Fizika 1i, 2018 őszi félév, 4. gyakorlat

Szükséges előismeretek: erőtörvények: rugóerő, gravitációs erő, közegellenállási erő, csúszási és tapadási súrlódás; kényszerfeltételek: kötél, állócsiga, mozgócsiga, relatív gyorsulás; tehetetlenségi erők, effektív nehézségi gyorsulás;

Feladatok

Erőtörvények

F1. Egy kerékpáros „teljes erőbedobással” lejtőn felfelé $v_1 = 12$ km/h, ugyanezen lejtőn lefelé $v_2 = 36$ km/h sebességgel tud haladni. Mekkora a kerékpáros legnagyobb sebessége vízszintes úton, ha a maximális erőkifejtése független a sebességétől?

A kicsit pongyolán megfogalmazott „erőkifejtés” szó egy fizikus értelmezésében jelentheti

a) a kerékpáros által kifejtett (és azt a hajtókarok, a lánckerekek és a lánc által a kerekekhez továbbított) *erő nagyságát*;

b) a kerékpáros mechanikai *teljesítményét*.

F2. Két egyforma hosszú, D_1 és D_2 rugóállandójú rugót összekapcsolunk

a) sorosan (egy-egy végüket összekapcsolva);

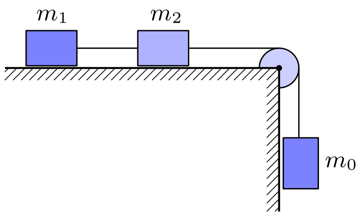
b) párhuzamosan;

Mekkora a két esetben a rendszer rugóállandója?

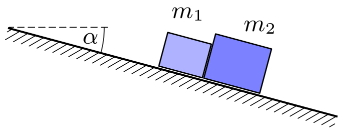
F3. Határozzuk meg a Föld körül geostacionárius pályán keringő műholdak földfelszíntől mért magasságát!

Dinamika (feladatok kényszerekkel)

F4. Az *ábrán* látható rendszerben az m_0, m_1 és m_2 tömegek egyenlők, a csiga ideális, a testek és az asztallap között a csúszási és tapadási súrlódási tényező egyaránt μ. Határozzuk meg az m_0 tömegű test gyorsulását, valamint az m_1 és m_2 tömegeket összekötő fonálban ébredő erőt! Diszkutáljuk a megoldást!



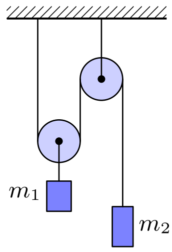
F5. Egy m_1 és m_2 tömegű ládát közvetlenül egymás mellett helyezünk egy lejtőre. A tapadási és súrlódási együttható értéke az 1-es test és a lejtő között μ_1, a 2-es test és a lejtő között μ_2, ahol $\mu_2 > \mu_1$.



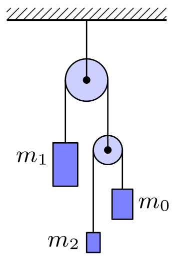
a) Legalább mekkora legyen a lejtő hajlásszöge, hogy a két testből álló rendszer lecsússzon rajta?

b) Határozzuk meg a testek között ható erőt, ha a lejtő α hajlásszöge nagyobb, mint az *a*) kérdésben kiszámított érték.

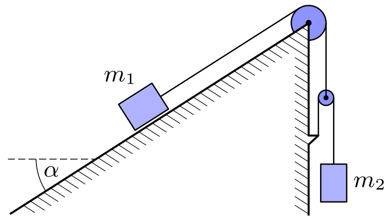
F6. Az *ábrán* látható elrendezésben a mozgócsigán függő test tömege m_1 a másik testé m_2. A rendszert ebből a helyzetből elengedjük. Határozzuk meg a testek gyorsulását, ha a súrlódás elhanyagolható!



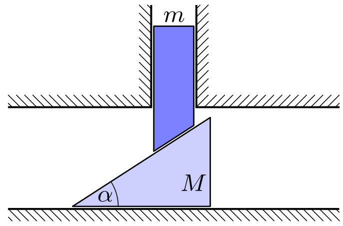
F7. Az *ábrán* látható rendszerben $m_0 = 1$ kg, $m_1 = 4$ kg, valamint ismert, hogy a testeket nyugalomból elengedve az m_0 tömegű test nyugalomban marad. Határozzuk meg az ismeretlen m_2 tömeget és a testek gyorsulását!



