Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-14

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mit értünk egy vektortér dimenzióján?

2. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely $\mathbb{R}^5$ vektorait az $(1,1,1,0,0)$ és az $(1,-1,0,1,0)$ vektorok által kifeszített altérre merőlegesen vetíti! Mennyi e lineáris leképezés magterének dimenziója? *(2 pont)*

3. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! *(2 pont)*

4. Adjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x-2y=5 \\ 3x-3y=6 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását! *(2 pont)*

5. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ Frobenius- és 2-normáját! *(2 pont)*

6. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között?

7. Végezzük el a főtengelytranszformációt az $2x^2 + 4xy - y^2$ kvadratikus formán! *(2 pont)*

8. Írjuk fel az $\sin \mathbf{J}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

9. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ önadjungált. *(2 pont)*

10. Bizonyítsuk be, hogy minden lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezéshez van olyan $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$. *(3 pont)*

11. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{M}_{n\times n}$ mátrixnak van n lineárisan független sajátvektora, akkor diagonalizálható! *(3 pont)*

12. Igazoljuk, hogy minden komplex mátrix bármely λ sajátértéke benne van a mátrix valamely sorához tartozó Gershgorin-körében! *(3 pont)*