Vizsgadolgozat

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
   (a) Mikor nevezzük az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat (együttesen) függetlennek? ($n > 0$)
   (b) Írjuk fel az Y valószínűségi változó X-re vett lineáris regresszióját, és az abban szereplő (tipikusan α-val és β-val jelölt) együtthatókat az X és Y változók kovarianciája, várható értékei, és szórásai segítségével.

2. Binomiális és Geometriai eloszlás bemegy a kocsmába. Geometriai kér egy sört és megissza, és minden egyes sör után $\frac{1}{3}$ eséllyel kér egy újabbat és megissza. Binomiális kér 4 sört, és ezeket egymástól függetlenül, egyenként $\frac{1}{2}$ eséllyel elfogyasztja. Feltéve, hogy Geometriai több sört ivott, mint Binomiális, mi az esélye, hogy Binomiális egyet sem ivott meg?

3. A manók az északi sarkon zsákokat töltenek meg ajándékokkal. Az egyes ajándékok térfogata egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változó, várható értéke $0{,}4\,\mathrm{m}^3$, szórása pedig $0{,}23\,\mathrm{m}^3$. Egy zsákba mindig 12 darab ajándék kerül, továbbá összesen 48 darab zsákot töltenek meg ajándékokkal. Egy zsák térfogata a benne lévő ajándékok térfogatösszegének 110%-a. Mi az esélye, hogy a zsákok beférnek a Mikulás szánjába, ha a szán összesen $256\,\mathrm{m}^3$-nyi zsák elszállítására képes? (A zsákok térfogatai összeadódnak.)

4. Legyen U és V együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{U,V} : (u,v) \mapsto \begin{cases} \frac{3}{4}(u^2+v^2) & \text{ha } 0 < u < 1 \text{ és } -1 < v < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a $\mathbb{P}(U^2 > V^2)$ valószínűséget, illetve U és V kovarianciáját.

5. Egy kátyúzással foglalkozó vállalkozó, Tömi Tomi feladata feltölteni az utca végén lévő kátyút. Ha csak $t > 0$ idő múlva sikerül feltöltenie a kátyút, akkor ezen t idő alatt Y számú arrajárónak okoz kellemetlenséget a hiba, ahol Y eloszlása $\mathrm{Pois}(t)$.
   (a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$ és $\mathbb{E}(Y^2)$ értékét t függvényében.
   (b) Mivel Tamás rendszertelen időközönként javítja a gödröt, így az utca végi kátyú feltöltésének T időpontja folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó a $[0,\infty)$ halmazon. Legyen Z az a valószínűségi változó, aminek $T = t$ feltétel esetén az eloszlása megegyezik a fenti Y eloszlásával. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(T)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ és $\mathbb{D}(Z)$ mennyiségeket, ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Z) = 2$.

6.* Legyen $(X,Y) \sim N(\underline{0}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ahol

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Legyen $W = 2X - Y$. Határozzuk meg (X, W) kovarianciamátrixát.
   (b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < Y \mid X > 0)$ valószínűséget.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998