Példa 1. A majom és banán problémája

Egy majom ketrecében mennyezetről egy banánt lógatnak. Kézzel elérni lehetetlen, viszont egy faládát be is tesznek. Eléri-e a majom a banánt ?

Mit tudunk a majom képességeirõl ? Használjuk a következõ predikátumokat:
Elérheti (x, y) - ‘x’ az ‘y’-t
Ügyes (x)
Közelvan(x,y) - ‘x’ az ‘y’-hez
Rálép(x,y) - ‘x’ az ‘y’-ra
Alattavan(x,y) - ‘x’ az ‘y’ alatt van
Magas (x)
Szobabanvan (x)
Oda-teheti (x, y, z) - ha ‘y’ a ‘z’ közelében van
Felmászhat (x, y) - ‘x’ az ‘y’-ra

Akkor a teljes történet elsõrendű logikában lehetne pl.:
1. *Szobabanvan (Banán)*
2. *Szobabanvan (Faláda)*
3. *Szobabanvan (Majom)*
4. *Ügyes (Majom)*
5. *Magas (Faláda)*
6. *Oda-teheti (Majom, Faláda, Banán)*
7. *Felmászhat (Majom, Faláda)*
8. $\neg$ *Közelvan (Banán, Padló)*
9. $\forall x\ \forall y$ *Felmászhat (x, y)* $\rightarrow$ *Rálép (x, y)*
10. $\forall x\ \forall y$ *Ügyes (x)* $\wedge$ *Közelvan (x, y)* $\rightarrow$ *Elérheti (x, y)*
11. $\forall x\ \forall y$ *Rálép (x, y)* $\wedge$ *Alattavan (y, Banán)* $\wedge$ *Magas (y)* $\rightarrow$ *Közelvan (x, Banán)*
12. $\forall x\ \forall y\ \forall z$ *Szobabanvan (x)* $\wedge$ *Szobabanvan (y)* $\wedge$ *Szobabanvan (z)* $\wedge$ *Oda-teheti (x, y, z)* $\rightarrow$ *Közelvan (z, Padló)* $\wedge$ *Alattavan (y, z)*
13. *Elérheti (Majom,Banán)* ?

<u>A megoldás:</u> Először a klózzá való átalakítás:

1. Szobabanvan (Banán)
2. Szobabanvan (Faláda)
3. Szobabanvan (Majom)
4. Ügyes (Majom)
5. Magas (Faláda)
6. Oda-teheti (Majom, Faláda, Banán)

7. Felmászhat (Majom, Faláda)
8. ¬ Közelvan (Banán, Padló)
9. ¬ Felmászhat (x1, y1) ∨ Rálép (x1, y1)

10. ¬ Ügyes (x2) ∨ ¬ Közelvan (x2, y2) ∨ Elérheti (x2, y2)
11. ¬ Rálép (x3, y3) ∨ ¬ Alattavan (y3, Banán) ∨ ¬ Magas (y3) ∨ Közelvan (x3, Banán)
12. ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (y4) ∨ ¬ Szobabanvan (z1) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, y4, z1) ∨ Közelvan (z1, Padló) ∨ Alattavan (y4,z1)
13. ¬ Elérheti (Majom,Banán)

És <u>egy lehetséges</u> rezolúciós bizonyítás:

10. + 13. x2/Majom, y2/Banán eredménye:
14. ¬ Ügyes (Majom) ∨ ¬ Közelvan (Majom, Banán)
14. + 4. eredménye:
15. ¬ Közelvan (Majom, Banán)
15. + 11. x3/Majom eredménye:
16. ¬ Rálép (Majom, y3) ∨ ¬ Alattavan (y3, Banán) ∨ ¬ Magas (y3)
16. + 12. y4/y3, z1/Banán eredménye:
17. ¬ Rálép (Majom, y3 ∨ ¬ Magas (y3 ∨ ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (y3 ∨ ¬ Szobabanvan (Banán) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, y3 Banán) ∨ Közelvan (Banán, Padló)
17. + 8. eredménye:
18. ¬ Rálép (Majom, y3)∨ ¬ Magas (y3)∨ ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (y3)∨ ¬ Szobabanvan (Banán) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, y3,Banán)
18. + 9. x1/Majom, y1/y4 eredménye:
19 ¬ Magas (y4) ∨ ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (y4) ∨ ¬ Szobabanvan (Banán) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, y4, Banán) ∨ ¬ Felmászhat (Majom, y4)
19. + 7. y4/ Faláda eredménye:
20. ¬ Magas (Faláda) ∨ ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (Faláda) ∨ ¬ Szobabanvan (Banán) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, Faláda, Banán)
20. + 1. eredménye:
21. ¬ Magas (Faláda) ∨ ¬ Szobabanvan (x4) ∨ ¬ Szobabanvan (Faláda) ∨ ¬ Oda-teheti (x4, Faláda, Banán)
21. + 2. eredménye:
22. ¬ Magas (Faláda) ∨ ¬ Szobabanvan (x4)∨ ¬ Oda-teheti (x4, Faláda, Banán)
22. + 6. x4/Majom eredménye:
23. ¬ Magas (Faláda) ∨ ¬ Szobabanvan (Majom)
23. + 3. eredménye:
24. ¬ Magas (Faláda)
24. + 5. eredménye:
25. [] üres rezolvens, azaz a kérdéses 13. állítás igaz !

