Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2001. május 3.

1. Legyen G egy egyszerű páros gráf és jelölje A a G szomszédsági mátrixát. Mutassuk meg, hogy ha G-ben nincs teljes párosítás, akkor $\det A = 0$!
2. Oldjuk meg a $6x \equiv 9 \pmod{15}$ kongruenciát!
3. Mi az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) az alábbi számnak:

$$1997^{2001^{2005}}$$

4. Határozzuk meg az összes olyan m természetes számot és p prímszámot, melyekre $\varphi(m) = \varphi(pm)$ teljesül!
5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $p > 5$ prímszám az 1, 11, 111, 1111, ... számok közül végtelen soknak osztója!
6. Legyen a valós számok halmazán $a{*}b = ab + a + b$. Vizsgáljuk meg, hogy ez a művelet asszociatív-e, kommutatív-e, van-e neutrális eleme (más néven egységeleme) és hogy invertálható-e.
7. Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje + a modulo 2 összeadást, azaz legyen $a_1a_2...a_n + b_1b_2...b_n = c_1c_2...c_n$ ha $c_i \equiv a_i + b_i \pmod 2$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Álljon H_2 azokból a 0-1 sorozatokból, amelyekben az egyesek száma kettővel osztható, H_3 pedig azokból, amelyekben az egyesek száma hárommal osztható. Az előbb definiált művelettel csoport-e H_2? Csoport-e H_3?
8. Igazoljuk, hogy egy csoport nem állhat elő mint két valódi részcsoportjának uniója!

by Janó