K mértékét, amíg stabilis a rendszer. Majd visszalépek egyet és kisebb lépcsőfokokkal lépkedem előre a programkódban megadott pontosság eléréséig.

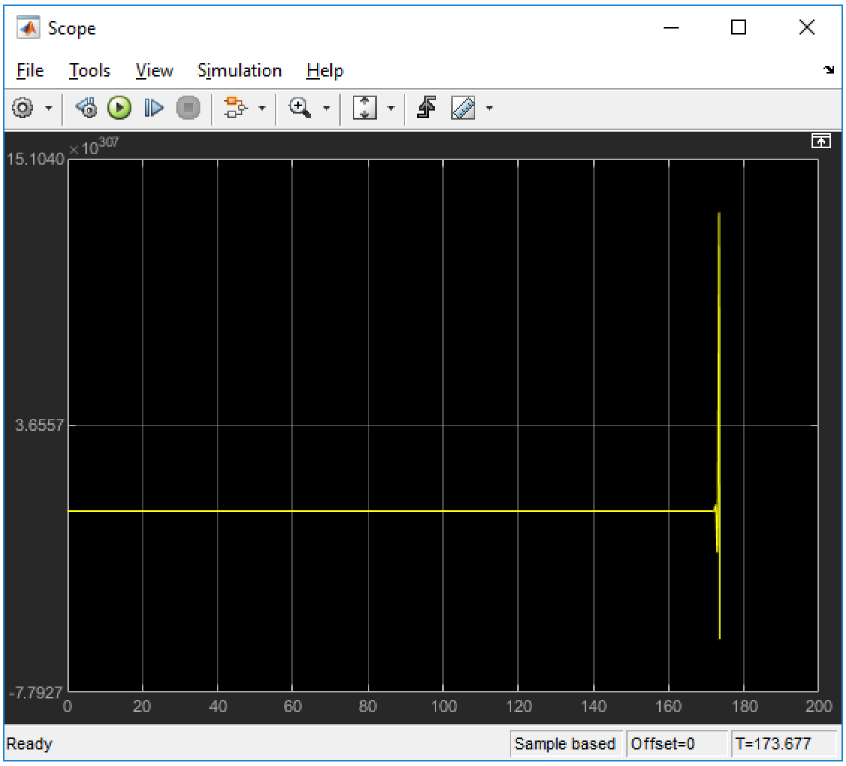
Az így kapott küszöbérték $K = 3.543645515079$.



11. ábra: Szimuláció L_{Dist} 0.1 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre, K=3.543645515079 erősítéssel



12. ábra: Szimuláció L_{Dist} 0.1 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre, K=4 erősítéssel



13. ábra: Szimuláció L_{Dist} 0.1 Hz frekvenciájú 0 Lumen középértékű zavarójelre, K=50 erősítéssel

Jól látszik, hogy a stabilitási küszöberősítésnél minél nagyobb az erősítés, annál gyorsabban omlik össze a rendszerünk.

10.3 Megoldás Matlab kódrészlete

```
%% 10. feladat: K kuszobertek, amire meg a rendszer stabilis
GsWithoutK = GsTf / k;
kTreshold = 1;
step = 1;
for precision = 1:13
    while isstable(feedback(kTreshold * GsWithoutK, 1, -1))
        kTreshold = kTreshold + step;
    end
    kTreshold = kTreshold - step;
    step = step / 10;
end
disp("A keresett kuszobertek: " + num2str(kTreshold, precision));
```

11 Idézett forrásmunkák

[1] „Laplace transform,” Wikipedia, 16 Október 2018. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform. [Hozzáférés dátuma: 17 November 2018].

[2] B. Benyó, F. Juhász és B. Szilágyi, Folyamatszabályozás, 1B. Elméleti alapok, 2017.

[3] L. Stark és P. M. Sherman, „A servoanalytic study of consencual pupil reflex to light,” *Neurophys,* 1957.

[4] B. Szilágyi, Alapfogalmak(1), 2018.

[5] B. Benyó, F. Juhász és B. Szilágyi, Folyamatszabályozás, 6. Szabályozási rendszer vizsgálata a frekvencia módszer alapján, 2017.

[6] B. Benyó, F. Juhász és B. Szilágyi, Folyamatszabályozás, 2. A szabályozás, 2017.

[7] B. Benyó, F. Juhász és B. Szilágyi, Folyamatszabályozás, 1A. Alapfogalmak, 2017.