Példa 2. János és a tantárgyai

Írjuk át az alábbi mondatokat predikátum kalkulus állításaira, majd klóz formára, és bizonyítsuk be rezolúciós bizonyítással a kérdéses állítást! Figyelem: ha a predikátumnevek adott megválasztása mellett a bizonyítással gond van, kíséreljék meg a feladatot más, de jellegre helyes predikátumok felhasználásával a logikai szinten átfogalmazni!

János csak könnyű tárgyakat kedvel.
Matematikai tárgyak nehezek.
A Kísérleti Kémia Tanszék tárgyai könnyűek.
"A kén vegyületei" a Kísérleti Kémia Tanszék egyik tárgya.
Milyen tárgyat kedvelne János ?

Egy lehetséges átírás:

$\forall x\ Könnyű(x) \rightarrow Kedvel(János, x)$
$\forall x\ Matematikai(x) \rightarrow \neg Könnyű(x)$
$\forall x\ KísérletiKémiaTanszék(x) \rightarrow Könnyű(x)$
$KísérletiKémiaTanszék(A\text{-}kén\text{-}vegyületei)$
$\exists x\ Kedvel(János, x)$ *igaz-e?*

Klózok:

a. $\neg Könnyű(x1) \vee Kedvel(János, x1)$
b. $\neg Matematikai(x2) \vee \neg Könnyű(x2)$
c. $\neg KísérletiKémiaTanszék(x3) \vee Könnyű(x3)$
d. $KísérletiKémiaTanszék(A\text{-}kén\text{-}vegyületei)$
e. $\neg Kedvel(János, x4)$

Rezolúció:

f.	a+e:	x1/x4	$\neg Könnyű(x4)$
g.	f+c:	x3/x4	$\neg KísérletiKémiaTanszék(x4)$
h:	g+d:	x4/ *A-kén-vegyületei*	*[]*

A válasz a behelyettesítésből: igenis létezik egy tárgy, amit János kedvel és történetesen ez a *"A kén vegyületei"* tárgy.

Példa 3. Egy absztrakt feladat

Adott állításhalmaz alapján döntsék el rezolució alkalmazásával (de elõbb az állításokat klóz formára hozzák), hogy igaz-e az '$A(b)$' állítás ?

1. $\forall x\, ((H(x) \vee C(x)) \rightarrow \neg E(x))$
2. $\forall x\, (B(x) \rightarrow A(x))$
3. $\neg F(a) \rightarrow C(a) \vee C(b)$
4. $\forall x\, (D(x) \rightarrow E(x))$
5. $\forall x\, (\neg B(x) \rightarrow D(x))$
6. $\forall x\, ((J(x) \vee F(x)) \rightarrow G(x))$
7. $\neg G(a)$
8. $\neg C(a)$
9. Igaz-e, hogy $A(b)$??

A klózok:

1a. $\neg H(x1) \vee \neg E(x1)$
1b. $\neg C(x2) \vee \neg E(x2)$
2. $\neg B(x3) \vee A(x3)$
3. $F(a) \vee C(a) \vee C(b)$
4. $\neg D(x4) \vee E(x4)$
5. $B(x5) \vee D(x5)$
6a. $\neg J(x6) \vee G(x6)$
6b. $\neg F(x7) \vee G(x7)$
7. $\neg G(a)$
8. $\neg C(a)$
9.) $\neg A(b)$

és a rezolúció:

10. 2 + 9. ---- x3/b ------ $\neg B(b)$
11. 10. + 5. ---- x5/b ------ $D(b)$
12. 11. + 4. ---- x4/b ------ $E(b)$
13. 12. + 1b. ---- x2/b ------ $\neg C(b)$
14. 13. + 3. ---------- $F(a) \vee C(a)$
15. 14. + 8. ---------- $F(a)$
16. 15. + 6b. ---- x7/a ------ $G(a)$
17. 16. + 7. --------- *[]*

tehát a kérdéses állítás igaz.

