Felsőbb Matematika 1. ZH 2010-10-22 E.I.ABC

1. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix *(a)* szinguláris felbontását, és annak redukált változatát, *(b)* pszeudoinverzét, és *(c)* határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! *(4 pont)*

Megoldás. *(a)* Mivel $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right]$, így a karakterisztikus polinom $x^2 - 13x + 36$, aminek gyökei 9 és 4. A hozzájuk tartozó sajátvektorok $(2, -1)$ és $(1, 2)$. E vektorok ortogonálisak, és ezek normált alakjai lesznek $\mathbf{V}$ oszlopvektorai (lenormálni őket ráér a legvégén). Az $\mathbf{U}$ oszlopvektorainak kiszámításához e vektorokat $\mathbf{A}$-val szorozzuk, majd az így kapott vektorok vektori szorzata adja $\mathbf{U}$ harmadik vektorát:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Így már csak normálni kell az oszlopokat, és felírható az SVD két alakja:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4/15\sqrt{5} & 1/5\sqrt{5} & -2/3 \\ -1/3\sqrt{5} & 0 & -2/3 \\ -2/15\sqrt{5} & 2/5\sqrt{5} & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/15 & 1/5 & -2\sqrt{5}/3 \\ -1/3 & 0 & -2\sqrt{5}/3 \\ -2/15 & 2/5 & \sqrt{5}/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/15 & 1/5 \\ -1/3 & 0 \\ -2/15 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) A pszeudoinverz kiszámításához elég a redukált alakot használni:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}_1^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/15 & 1/5 \\ -1/3 & 0 \\ -2/15 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

(c) $\mathbf{A}^+\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző feladatbeli egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! *(3 pont)*

Megoldás. Először a Gram–Schmidt-eljárással $\mathbf{A}$ első oszlopára merőleges vektort keresünk:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2) - \frac{(0, 1, 2) \cdot (2, -2, 0)}{|(2, -2, 0)|^2}(2, -2, 0) = (0, 1, 2) - \frac{-2}{8}(2, -2, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok normáltjai lesznek $\mathbf{Q}$ oszlopai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. A 10×10-es $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - 3)^6(\lambda - 2)^4$. A $\mathbf{B} - 3\mathbf{I}$ első néhány hatványának rangja 8, 6, 5, 4, a $\mathbf{B} - 2\mathbf{I}$ mátrixé 7, 6. Írjuk fel $\mathbf{B}$ Jordan normálalakját! *(2 pont)*

Megoldás. Mivel $(\mathbf{B} - 3\mathbf{I})^4$ a legkisebb kitevő, melynek rangja $10 - 6$, ezért e sajátértékhez tartozó leghosszabb lánc 4-hosszú. Az is látható, hogy mivel $10 - 8 = 2$, ezért a $\lambda = 3$ sajátértékhez 2 blokk (és így 2 lánc) tartozik. Felírva az egyenleteket a k-hosszú Jordan-láncok m_k számára:

$$\begin{aligned} m_4 &= 6 - 10 + 5 \\ m_3 + 2m_4 &= 6 - 10 + 6 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= 6 - 10 + 8 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 10 - 8 \end{aligned}$$

Kapjuk, hogy $m_4 = 1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $m_1 = 0$. Hasonló számolással adódik a $\lambda = 2$ sajátértékre, hogy a leghosszabb lánc hossza 2, mert $(\mathbf{B} - 2\mathbf{I})^2$ a legkisebb kitevő, melynek rangja $10 - 4$. (Mivel $10 - 7 = 3$, így a $\lambda = 2$-höz 3 blokk tartozik.) Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_2 &= 4 - 10 + 7 \\ m_1 + m_2 &= 10 - 7 \end{aligned}$$

amiből $m_2 = 1$, $m_1 = 2$. Ezek alapján a Jordan-mátrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right]$$

4. Írjuk fel az $(1, 2, 2)$ vektor körüli $60°$ fokos forgatás mátrixát valamely bázisban, és írjuk fel abban a bázisban az $x + 2y + 2z = 1$ egyenletű sík egyenletét! *(2 pont)*

Megoldás. Az első koordinátatengely körüli forgatás mátrixa egy ortonormált bázisban

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ha $(1, 2, 2)$ az egyik tengelyrány egy ortogonális koordinátarendszerben, akkor – mivel a sík normálvektora épp e vektor – egyenlete $x' = \mathit{const}$ alakú lesz függetlenül a másik két bázisvektortól. Mivel a sík normálalakja $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$, ezért az új koordinátarendszerben $x' = \frac{1}{3}$ az egyenlet.

