Kalkulus

Sáfár Orsolya

Komplex számok

Komplex számsík

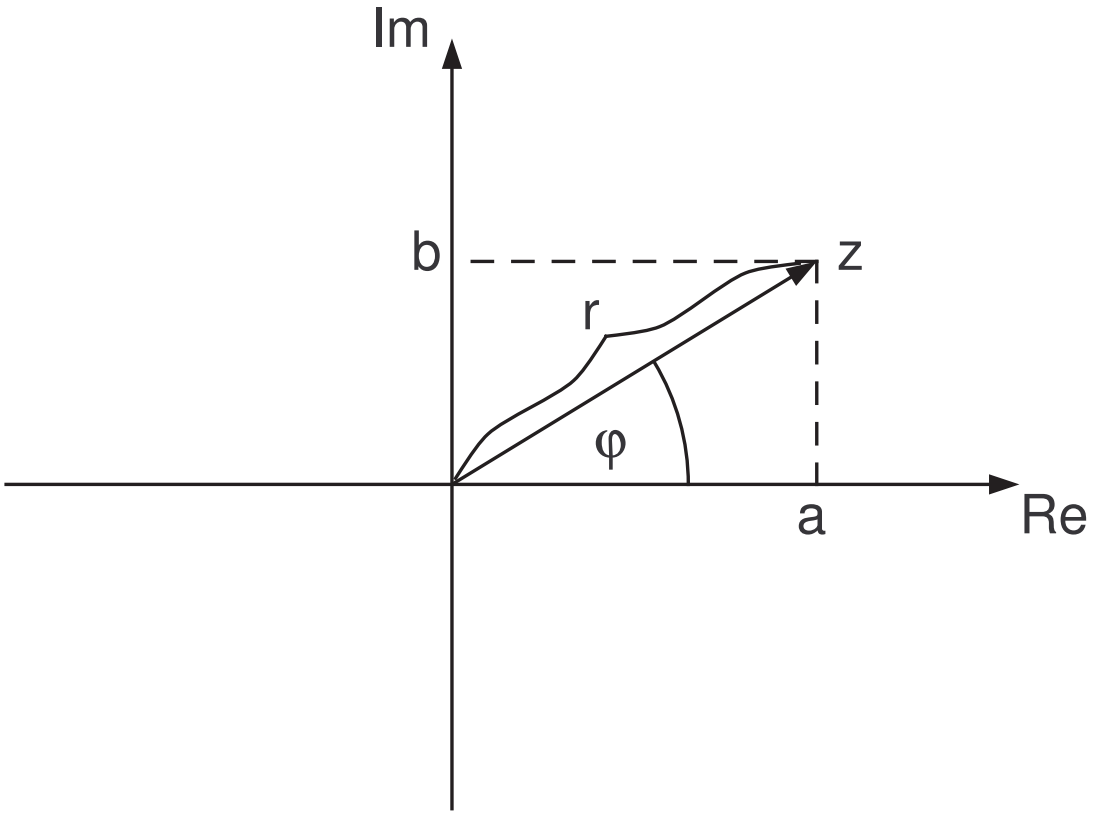
A komplex számok a valós számok természetes kiterjesztése, annak érdekében, hogy a gyökvonás művelete elvégezhető legyen a negatív számok körében is.

Vegyük tehát hozzá az eddig megszokott valós számokhoz a $\sqrt{-1}$-et, és jelöljük el ezt az új számot i-vel. A komplex számok a valós számok és ezen i valahányszorosának összegei.

A komplex számokat legegyszerűbben a komplex számsíkon képzelhetjük el, mint vektorokat. Minden komplex szám megfelel egy az origóból az adott pontba mutató vektornak.

A komplex számsík két tengelyét valós, illetve képzetes tengelynek nevezzük, egy z komplex szám koordinátáit pedig a komplex szám valós illetve képzetes részének (jelölésük: $\mathrm{Re} z = a$, illetve $\mathrm{Im} z = b$).

Komplex számok algebrai alakja



Ezek alapján minden szám megegyezik a tengelyekre eső vetületeinek összegével: $z = a + ib$. Ezt az alakot nevezzük algebrai alaknak.

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok körében értelmezett a négy alapművelet. Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$ illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

A szorzás elvégzéséhez kicsit számolnunk kell:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Alapműveletek komplex számokkal - Osztás

Az osztás elvégzése algebrai alakban kicsit nehézkes, de ki lehet szedni a nevezőből a képzetes számot a gyöktelenítéshez hasonló módon.