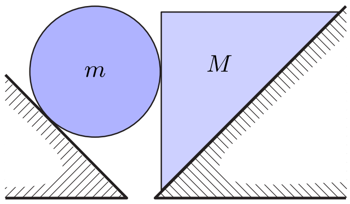
F8. Határozzuk meg az *ábrán* látható két test gyorsulását, ha a súrlódás mindenhol elhanyagolható és a csiga ideális!



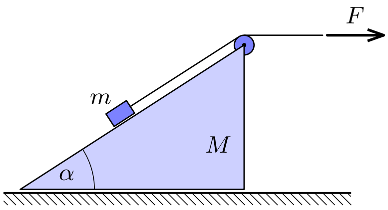
F9. Határozzuk meg az *ábrán* látható M tömegű, α hajlásszögű ék és az m tömegű rúd gyorsulását, ha a súrlódás minden érintkező felületnél elhanyagolható.



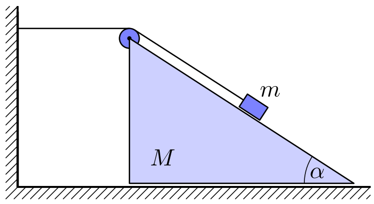
F10. Két csúszós ($\mu = 0$), azonos α hajlásszögű lejtőt az *ábrán* látható módon rögzítünk egymással szemben úgy, hogy kis rés legyen közöttük. A lejtőkre egy m tömegű hengert és egy M tömegű éket helyezünk úgy, hogy egymáshoz érjenek, valamint az ék egyik oldallapja vízszintes legyen. Mekkora gyorsulással mozog a henger és az ék? Adjuk meg a kettejük között ható erőt!



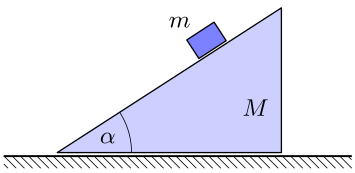
F11. Vízszintes felületen lévő, elhanyagolható tömegű csigával ellátott, ék alakú, $M = 5$ kg tömegű hasábra egy $m = 1$ kg tömegű testet helyezünk, melyet a csigán átvetett fonállal vízszintes irányba $F = 20$ N erővel húzunk. Határozzuk meg a testek gyorsulását, ha a súrlódás mindenhol elhanyagolható!



F12. Egy m tömegű kis test egy M tömegű, α hajlásszögű lejtőn nyugszik. A testet az *ábrán* látható módon egy, a lejtő tetejéhez rögzített csigán átvetett fonálhoz kötjük. A fonál másik vége egy függőleges falhoz van kötve. Határozzuk meg a lejtő gyorsulását! Minden felület csúszós, azaz nincs súrlódás.



F13. Súrlódásmentes asztallapra M tömegű éket, annak síkos felületére pedig m tömegű kis testet helyezünk. A rendszert nyugalomból elengedve határozzuk meg a testek gyorsulását!



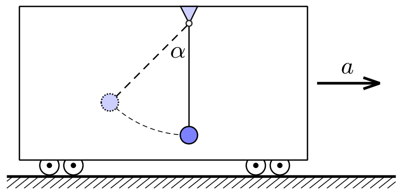
Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek

F14. Egy liftben egy diák mérlegen állva kísérletezik. Amikor a lift elindul, a mérleg állandó 60 kg-ot jelez. Amikor a lift megáll, a kijelzett érték 40 kg. Feltételezve, hogy a lift gyorsulásának nagysága ugyanakkora induláskor, mint megálláskor, határozzuk meg

a) a diák tömegét;

b) a lift gyorsulásának nagyságát!

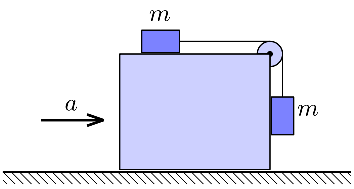
F15. Egy hosszabb ideje álló vonat egyszercsak állandó a gyorsulással elindul.



a) Mekkora a vonat mennyezetéhez rögzített inga függőlegessel bezárt legnagyobb α szöge?

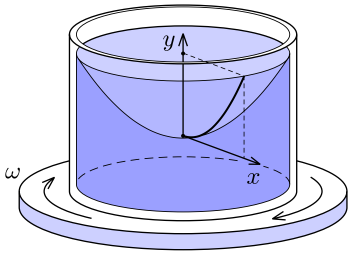
b) Az inga lengéseinek lecsillapodása után mekkora lesz az inga függőlegessel bezárt szöge?