Példa 4. Beszél-e Fernandó portugálul?

A relevancia alapú tanulásnál egy általános háttértudásból (hogy egy országban a nép egy nyelvet beszél – a. állítás) és a megfigyelt konkrét esetből (hogy a Fernandó nevű brazil bennszülött portugálul beszél – b. állítás) meg lehet tanulni (valójában logikailag kikövetkeztetni), hogy Brazília nyelve portugál. (c. állítás). Legyen tehát:

a. $\forall x, y, n, l \;\; Nemzetisége(x, n) \wedge Nemzetisége(y, n) \wedge Nyelve(x, l) \rightarrow Nyelve(y, l)$
b. $Nemzetisége(Fernandó, Brazil) \wedge Nyelve(Fernandó, Portugál)$
c. $\forall x \;\; Nemzetisége(x, Brazil) \rightarrow Nyelve(x, Portugál)$

Az állításokat alakítsa át klóz formára és rezolúcióval lássa be, hogy a c. állítás következik az a. és b. állításból.

Megoldás (alkalmas rövidítésekkel):
a. $\forall x, y, n, l \;\; N(x,n) \wedge N(y,n) \wedge Ny(x,l) \rightarrow Ny(y,l)$
b. $N(F, B) \wedge Ny(F, P)$
c. $\forall x \;\; N(x,B) \rightarrow Ny(x,P)$ *igaz-e ???*

A kérdéses állítást negálni kell (vigyázz, itt az egész állítást negálni kell, a negálás kívűl esik az implikációnak, ez nem az implikáció átirásából adódó negálás. Ez még csak jön később):

a. $\forall x, y, n, l \;\; N(x,n) \wedge N(y,n) \wedge Ny(x,l) \rightarrow Ny(y,l)$
b. $N(F, B) \wedge Ny(F, P)$
c. $\neg (\; \forall x \;\; N(x,B) \rightarrow Ny(x,P) \;)$

klózformára való átalakításnál
az a. állítás a premissza negálása miatt egyetlen egy klózzá alakul át:
$\neg N(x1,n) \vee \neg N(y1,n) \vee \neg Ny(x1,l) \vee Ny(y1,l)$

a b. állításból, konjunkció miatt, két klóz lesz:
$N(F, B)$
$Ny(F, P)$

a c. állításnál a negálás befelé tolása megváltoztatja a kvantor jellegét (egzisztenciális), ami egyrészt skolemizáláshoz vezet, másrészt a konjunkció miatt ez is két klózzá esik szét:

$\neg(\forall x \;\; Nemzetisége(x, Brazíl) \rightarrow Nyelve(x, Portugál))$
$\neg(\forall x \;\; \neg Nemzetisége(x, Brazíl) \vee Nyelve(x, Portugál))$
$\exists x \;\; \neg (\neg Nemzetisége(x, Brazíl) \vee Nyelve(x, Portugál))$
$\exists x \;\; Nemzetisége(x, Brazíl) \wedge \neg Nyelve(x, Portugál)$
$Nemzetisége(\sigma, Brazíl)$
$\neg Nyelve(\sigma, Portugál)$ *ahol* σ *egy Skolem konstans*

$N(\sigma,B)$
$\neg Ny(\sigma,P)$

és most a rezolúció:

N(F,B) –ből és
¬ N(x1,n) ∨ ¬N(y1,n) ∨ ¬Ny(x1,l) ∨ Ny(y1,l) -ből
-------- x1/F, n/B behelyettesítéssel
lesz:
¬N(y1,B) ∨ ¬Ny(F,l) ∨ Ny(y1,l) –ből és
Ny(F, P) - ből
--------- l/P behelyettesítéssel
lesz:
¬N(y1,B) ∨ Ny(y1,P) –ből és
¬Ny(σ, P) -ből
---------- y1/σ behelyettesítéssel
lesz:
¬N(σ,B) –ből és
N(σ,B) -ből
----
lesz:
[]