5. Határozzuk meg a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-alakját, egy hozzá tartozó Jordan-bázisát, és az $e^{\mathbf{C}}$ mátrixot! *(4 pont)*

Megoldás. A karakterisztikus polinom $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3$. Mivel a sajátvektorok kétdimenziós teret alkotnak, amit kifeszít pl. a $(1, 0, 1)$ és $(0, 2, 3)$ vektor, ezért a Jordan-bázis harmadik vektora általánosított sajátvektor lesz, és a Jordan-alak

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az általánosított sajátvektor megoldása az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{v}$ egyenletnek, ahol $\mathbf{v}$ egy sajátvektor. Mivel a

$$(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

egyenlet együtthatómátrixának minden oszlopa az $(-1, 2, 2)$ vektor többszöröse, ezért a $\mathbf{v}$ vektor is csak ilyen lehet. Legyen tehát $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$. Az egyenletrendszer egy megoldása $\mathbf{x} = (0, 1, 1)$. Így a bázis egyik lánca: $(-1, 2, 2) \longleftarrow (0, 1, 1)$. A másik lánc egy sajátvektorból áll. E sajátvektornak az előzőtől függetlennek kell lennie. Tehát

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{C}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -e^2 & -3e^2 & 2e^2 \\ 4e^2 & 7e^2 & -4e^2 \\ 4e^2 & 6e^2 & -3e^2 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg a $\mathbf{C}$ mátrix PLU-felbontását és azt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Cx} = (1, -4, 2)$ egyenletrendszert! *(3 pont)*

Megoldás.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

7. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális! *(2 pont)*

Megoldás. Általánosabban megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I}-2\mathbf{e}\mathbf{e}^H$ önadjungált és unitér: $(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H)^H = \mathbf{I}^H - 2(\mathbf{e}\mathbf{e}^H)^H = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H$,
$(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H)^H(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H) = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H + 4\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{e}\mathbf{e}^H = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H + 4\mathbf{e}1\mathbf{e}^H = \mathbf{I}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér transzformáció nemnulla skalárszorosa. *(3 pont)*

Megoldás. Ha $\mathbf{A} = c\mathbf{U}$, akkor $\mathbf{u}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v} = c^2\mathbf{u}^H\mathbf{v}$, tehát $\mathbf{A}$ merőlegességtartó. Ha $\mathbf{A}$ merőlegességtartó, akkor $\mathbf{v}$-nek és $\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v}$-nek ugyanazokra a vektorokra kell merőlegesnek lennie, vagyis $d\mathbf{v} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v}$ ($d \in \mathbb{C}$), azaz $\mathbf{U} = \mathbf{A}/\sqrt{d}$ unitér.

9. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{S}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor létezik olyan szimmetrikus és pozitív szemidefinit $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2$. *(2 pont)*

Megoldás. Mivel $\mathbf{S}$ szimmetrikus, ezért ortogonálisan diagonalizálható, azaz létezik olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$. Mivel $\mathbf{S}$ pozitív szemidefinit, ezért sajátértékei nemnegatívak, így a $\mathbf{\Lambda}$ főátlóbeli elemeiből gyököt lehet vonni, tehát van olyan $\mathbf{D}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}^2$. Így $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T)(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{M}\mathbf{M}$, ahol $\mathbf{M}$ pozitív szemidefinit, hisz $\mathbf{D}$ főátlójában nemnegatív elemek vannak, és szimmetrikus, mivel $(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$.