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 - i^2 b_1 b_2 + -ia_1 b_2 + ib_1 a_2}{{a_2}^2 - (ib_2)^2} =$$

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + i\frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Példák

Példa: Számítsuk ki a $3+6i$ és a $4+7i$ számok szorzatát!

$$(3+6i)(4+7i) = 12 + 42i^2 + 24i + 21i = -30 + 45i$$

Példa 2: Számítsuk ki a $2+3i$ és a $4-2i$ számok hányadosát!

$$\frac{2+3i}{4-2i} = \frac{2+3i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{8-6+i(4+12)}{4^2+2^2} = \frac{2+16i}{20} = \frac{1}{10} + i\frac{4}{5}$$

Komplex szám trigonometrikus alakja

Egy komplex szám origótól vett távolságát nevezzük a szám abszolútértékének (jele r vagy $|z|$), a valós tengely pozitív felével bezárt szögét pedig a komplex szám szögének (jele: φ). Ezen mennyiség segítségével a fenti $z = a + ib$ alak helyett használhatjuk az

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrikus alakot is, mivel $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ illetve $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ definíció szerint.

Egy $z = a + ib$ komplex szám konjugáltján a $a - ib$ komplex számot értjük. Jele: $\overline{z}$. A konjugálttal kifejezve $z\overline{z} = r^2$, illetve $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$

Alapműveletek komplex számokkal - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám.

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Alapműveletek komplex számokkal - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Példa

Számítsuk ki a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ és a $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ számok szorzatát!

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=8i$$

Alapműveletek komplex számokkal - Hatványozás

A hatványozás nem szokás $a + ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n = (a + ib)^n$$

kifejezés csak a binomiális tétellel bontható ki, addig

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

igen könnyen számolható.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 16-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Írjuk át trigonometrikus alakra a számot.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Ezután

$$z^{16} = \sqrt{2}^{16} \left(\cos\left(\frac{112\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{112\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2^8(\cos(28\pi) + i\sin(28\pi)) = 2^8(\cos(0) + i\sin(0)) = 256$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

ahol $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Ezt a képletet úgy kell érteni, hogy minden komplex számnak n darab n-edik gyöke van, és ezeket úgy kell kiszámolni, hogy a fenti képletbe be kell helyettesíteni a k értékeket (mind az n darabot), és ami kijön, az az n db n-edik gyök.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. Innen:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$, azaz a három gyök:

- k=0-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
- k=1-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right)$
- k=2-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)$

Másodfokú egyenletek megoldása

A jó hír, hogy működik a másodfokú egyenlet már megismert megoldóképlete, azaz a

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

megoldja az $az^2 + bz + c = 0$ egyenletet. Ennek a komplex számok körében mindig 2 gyöke van (multiplicitással számolva). Csak a szorzást, osztást és gyökvonás komplex értelemben kell vennünk.

A gyökök ismeretében a gyöktényező alak:
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Példa

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

A gyökök felhasználásával a gyöktényezős alak:
$(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

És valóban a másodfokú kifejezés egy felbontását kapjuk, hiszen
$(x+1-i)(x+1+i) = x^2+x(1+i+1-i)+(1-i)(1+i) = x^2+2x+2$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három, ugyanis $\sqrt[3]{8}$ komplex értelemben 3 szám.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba: $8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$. Innen a köbgyökök:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$. Innen a megoldások:
$z_1 = 2$
$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$
$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, a képzetes részre vonatkozó egyenlet $b = 1$. Ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + \sqrt{1 + a^2} = 3$. Innen:

$$\sqrt{1 + a^2} = 3 - a$$

A megoldáshoz nincs más választásunk, mint mindkét oldalt négyzetre emelni.

Példa - folyt.

Vigyázunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ezért a kapott gyököket ellenőriznünk kell!

$$\sqrt{1+a^2} = 3 - a$$

$$1 + a^2 = 9 - 6a + a^2$$

$$6a = 8$$

Ellenőrizzük a $a = \frac{4}{3}$ gyököt!

$$\frac{4}{3} + \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3,$$

azaz nem hamis gyök a $\frac{4}{3}$. Innen az eredeti egyenlet megoldása: $\frac{4}{3} + i$.