Példa 5. Okos fejnek egy jó példa is elég

Az egy, de jó példa alapján tanuló ősember megtanulta a kezét a zsákmányát nyárson sütve kímélni. Modellezzük a tudását a következőképpen:

∀x Kéz(x) ∧ TávolTűztől(x) → NemFáj(x)
∀x Hús(x) ∧ ¬TávolTűztől(x) → MegSül(x)
∀x,y Hús(x) ∧ Kéz(y) ∧ NyársonTart(x,y) → TávolTűztől(y) ∧ ¬TávolTűztől(x)

Tudjuk persze azt is, hogy:

Hús(Gyík)
Kéz(Kezem)
NyársonTart(Gyík,Kezem)

Vajon eléri-e az áhitott eredményt, azaz, hogy:

MegSül(Gyík) ∧ NemFáj(Kezem) igaz lesz-e ??

A kérdéses állítás igaz értékét rezolúciós bizonyítással lássa be.

Megoldás:

a. $\forall x\ Kéz(x) \wedge TávolTűztől(x) \rightarrow NemFáj(x)$

b. $\forall x\ Hús(x) \wedge \neg TávolTűztől(x) \rightarrow MegSül(x)$

c. $\forall x,y\ Hús(x) \wedge Kéz(y) \wedge NyársonTart(x,y) \rightarrow TávolTűztől(y) \wedge \neg TávolTűztől(x)$

d. $Hús(Gyík)$

e. $Kéz(Kezem)$

f. $NyársonTart(Gyík,Kezem)$

g. $\neg (MegSül(Gyík) \wedge NemFáj(Kezem))$ a kérdés negáltja

a. $\neg Kéz(x1) \vee \neg TávolTűztől(x1) \vee NemFáj(x1)$

b. $\neg Hús(x2) \vee TávolTűztől(x2) \vee MegSül(x2)$

c1. $Hús(x3) \vee Kéz(y1) \vee NyársonTart(x3,y1) \vee TávolTűztől(y1)$

c2. $Hús(x4) \vee Kéz(y2) \vee NyársonTart(x4,y2) \vee \neg TávolTűztől(x4)$

d. $Hús(Gyík)$

e. $Kéz(Kezem)$

f. $NyársonTart(Gyík,Kezem)$

g. $\neg MegSül(Gyík) \vee \neg NemFáj(Kezem)$

Az d., e., f., és sorra c1. és c2. alapján azt kapjuk (megfelelő behelyettesítéssel), hogy

h1. $TávolTűztől(Kezem)$

h2. $\neg TávolTűztől(Gyík)$

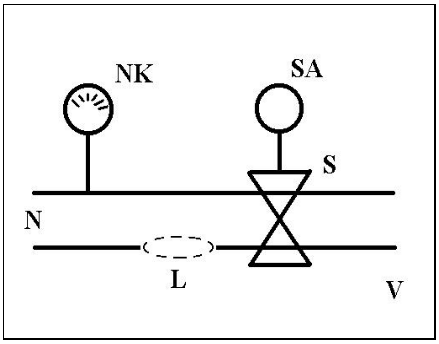
A d., e., h1., h2., a., b. alapján viszont, hogy:

i. $NemFáj(Kezem)$

j. $MegSül(Gyík)$

Az i., j., g. alapján: üres rezolvens

Példa 6. Egy kis háztartási munka



Modellezzünk egy egyszerű csőrendszert az alábbiak szerint: *Ha nyomás van, szelep nyítva és lyuk nincs, akkor vízes a padló (*$\textbf{Nyomás} \wedge \textbf{Szelep} \wedge \neg\textbf{Lyuk} \rightarrow \textbf{Víz}$*). Ha nyomás van, szivarog a cső, akkor vízes a padló (*$\textbf{Nyomás} \wedge \textbf{Lyuk} \rightarrow \textbf{Víz}$*). Ha a nyomáskijelző nyomást mutat és kijelző nem rossz, akkor nyomás van (*$\textbf{NyomásKijelző} \wedge \neg\textbf{NyomásKijelzőRossz} \rightarrow \textbf{Nyomás}$*). Ha a szelepálláskijelző nyított szelepet mutat és a szelepálláskijelző nem rossz, akkor szelep nyítva van (*$\textbf{SzelepÁllásKijelző} \wedge \neg\textbf{SzelepÁllásKijelzőRossz} \rightarrow \textbf{Szelep}$*).*
Legyen a konkrét megfigyelés az, hogy: *nyomás van (***Nyomás***), nyomáskijelző nyomást mutat (***NyomásKijelző***), szelepálláskijelző nyított szelepet mutat (***SzelepÁllásKijelző***), és a padló nem vizes (*$\neg$**Víz***).* Bizonyítsuk be (**rezolucióval**!), hogy igaz az a sejtés, hogy a szelepálláskijelző rossz!

