VIK A3 Matematika - 1. Vizsgadolgozat

2014. december 23.

Minden feladat 10 pontot ér. Rendelkezésre álló idő: 90 perc. Kizárólag az előre kiadott Laplace-transzformációs táblázat használható!
Jó munkát!

1. Határozzuk meg az
$$(1-xy)\,\mathrm{d}\,x+(xy-x^2)\,\mathrm{d}\,y=0$$
differenciálegyenletnek az $(x_0,y_0)=(1,4)$ ponton átmenő megoldását!
(Javaslat: Keressünk x-től függő integráló tényezőt!)

2. Határozza meg a $\mathbf{v}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$ vektormezőnek az $F=\{(x,y,z):z^2=x^2+y^2, 0\le z\le 1\}$ felület mentén vett felületi integrálját!

3. Tekintsüka a $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\mathbf{k}\times\mathbf{r}$ vektormezőt, ahol $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, és $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ vonalintegrálját az
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad z=2$$
görbére!

4. Adja meg a következő integrál értékét, ahol a görbe *pozitív* irányítású!
$$\oint_{|z-2|=3}\left(\overline{z}+\frac{1}{z^3(z-i)}+z^3e^{\frac{1}{z}}\cos\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}\,z$$

5. Határozzuk meg a következő $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvények divergenciáját és rotációját! Hol lesz $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ forrásmentes, illetve örvénymentes?
   (a) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=(x^2-y^2)\,\mathbf{i}+(y^2-z^2)\,\mathbf{j}+(z^2-x^2)\,\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\frac{x}{y}\,\mathbf{i}+\frac{y}{z}\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$