Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2025. május 12.

1. Adott a $G = (V, E)$ gráf a $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ csúcshalmazon. G-nek 12 éle van, $v_i v_{i+1} \in E$ minden $1 \leq i \leq 9$ esetén, és $v_1 v_{10}, v_1 v_3, v_4 v_{10} \in E$. Adjunk meg G-ben egy maximális páros részgráfot! Alkalmazzuk G-re a maximális páros részgráf közelítésére tanult első algoritmust (amikor egy partícióból indulunk ki).

a) Van-e olyan futása az algoritmusnak, amely optimális eredményt ad? Ha igen, dokumentáljuk az algoritmus egy ilyen futását!

b) Van-e olyan futása az algoritmusnak, amely nem ad optimális eredményt? Ha igen, dokumentáljuk az algoritmus egy ilyen futását!

2. Adottak a síkon az A, B, C, D, E, F, G pontok. Az A, B, C pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai. D az AB oldalfelezője, hasonlóan E és F a BC illetve AC oldalfelezői. G a háromszög súlypontja (azaz az AE, BF, CD szakaszok metszéspontja). Tekintsük az ezen a hét ponton definiált élsúlyozott teljes gráfot, ahol az élek súlyozása a végpontjaik távolságával egyenlő. Futtassuk ezen a bemeneten az utazóügynök feladatra tanult 2-approximációs algoritmust! (A maximális pontszám eléréséhez nem szükséges az élek hosszait kiszámolni, amikor két pontpár távolságát kell összehasonlítani elegendő indoklás nélkül megállapítani, hogy melyik a kisebb.)

3. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$ esetén).

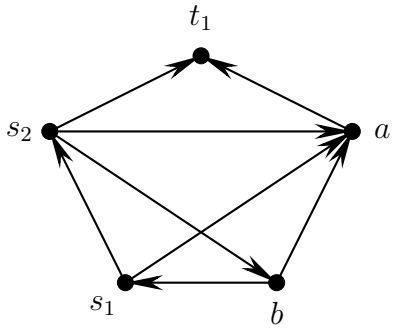
a) A p paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

b) Létezik-e p-nek olyan értéke, amely esetén a táblázatban megadott c hozzárendelés minimális összegű címkézés a G összes, valós értékű címkézései között? (Tehát minden lehetséges címkézést vegyünk figyelembe, ne csak azokat, amelyek a p kiválasztásával a lentiből előállhatnak.)

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 10 & 12 & 13 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 9 \\ 12 & 14 & 12 & 11 & 14 \\ 6 & 9 & 9 & 12 & 12 \\ 7 & 10 & 9 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	7	p	9	5	6	3	5	12-p	8	7

4. Tekintsük a következő kéttermékes folyamfeladatot: maximalizálandó az összfolyamérték a jobbra látható ábra hálózatában, ha az első termékhez tartozó termelő és fogyasztó pontok s_1 és t_1, illetve a második termékhez tartozó termelő az s_2, de a második termékhez tartozó fogyasztót (a t_2-t) nem ismerjük, az a hálózat bármely pontja lehet. Az élek kapacitásai az alábbi táblázatban (annak a $c(e)$ sorában) láthatók. A feladatot egy LP szolver programmal megoldva a lenti táblázatban látható $x_1(e)$, illetve $x_2(e)$ értékeket kaptuk, amik minden e élre az első, illetve második termékből szállított mennyiséget jelölik. Határozzuk meg a táblázat hiányzó, □-tel jelölt értékeit, állapítsuk meg, melyik csúcs a t_2, illetve, hogy mennyi a maximális összfolyamérték!



e	:	s_1s_2	s_1a	s_2t_1	s_2a	at_1	bs_1	ba	s_2b
$x_1(e)$	:	5	4	□	□	7	□	□	□
$x_2(e)$	:	0	3	□	2	□	□	2	5
$c(e)$	:	7	7	2	5	10	3	2	5

5. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy a jobbra látható A mátrix totálisan unimoduláris-e!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -p & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A megoldásokat indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.