a. $\textit{Nyomás} \wedge \textit{Szelep} \wedge \neg\textit{Lyuk} \rightarrow \textit{Víz}$
b. $\textit{Nyomás} \wedge \textit{Lyuk} \rightarrow \textit{Víz}$
c. $\textit{NyomásKijelző} \wedge \neg\textit{NyomásKijelzőRossz} \rightarrow \textit{Nyomás}$
d. $\textit{SzelepÁllásKijelző} \wedge \neg\textit{SzelepÁllásKijelzőRossz} \rightarrow \textit{Szelep}$
e. ***Nyomás***
f. ***NyomásKijelző***
g. ***SzelepÁllásKijelző***
h. $\neg\textit{Víz}$
i. ***SzelepÁllásKijelzőRossz*** igaz-e ??

Alkalmas rövidítésekkel:

a. $N \wedge S \wedge \neg L \rightarrow V$
b. $N \wedge L \rightarrow V$
c. $NK \wedge \neg NKR \rightarrow N$
d. $SAK \wedge \neg SAKR \rightarrow S$
e. N
f. NK
g. SAK
h. $\neg V$

A kérdés negálva:
i. $\neg SAKR$

A klózok:

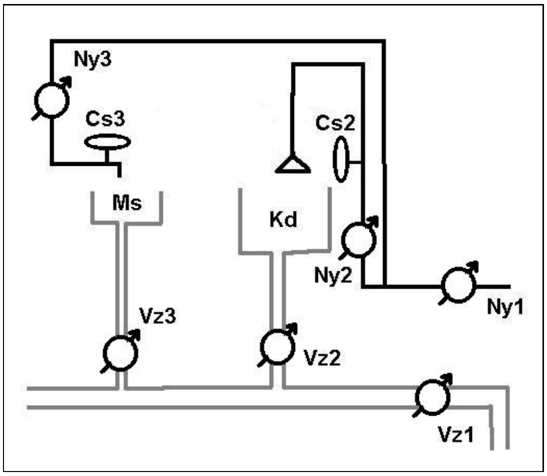
a. $\neg N \vee \neg S \vee L \vee V$
b. $\neg N \vee \neg L \vee V$
c. $\neg NK \vee NKR \vee N$
d. $\neg SAK \vee SAKR \vee S$
e. N f. NK
g. SAK h. $\neg V$

A kérdés negálva: i. $\neg SAKR$

A rezolúció:

j. = a. + e. + h. = $\neg S \vee L$
k. = b. + e. + h. = $\neg L$
l. = j. + k. = $\neg S$
m. = d. + g. + i. = S
n. = l. + m. = *üres rezolvens*

Példa 7. Egy kis háztartási munka/2



Modellezzünk az otthoni vízvezetékrendszer egy részletét az alábbiak szerint: x-csap nyitva: **Csx,** nyomás van x-ben: **Nyx**, víz folyik x-ben: **Vzx.**
Szokásos köznapi tudásunk lehetőséget teremt felírni, hogy:

$Vz2 \vee Vz3 \rightarrow Vz1$

$Ny1 \rightarrow Ny2 \wedge Ny3$

$Ny2 \wedge Cs2 \rightarrow Vz2$

$Ny3 \wedge Cs3 \rightarrow Vz3$

Legyen a konkrét megfigyelés az, hogy: *Ny1* van, a *Vz1* nem folyik és *Cs3* le van zárva. Bizonyítsuk be (<u>rezolúció</u>!), hogy igaz az a sejtés, hogy a *Cs2* szelep is zárva van!