F16. Legalább mekkora gyorsulással kell mozgatnunk az *ábrán* látható tömböt ahhoz, hogy a rajta elhelyezkedő két, fonállal összekötött, azonos tömegű test a tömbhöz képest ne mozogjon? A kis testek és a tömb felülete közötti tapadási súrlódási együttható μ, a csiga ideális.



F17. Egy α hajlásszögű lejtőn egy félig vízzel telt zárt tartály csúszik lefelé. Mekkora szöget zár be állandósult állapotban a víz felszíne a vízszintessel? A tartály és a lejtő közötti csúszási súrlódási tényező μ. Vizsgáljuk meg a $\mu \to 0$ határesetet is!

F18. Henger alakú tartály félig van töltve folyadékkal. A tartályt egy forgó asztalra helyezzük és óvatosan forgatni kezdjük. Mutassuk meg, hogy ω szögsebesség esetén a folyadékfelszín alakja állandósult állapotban forgási paraboloid, és adjuk meg a felület síkmetszetének $y(x)$ egyenletét!



Megoldások

F1. A kerékpárra többféle erő is hat, de ezeknek csak a mozgás irányába eső komponensét kell figyelembe vennünk. A nehézségi erőnél ez a komponens $\pm mg\sin\alpha$ (ahol α a lejtő hajlásszöge, az előjel pedig a haladás irányától függ). A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.

A kerékpáros lába által a pedálokra kifejtett erő forgatónyomatékot eredményez, ami – az áttételeken keresztül – a gumiabroncs által a talajra kifejtett, azt hátrafelé toló erővé számolható át. Ennek az erőnek az ellenereje a talaj által a kerékre kifejtett tapadási súrlódási erő.

Jelöljük a felfelé, lefelé és vízszintesen haladó kerékpáros csúcssebességét rendre v_1-gyel, v_2-vel és v_3-mal. A kerékpár mindhárom esetben egyenletesen halad, gyorsulása tehát nulla. A lejtőn felfelé haladó kerékpárosra felírható mozgásegyenlet:

$$F_1 - mg\sin\alpha - kv_1^2 = 0, \tag{1}$$

ahol F_1 a kerékpáros lábának „erőkifejtésével” arányos, a kerékpárt menetirányban előrefelé toló súrlódási erő, k pedig a közegellenállási erő képletében szereplő állandók szorzata. Hasonló egyenleteket írhatunk fel a lejtőn lefelé mozgó, illetve a vízszintes úton haladó kerékpárra is:

$$F_2 + mg\sin\alpha - kv_2^2 = 0, \tag{2}$$

$$F_3 - kv_3^2 = 0. \tag{3}$$

a) Ha a kerékpáros „maximális erőbedobását” úgy értelmezzük, hogy az általa kifejtett *erő* mindhárom esetben ugyanakkora, azaz

$$F_1 = F_2 = F_3, \tag{4}$$

akkor az (1) és (2) egyenleteket összeadva kapjuk:

$$F_1 + F_2 - k\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 0.$$

Vessük össze az eredményt (3)-mal és (4)-gyel:

$$2kv_3^2 - k\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 0,$$

ahonnan

$$v_3 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \approx 27\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b) Ha a feladat (laza megfogalmazású) szövegében szereplő „teljes erőbedobás” kifejezést a kerékpáros maximális *teljesítményeként* értelmezzük, akkor (4) helyett a teljesítmények egyenlőségét írhatjuk fel:

$$F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2 = F_3 \cdot v_3.$$

Az első egyenlőségből (1) és (2) felhasználásával

$$mg\sin\alpha = k\frac{v_2^3 - v_1^3}{v_1 + v_2} \tag{6}$$

adódik. Az $F_1 \cdot v_1 = F_3 \cdot v_3$ egyenlet, valamint (1) és (3) miatt fennáll az

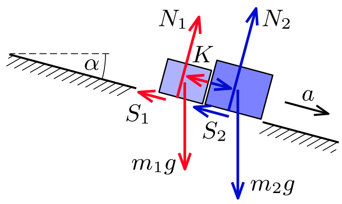
$$mg\sin\alpha = k\frac{v_3^3 - v_1^3}{v_1} \tag{7}$$

összefüggés is. (6) és (7) összevetéséből kapjuk a keresett sebességet:

$$v_3 = \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2\left(v_1^2 + v_2^2\right)}{v_1 + v_2}} \approx 23{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

F2. *a*) $(D_1^{-1} + D_2^{-1})^{-1}$, *b*) $D_1 + D_2$.

