Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
1. zárthelyi dolgozat
2013. 03. 28. 8.15–9.45

Név: ______________________

Neptun kód: _____________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort. *(10 p.)*

Kifejtve a $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ determinánst a

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$.
Legyen $v_3 = (x, y, z)$ a λ_3 sajátvektora. A

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sajátérték egyenletből a

$$\left\{ \begin{matrix} -3x - y + 2z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{matrix} \right\}$$

lineárisan független egyenletek adódnak, melyek különbségéből $x = y$ következik.
Vagyis az egyenletrendszer egy megoldása $v_3 = (1, 1, 2)$.

2. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris leképezés, mely az origón átmenő, $v = (2, 1)$ irányvektorú egyenesre vetít. *(10 p.)*
   a. Írja fel az A leképezés mátrixát.
   b. Igazolja, hogy $A^2 = A$.

Jelölje e az origón átmenő, $v = (2, 1)$ irányvektorú egyenest. Az $u \in \mathbb{R}^2$ vektor e egyenesre vett vetületének a hossza: $h = \|u\| \cdot \cos\alpha$, ahol α az u és v vektor által bezárt szög, vagyis $h =< u, v > \cdot \dfrac{1}{\|v\|}$. Ekkor az u vektor e egyenes menti komponense:

$$u' = h \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot < u, v > \cdot v.$$

Vagyis az $u = (x, y)$ esetén

$$u' = \frac{1}{2^2 + 1^2} \cdot (2x + 1y) \cdot (2, 1) = \frac{1}{5} (4x + 2y, 2x + y),$$

amiből $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ adódik.

Az $A^2 = A$ egyrészt számolással egyszerűen adódik, másrészt pedig az A értelmezéséből következik, hiszen A vetítés.

3. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén van az *(10 p.)*

$$x + y + 2z = 2, \qquad x + 2y + 3z = 2, \qquad x + 3y + bz = a$$

egyenletrendszereknek nulla, pontosan egy, illetve végtelen sok megoldása?

Első lépésben az első egyenletet kivonva a másodikból és a harmadikból; majd második lépésben a második egyenlet kétszeresét kivonva a harmadikból az

$$\begin{cases} x + y + \quad 2z = 2 \\ \quad y + \quad z = 0 \\ \quad 2y + (b-2)z = (a-2), \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + \quad 2z = 2 \\ \quad y + \quad z = 0 \\ \quad (b-4)z = (a-2), \end{cases}$$

egyenletrendszerek adódnak. A $(b-4)z = (a-2)$ egyenlet alapján a
– $b = 4$, $a \neq 2$ esetben nincs megoldás;
– $b = 4$, $a = 2$ esetben végtelen sok megoldás van;
– $b \neq 4$ esetben pontosan egy megoldás van.

4. Legyen az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa *(10 p.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Adjon meg bázist A magterében.
b. Adjon meg bázist A képterében.

a. Legyen $v = (x, y, z) \in \operatorname{Ker} A$. Ekkor az $Av = 0$ egyenletből az

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer adódik. Mivel a második egyenlet az első kétszerese, illetve a harmadik az első háromszorosa, ezért csak egy lineárisan független egyenlet van

$$x + 2y - z = 0,$$

ami egy síknak (két dimenziós altérnek az) egyenlete. Ebben egy bázis

$$e_1 = (-2, 1, 0), \qquad e_2 = (1, 0, 1).$$

b. Mivel $\dim \operatorname{Ran} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathbb{R}^3$, ezért $\dim \operatorname{Ran} A = 1$.
Vagyis A képtere egy dimenziós, melyben egy bázis $f_1 = A(1, 0, 0) = (1, 3, 2)$.

5. Az $\mathbb{R}^2$ térben a kanonikus ($e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$) bázisban egy *(10 p.)* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Mi lesz a leképezés mátrixa az $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (3,1)$ bázisban?

Az áttérés mátrixa $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (melynek oszlopai a v komponensei).

Az S inverzére $S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ adódik.

Ebből az A lineáris leképezés mátrixa az f_1, f_2 bázisban $A' = S^{-1}AS$

$$A' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 34 & 17 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Határozza meg a *(10 p.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

mátrix determinánsát.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{3. oszlop - 1. oszlop} \\ \text{4. oszlop + 2. oszlop}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{2. oszlop + 2×(1. oszlop)}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 1 & 5 \\ 6 & 17 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & 5 \\ 17 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{2. sor - 1. sor} \\ \text{3. sor - 1. sor}}}{=} \det\begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 18$$