(vagy pedig, hogy *Cs2* le van zárva és bizonyítsuk be, hogy igaz az a sejtés, hogy a *Cs3* szelep is zárva van)

1. $Vz2 \vee Vz3 \rightarrow Vz1$
2. $Ny1 \rightarrow Ny2 \wedge Ny3$
3. $Ny2 \wedge Cs2 \rightarrow Vz2$
4. $Ny3 \wedge Cs3 \rightarrow Vz3$
5. $Ny1$
6. $\neg Vz1$
7. $\neg Cs3$
8. $\neg Cs2$ (a kérdés a *Cs2* értéke, a rezolúcióhoz negálva kell felvenni)

1a. $\neg Vz2 \vee Vz1$
1b. $\neg Vz3 \vee Vz1$
2a. $\neg Ny1 \vee Ny2$
2b. $\neg Ny1 \vee Ny3$
3. $\neg Ny2 \vee \neg Cs2 \vee Vz2$
4. $\neg Ny3 \vee \neg Cs3 \vee Vz3$
5. $Ny1$
6. $\neg Vz1$
7. $\neg Cs3$
8. $\neg Cs2$

Már egy rápillantás is elég, hogy megállapitsuk, hogy ebből az állításhalmazból soha nem jön ki az üres rezolúció (az állítás halmaz ellentmondásassága nem dönthető el). Azonban a feladat a *Cs2* értéke, azaz vagy a *Cs2* ítéletállítás logikai értéke, vagy a $\neg Cs2$ ítéletállítás logikai értéke, hiszen mindegyik változatnak úgyananyi az információ értéke. Ha a kérdés a $\neg Cs2$, akkor negálva *Cs2* és most már a rezolúció menni fog.

$8'.\ Cs2$

$1a. + 6 = 7:$ $\neg Vz2$

$1b. + 6 = 8:$ $\neg Vz3$

$2a. + 5 = 9:$ $Ny2$

$2b. + 5 = 10:$ $Ny3$

$3. + 7 + 2a = 11:$ $\neg Cs2$

$8' + 11 = 12:$ üres

(tehát *Cs2* hamis, abból kifolyólag ¬*Cs2* igaz, a csap zárva van)

A feladat másik változatában a helyzet ugyanaz (mert a fizikai rendszer a *Cs2*, *Cs3* csapokra szimmetrikus, így annak a logikai leírása is), csupán a *Cs2* és a *Cs3* szerepet cserél.

Példa 8. Egy kis háztartási munka/3

Minden asztal egyben butor is. Következik belőle, hogy ha valami az asztalon van, akkor a butoron is van. Írjuk le mindkét állítást elsőrendű logikávak: *Asztal(x)*, *Rajtavan(y, x)* és *Butor(x)* predikátumokat felhasználva. A konkluziót tagadva lássuk be rezoluciós bizonyítással, hogy a konkluzió helyes.

Megoldás:

$\forall x\ Asztal(x) \rightarrow Butor(x)$

$\neg(\forall x\ \forall y\ ((Asztal(x) \wedge Rajtavan(y,x)) \rightarrow (Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x))))$

Klózok:

1. $\neg Asztal(x1) \vee Butor(x1)$
2. $\neg(\forall x \forall y\ ((Asztal(x) \wedge Rajtavan(y,x)) \rightarrow (Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x))))$

   $\neg(\forall x \forall y\ ((\neg(Asztal(x) \wedge Rajtavan(y,x)) \vee (Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x))))$

   $\exists x \neg \forall y\ ((\neg Asztal(x) \vee \neg Rajtavan(y,x)) \vee (Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x)))$

   $\exists x \exists y\ \neg((\neg Asztal(x) \vee \neg Rajtavan(y,x)) \vee (Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x)))$

   $\exists x \exists y\ \neg(\neg Asztal(x) \vee \neg Rajtavan(y,x)) \wedge \neg(Butor(x) \wedge Rajtavan(y,x))$

   $\exists x \exists y\ (Asztal(x) \wedge Rajtavan(y,x)) \wedge (\neg Butor(x) \vee \neg Rajtavan(y,x))$

   $(Asztal(a) \wedge Rajtavan(b,a)) \wedge (\neg Butor(a) \vee \neg Rajtavan(b,a))$

azaz:

2a. $Asztal(a)$

2b. $Rajtavan(b,a)$

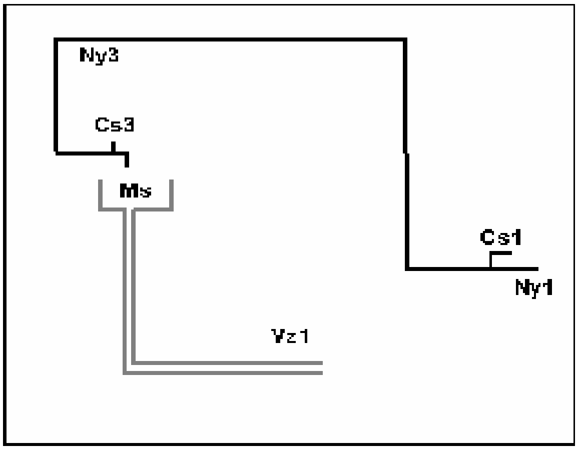
2c. $\neg Butor(a) \vee \neg Rajtavan(b,a)$ *ahol a és b Skolem konstansok*