F5. Írjuk fel a két testre vonatkozó mozgásegyenleteket feltételezve, hogy a testek a gyorsulással csúsznak lefelé a lejtőn! Az erőket az alábbi ábra szemlélteti:



Az 1-es testre a dinamika alapegyenlete lejtőirányban és arra merőlegesen:

$$m_1 g\sin\alpha - S_1 - K = m_1 a\,, \tag{1}$$

$$N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0\,. \tag{2}$$

Két hasonló egyenlet írható fel a 2-es testre is:

$$m_2 g\sin\alpha - S_2 + K = m_2 a\,. \tag{3}$$

$$N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0\,. \tag{4}$$

A csúszási súrlódás erőtörvénye két további összefüggést szolgáltat:

$$S_1 = \mu_1 N_1, \qquad S_2 = \mu_2 N_2\,.$$

A fenti hat egyenlet segítségével megoldhatjuk mindkét feladatrészt.

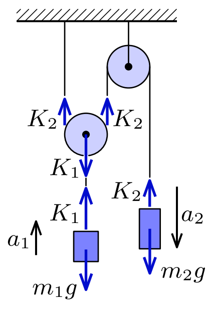
a) A csúszás határán a rendszer gyorsulása nulla, ebből a kérdéses hajlásszög:

$$\tan\alpha_{\min} = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

b) Az előbb kiszámított $\alpha_{\min}$-nál nagyobb hajlásszög esetén a gyorsulás nem zérus. Az egyenleteket rendezve a testek közötti erőt könnyen megkaphatjuk:

$$K = \frac{(\mu_2 - \mu_1)m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\cos\alpha\,.$$

F6. Az erők az alábbi *ábrán* láthatók, ahol felhasználtuk, hogy ideális fonál minden pontját ugyanakkora erő feszíti.



A gyorsulások iránya a tömegek arányától függ, mi most az ábrán jelölt irányokat tételezzük fel. Az m_1 és m_2 tömegű testek mozgásegyenletei:

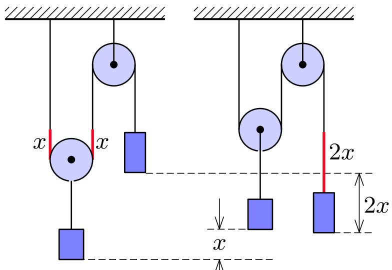
(1) $$K_1 - m_1 g = m_1 a_1\,,$$

(2) $$m_2 g - K_2 = m_2 a_2\,.$$

Az ideális mozgócsigára is felírhatjuk a dinamika alapegyenletét:

(3) $$2K_2 - K_1 = m_{\text{csiga}} a_1 \approx 0\,,$$

ahol felhasználtuk, hogy az ideális csiga tömege elhanyagolható, ezért (bár az 1-es testtel együtt gyorsul) a rá ható erők eredője nulla.



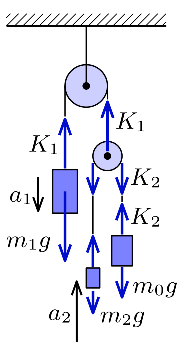
Az egyenletrendszer megoldásához szükségünk van még egy egyenletre. A csigákon átvetett fonál nyújthatatlansága kapcsolatot teremt az a_1 és a_2 gyorsulások között. Ahogy az a 2. ábrán látható, ha a bal oldali test (és ezzel együtt a mozgócsiga) x távolsággal mozdul el felfelé, akkor a fonál a mozgócsiga mindkét oldalán x-szel lesz rövidebb, ezért a maradék fonálrész $2x$-szel lesz hosszabb. A 2-es test elmozdulása tehát minden pillanatban kétszer akkora, mint az 1-es testé, ezért ugyanez az arány a sebességek és a gyorsulások között is, tehát:

(4) $$a_2 = 2a_1\,.$$

Az (1)-(4) egyenletekből végül a következő eredményeket kapjuk:

$$a_1 = g\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}\,, \quad a_2 = 2g\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}\,.$$

F7. Ha általánosan állunk neki a feladat megoldásának, könnyen elbonyolódhat. Ehelyett induljunk ki abból, hogy az m_0 tömegű test állva marad, emiatt a hozzá csatlakozó kötélben $K_2 = m_0 g$ erő ébred. Mivel az ideális fonál minden pontjában ugyanakkora erő ébred, a mozgócsigát összesen $2K_2$ erő húzza lefelé, tehát $K_1 = 2K_2 = 2m_0 g$ erő húzza felfelé is (a súlytalan csigára jó közelítéssel igaz, hogy a rá ható erők eredője nulla).



