Valószínűségszámítás vizsga megoldása

Műszaki informatika szak

2010. december 20.

1. Négyszer feldobunk egy szabályos kockát.
   A : az első két dobás páros,
   B : az utolsó két dobás páratlan,
   C : az első dobás megegyezik az utolsóval.
   Számolja ki a $\mathbf{P}(A+B \mid C+B)$ feltételes valószínűséget!
   Mo: $(A+B)(C+B) = AC+B$
   $\mathbf{P}(AC+B) = \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{4}$
   $\mathbf{P}(C+B) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(CB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}$
   $\mathbf{P}(A+B \mid C+B) = \frac{7}{9}$

2. Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek, $Z = Y^2 \operatorname{tg} X + \frac{Y}{X+1}$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
   Mo: $\mathbf{E}(Z \mid X) = \operatorname{tg} X \cdot \mathbf{E}\left(Y^2 \mid X\right) + \frac{1}{X+1} \cdot \mathbf{E}(Y \mid X) =$
   $= \operatorname{tg} X \cdot \mathbf{E}\left(Y^2\right) + \frac{1}{X+1} \cdot \mathbf{E}(Y) = 2 \cdot \operatorname{tg} X + \frac{1}{X+1}.$

3. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 7 bástyát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?
   Mo: kedvező esetek: $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4$
   összes eset: $64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59 \cdot 58$
   a keresett valószínűség: $\approx 0,519 \cdot 10^{-3}$

4. Legyenek $X \in N(-2,4)$ és $Y \in N(3,2)$ függetlenek! Adja meg a $Z = 2X - Y$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlásfüggvény, Φ segítségével!
   Mo.: $Z \in N\left(-7, \sqrt{68}\right), F_Z(t) = \Phi\left(\frac{t+7}{\sqrt{68}}\right)$

5. Határozza meg az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt, ha az együttes sűrűségfüggvény $f_{X,Y}(x,y) = a\left(x^2 + 3xy + 2y^2\right), x, y \in (0,1)$.
   (Egyébként $f_{X,Y}(x,y) = 0$.)
   Mo: $f_Y(y) = a\int\limits_0^1 x^2 + 3xy + 2y^2 dx = a\left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2}y + 2y^2\right], y \in (0,1)$
   $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2+3xy+2y^2}{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}y+2y^2}.$

6. Adja meg az n szabadságfokú Student eloszlás definícióját!
   Mo.: n db teljesen független standard normális változó négyzetösszegének az eloszlása az n szabadságfokú χ^2 eloszlás. Ha $X \in N(0,1), Y \in \chi^2_n$ függetlenek, akkor $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ eloszlása n szabadságfokú Student, vagy t-eloszlás lesz.