és a rezolució:

3. $(1)+(2c) \Rightarrow \neg Asztal(a) \vee \neg Rajtavan(b,a)$

   x/a *azaz a egy 'butor'*
4. $(3)+(2a) \Rightarrow \neg Rajtavan(b,a)$
5. $(4)+(2b) \Rightarrow \square$

Példa 9. Egy kis háztartási munka/4



Modellezzünk a csőrendszer egy részletét az alábbiak szerint:

Nyitva(Cs1) $\wedge$ *NyomásVan(Ny1)* $\rightarrow$ *NyomásVan(Ny3)*
Nyitva (Cs3) $\wedge$ *NyomásVan(Ny3)* $\rightarrow$ *Telik(Ms)*
Telik(Ms) $\wedge$ $\neg$*Dugó(Ms)* $\rightarrow$ *Folyik(Vz1)*

Legyen a konkrét megfigyelés az, hogy: *Nyomás1* van, *Mosdó telik*, mind a *Cs1*, mind a *Cs3* szelep nyitva van, azonban a víz nem folyik: *Nyomás(Ny1), Telik(Ms), Nyitva(Cs1), Nyitva(Cs2),* $\neg$*Folyik(Vz1).* Bizonyítsuk be (rezolúcióval!), hogy igaz az a sejtés, hogy a mosdó el van dugaszolva!

1. *Nyitva(Cs1)* $\wedge$ *NyomásVan(Ny1)* $\rightarrow$ *NyomásVan(Ny3)*
2. *Nyitva (Cs3)* $\wedge$ *NyomásVan(Ny3)* $\rightarrow$ *Telik(Ms)*
3. *Telik(Ms)* $\wedge$ $\neg$*Dugó(Ms)* $\rightarrow$ *Folyik(Vz1)*
4. *Nyomás(Ny1)*
5. *Telik(Ms)*
6. *Nyitva(Cs1)*
7. *Nyitva(Cs2)*
8. $\neg$*Folyik(Vz1)*
9. $\neg$*Dugó(Ms)*   a kérdés

1. $\neg$*Nyitva(Cs1)* $\vee$ $\neg$*NyomásVan(Ny1)* $\vee$ *NyomásVan(Ny3)*
2. $\neg$*Nyitva (Cs3)* $\vee$ $\neg$*NyomásVan(Ny3)* $\vee$ *Telik(Ms)*
3. $\neg$*Telik(Ms)* $\vee$ *Dugó(Ms)* $\vee$ *Folyik(Vz1)*
4. *Nyomás(Ny1)*
5. *Telik(Ms)*
6. *Nyitva(Cs1)*
7. *Nyitva(Cs2)*
8. $\neg$*Folyik(Vz1)*
9. $\neg$*Dugó(Ms)*   A 3, 5, 8, 9 –ből három lépésben következik az üres rezolvens.

Példa 10. Egy kis kémia logikaiul

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll bizonyos mennyiségű MgO, H_2, O_2 és C. Tegyük fel, hogy a következő kémiai reakciókat biztosítani tudjuk:

a. $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$
b. $C + O_2 \rightarrow CO_2$
c $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

A helyzetet logikai apparátussal modellezve mutassuk meg rezolúciós bizonyítással, hogy elő tudunk állítani H_2CO_3-at !

Hogy a logikai feladatban a kémia tudása ne hasson ránk zavaróan nevezzük át a feladatban szereplő mennyiségeket:

MgO	A
H_2	B
O_2	C
C	D
Mg	E
H_2O	F
CO_2	G
H_2CO_3	H

Ezzel a feladvány állításai:

1. A
2. B
3. C
4. D
5. $A \wedge B \rightarrow E \wedge F$
6. $D \wedge C \rightarrow G$
7. $G \wedge F \rightarrow H$
8. $\neg H$

és klózai:

1. A
2. B
3. C
4. D
5. $\neg A \vee \neg B \vee E$
5. $\neg A \vee \neg B \vee F$
6. $\neg D \vee \neg C \vee G$
7. $\neg G \vee \neg F \vee H$
8. $\neg H$

amiből a rezolúciós bizonyítás elemi szinten végezhető el.