A kötélerők ismeretében könnyen felírhatjuk a mozgó testekre a dinamika alapegyenletét:

(1) $$m_0 g - m_2 g = m_2 a_2\,,$$

(2) $$m_1 g - 2m_0 g = m_1 a_1\,.$$

A gyorsulások közötti kapcsolat (a kényszerfeltétel) az m_1 és m_2 tömegű testek elmozdulásainak vizsgálatából határozható meg (lásd az **F6.** feladatot), az eredmény a mozgócsigánál szokásos $a_2 = 2a_1$.

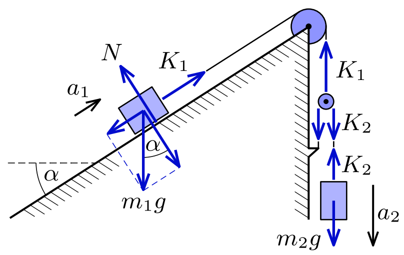
Az 1-es test gyorsulása a (2) egyenletből közvetlenül meghatározható és $a_1 = g/2$-nek adódik. Ezt visszahelyettesítve az (1) egyenletbe kapjuk az $m_2 = 0{,}5$ kg eredményt.

F8. Az alábbi *ábrán* felrajzoltuk a testekre ható erőket. Felhasználtuk, hogy a fonalak minden pontjában ugyanakkora erő ébred: az állócsigán átvetett fonálban K_1, a mozgócsigán átvetett fonálban K_2. A gyorsulás irányát (adatok hiányában) csak feltételezhetjük, így a két testre a dinamika alapegyenlete fonálirányban:

(1) $$K_1 - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1\,,$$

(2) $$m_2 g - K_2 = m_2 a_2\,.$$

Ez eddig két egyenlet négy ismeretlennel (K_1, K_2, a_1 és a_2). Felírhatnánk még az 1-es test lejtőre merőleges mozgásegyenletét, az azonban egy új ismeretlent (az N kényszererőt) hozna be, tehát nem nyernénk semmit.



Az ideális mozgócsigára is felírhatjuk Newton II. törvényét, ami $m_{\text{csiga}} \approx 0$ miatt a $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$-ra egyszerűsödik:

(3) $$K_1 - 2K_2 = 0\,.$$

Az utolsó egyenletünk a kényszerfeltételből adódik: a fonalak nyújthatatlanságát felhasználva összefüggést állapíthatunk meg a testek elmozdulásai között. Ebből végül a mozgócsigánál szokásos

(3) $$a_2 = 2a_1$$

összefüggés adódik (lásd még az **F6.** és **F7.** feladatokat).

Az (1)-(4) egyenletek már megoldhatók, eredményül

$$a_1 = g\frac{2m_2 - m_1\sin\alpha}{4m_2 + m_1}\,, \quad a_2 = 2g\frac{2m_2 - m_1\sin\alpha}{4m_2 + m_1}$$

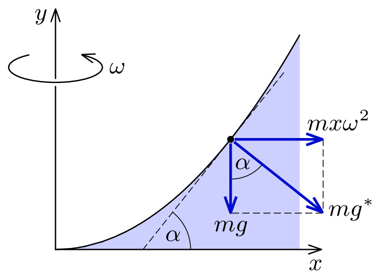
adódik. Látszik, hogy ha $2m_2 > m_1 \sin\alpha$, akkor a gyorsulások az *ábrán* feltüntetett irányúak, egyébként pedig ellentétesek.

F9. $A = \frac{g}{\tan\alpha + (M/m)\cot\alpha}$, $a = \frac{g}{1+(M/m)\cot^2\alpha}$.

F12. $A = \frac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$

F15. *a)* $\alpha = 2\arctan(a/g)$, *b)* $\alpha = \arctan(a/g)$

F18. Tekintsük a tartállyal együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a forgástengelytől x távolságra elhelyezkedő, kicsiny (m tömegű) folyadékdarabkát a a folyadék felszínén! Erre a darabkára az mg nehézségi erő, a forgástengellyel ellentétesen mutató $mx\omega^2$ centrifugális erő és a többi folyadékrésztől származó erő hat. Az előbbi két erő vektori összege olyan, mintha lokálisan egy effektív mg^* nehézségi erő hatna a folyadékdarabkára, a folyadék felszíne tehát itt ennek irányára merőlegesen fog elhelyezkedni.



Az *ábra* segítségével a folyadékfelszín adott pontbeli érintősíkjának vízszintessel bezárt α szöge kifejezhető:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x\omega^2}{g}\,.$$

A bal oldalon álló, x-szel arányos mennyiség éppen az $y(x)$ függvény meredeksége, ezért maga a függvény $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$ alakú, amint arról deriválással meggyőződhetünk.