

1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}, & \text{ha } x \geq 0; \\ \frac{\sin(x^2-1)}{x+1}, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját a megadott tartományokon! (Számolási szabályokkal.)

$$(a) \quad f(x) = e^{2x^3+5} \cdot \cos(\sqrt{x}) \quad (x > 0) \quad (b) \quad g(x) = \frac{x^2 \operatorname{sh}(5x)}{\operatorname{arch}(2x+1)} \quad (x > -1/2)$$

3. feladat (13+13=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \ln(x) \right) = ? \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(4x-1)}{e^x \cdot \operatorname{ch}(3x+3)} = ?$$

4. feladat (7+10+10+8=35 pont)

$$f(x) = x^4 - 4x^3, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a fenti függvényen, azaz

- (a) Határozza meg a függvény limeszét $\pm\infty$ -ben és a függvény zérushelyeit!
- (b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő illetve csökkenő! Határozza meg a lokális szélsőérték helyeket!
- (c) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény konvex illetve konkáv! Határozza meg az inflexiós pontokat!
- (d) Vázlatosan ábrázolja a függvényt! Határozza meg f értékkészletét!

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot \sin\left(x^{\frac{1}{3}}\right), \quad D_f = [0, +\infty)$$

Határozza meg f deriváltját minden $x > 0$ pontban, valamint f jobb oldali deriváltját az origóban!