Példa 11. Egy fontos elvi kérdés

Tanult definíciók és a rezolúció működése alapján magyarázza meg, hogy egy érvényes állítás érvényes voltát hogyan lehet a rezolúciós bizonyítással kimutatni. Érvelését az alábbi állítás esetén ültesse át gyakorlatba:

a. $\forall\, x\, P(x) \rightarrow \exists\, x\, P(x)$

Megoldás:
Az érvényes állítás önmagában igaz, minden más ténytől függetlenül. Ez azt jelenti, hogy a rezolúciós bizonyításban az tudásbázis állításhalmazait használni nem kell, ez a rész üres, csakis a kérdés létezik, amit persze negáltjával kell figyelembe venni és rajta a rezolúciós lépéseket elvégezni.

Ha egy kielégíthető *A* állításról, amelyre feltehetően igaz, hogy: $TB \models A$
ki szeretnénk deríteni, hogy valójában a TB-ből levezethető-e, akkor meg kell kisérelni:

$$TB \cup \neg A \models ellentmondás$$

rezolúcióval levezetni.
Egy érvényes állítás esetén $TB = \varnothing$ (mert az állítás igaz volta mástól nem függ), azaz $\models A$.
Így szükséges belátni, hogy:

$$\neg A \models ellentmondás$$

levezethető-e?

A példában az a. állítás negálva:

$$\neg\ (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ P(x))$$

és klózzá alakítva:

$$\neg\ (\neg \forall x\ P(x) \vee \exists x\ P(x))$$
$$\neg\ (\exists x\ \neg P(x) \vee \exists x\ P(x))$$
$$\forall x\ P(x) \wedge \forall y\ \neg P(y)$$
$$P(x) \wedge \neg P(y)$$
$$a1.\ P(x)$$
$$a2.\ \neg P(y)$$

A rezolúciós lépés az a1. és az a2. klózok egy lépéses rezolválása *x/y* behelyettesítéssel, üres klózzá.

Példa 12. Egy fontos elvi kérdés/2

Tanult definíciók és a rezolúció működése alapján magyarázza meg, hogy egy érvényes állítás érvényes voltát hogyan lehet a rezolúciós bizonyítással kimutatni. Érvelését az alábbi állítás esetén ültesse át gyakorlatba:

a. $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$

Megoldás:

Az a. állítás negálva:

$\neg\ (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

és klózzá alakítva:

$\neg\ (\neg\forall x\, P(x) \vee \forall x\, P(x))$

$\neg\ (\exists x\ \neg P(x) \vee \forall x\, P(x))$

$\forall x\, P(x) \wedge \exists y\ \neg P(y)$

$P(x) \wedge \neg P(S)$ *S Skolem konstans*

a1. $P(x)$

a2. $\neg P(S)$

A rezolúciós lépés az a1. és az a2. klózok egy lépéses rezolválása x/S behelyettesítéssel, üres klózzá.

Példa 13. Egy fontos elvi kérdés/3

Mi a helyzet egy érvénytelen (kielégíthetetlen) *A* állítással? Mivel a negáltja egy érvényes állítás, azaz $\models \neg A$, negáltját negáltjából ki, azaz az eredeti állításból ki kell hozni az ellnetmondást!

Legyen példának a: a. $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$

Megoldás:

Klózalak:

$\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$

$\neg(\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))) \vee (\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x)))$

$\exists x\ \neg(P(x) \vee \neg P(x)) \vee (\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x)))$

$\exists x\, (\neg P(x) \wedge P(x)) \vee (\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x)))$

$(\neg P(Skolem) \wedge P(Skolem)) \vee (\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x)))$

$\forall x\, (\neg P(Skolem) \wedge P(Skolem)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\neg P(Skolem) \wedge P(Skolem)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\neg P(Skolem) \vee P(x)) \wedge (\neg P(Skolem) \vee \neg P(x)) \wedge (P(Skolem) \vee P(x)) \wedge (P(Skolem) \vee \neg P(x))$

a1. $\neg P(Skolem) \vee P(x1)$

a2. $\neg P(Skolem) \vee \neg P(x2)$

a3. $P(Skolem) \vee P(x3)$

a4. $P(Skolem) \vee \neg P(x4)$

és a rezolúcó:

a1. + a3. -ból, x1/x3 behelyettesítéssel:
$P(x1)$,
a2. + a4. -ból, x2/x4 behelyettesítéssel:
$\neg P(x2)$,
a kettőből x1/x2 behelyettesítéssel egy üres rezolvens